“AÑO DE LA UNIVERSALIZACIÓN DE LA SALUD”

UNIVERSIDAD NACIONAL DE HUANCAVELICA

(Creado por Ley 25265)

ESCUELA DE POSGRADO

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

UNIDAD DE POSGRADO

TESIS

FORMAS DE REPRESENTACIÓN MATEMÁTICA EN EL APRENDIZAJE DE FRACCIONES DE LOS ESTUDIANTES DEL CUARTO GRADO DE PRIMARIA

LÍNEA DE INVESTIGACIÓN:
ÁREA CURRICULAR DE MATEMÁTICA

PRESENTADO POR:
Bach. MIGUEL ANGEL CALDERON CASTAÑEDA

PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAESTRO EN:
CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

MENCIÓN:
EDUCACIÓN Y DESARROLLO RURAL

HUANCAVELICA - PERÚ
2020

UNIVERSIDAD NACIONAL DE HUANCAVELICA

(CREADO POR LEY Nº 25265)

UNIDAD DE POSGRADO DE LA FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

"AÑO DE LA UNIVERSALIZACIÓN DE LA SALUD"

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS

Ante el Jurado conformado por los docentes: **Dra. Olga VERGARA MEZA, Dra. Gladys Margarita ESPINOZA HERRERA, Mg. Giovanna Victoria CANO AZAMBUJA.**

Asesor: Dr. Cerapio Nicéforo QUINTANILLA CONDOR.

De conformidad al Reglamento Único de Grados y Títulos de la Universidad Nacional de Huancavelica, aprobado mediante Resolución Nº 330-2019-CU-UNH y ratificado con Resolución N° 378-2019-CU-UNH.

El Candidato al **GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN; MENCIÓN: EDUCACIÓN Y DESARROLLO RURAL.**

Don, **Miguel Ángel CALDERON CASTAÑEDA**, procedió a sustentar su trabajo de Investigación titulado: ***FORMAS DE REPRESENTACIÓN MATEMÁTICA EN EL APRENDIZAJE DE FRACCIONES DE LOS ESTUDIANTES DEL CUARTO GRADO DE PRIMARIA.*** **Mediante Resolución Directoral N° 079-2020-EPG-R/UNH, fija la hora y fecha para el acto de sustentación de la tesis.**

Luego, de haber absuelto las preguntas que le fueron formulados por los Miembros del Jurado, se dio por concluido al ACTO de sustentación, realizándose la deliberación, calificación y resultando:

Con el calificativo: *Aprobado* [X] *Desaprobado* [ ] *Por:* Unanimidad

Y para constancia se extiende la presente ACTA, en la ciudad de Huancavelica, a los **treinta días del mes de enero del año 2020.**

Dra. Olga VERGARA MEZA
Presidente del Jurado

Dra. Gladys Margarita ESPINOZA HERRERA
Secretario del Jurado

Mg. Giovanna Victoria CANO AZAMBUJA
Vocal del Jurado

Asesor

Dr. Cerapio Nicéforo Quintanilla Cóndor

A los niños y niñas del Perú profundo,

en la imagen de Rumaire, Mickail, Yosef y Eliani;

en reparo de los aprendizajes matemáticos

que tuvieron en su experiencia escolar.

RESUMEN

El presente estudio tuvo el objetivo principal de determinar la influencia de la aplicación de las formas de representación matemática en el aprendizaje de las fracciones en el cuarto grado de una institución educativa de Educación Primaria. El método experimental ha permitido explicar el efecto que produjo la aplicación de las diferentes formas de representación matemática planteada por Marshall y colaboradoras, como variable experimental, en el aprendizaje de las fracciones, mediante el desarrollo de sesiones de aprendizaje, el que se midió en dos momentos, con una prueba de entrada y de salida con un solo grupo integrado por 21 estudiantes. Los resultados obtenidos demuestran que, la aplicación de las formas de representación matemática, ha permitido generar cambios en el aprendizaje de las fracciones de la muestra seleccionada, donde al concluir el estudio, el 47,6% de estudiantes se halla en el nivel satisfactorio, a comparación del 0,0% al inicio de la investigación. Por lo tanto, se concluye que la aplicación pertinente y permanente de las formas de representación matemática, así como el uso por parte de los estudiantes, ha permitido mejores resultados de aprendizaje de las fracciones parte-todo con cantidades continuas y discretas, que comprendan mejor la noción de fracción parte-todo con ambas cantidades, ha contribuido en el uso de herramientas cognitivas para que los estudiantes representen de diversas formas las fracciones y resuelvan problemas de fracciones con mayor eficacia.

PALABRAS CLAVE: Representación, representación matemática, fracciones, aprendizaje de fracciones.

ABSTRACT

The current research has the main aim to determine the influence of the application of the mathematical representations forms in the learning process of fractions in the 4th grade of an educational institution of Primary Education. The experimental method had allowed us explain the different effects of the application of different mathematical representation forms that was stated by Marshall, as the experimental variable, in the learning process of fractions, through the development of learning sessions, the one which was measured in two moments, through an entrance and a final test with just a 21 integrated student group. The results show that the application of the mathematical representations forms has allowed the production of changes in the learning process of fractions in the selected sample; where at the concluding time of the study, 47.6% of the students are in a satisfactory stage, compared to 0.0% at the beginning of the investigacion. Therefore, it is concluded that the pertinent and permanent application of the mathematical representations forms, along with the use of this tool by the students, allowed to get better learning results of the part –whole fractions with continuous and discrete quantities; to have a better understanding of the part-whole fractions with both quantities; has contributed to the use of cognitive tools to the students to represent fractions in a diverse way and solve this fraction problems with more efficiency.

Key words: Representation, mathematical representation, fractions, learning process of fractions.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

El estudio tuvo el propósito fundamental de determinar la influencia de la aplicación de las formas de representación matemática en el aprendizaje de las fracciones en el cuarto grado de la I.E. N° 36005 “Juan Vergara Villafuerte” del distrito de Ascensión. Las razones que motivaron el desarrollo del mismo, obedece estrictamente al aspecto didáctico del aprendizaje y enseñanza de la matemática, específicamente del aprendizaje de las fracciones en el cuarto grado, en vista que, los resultados de las evaluaciones estandarizadas en el Perú, por ende en la región Huancavelica, demuestran bajos resultados, tal como señalan los informes del Ministerio de Educación, problemática que seguramente, tiene aristas diferentes de explicación causal, sin embargo, considero se debe también, a un problema específico de comprensión y metodología asumida en la enseñanza y aprendizaje. El estudio se fundamentó en lo señalado por Duval (1995), sobre la vital importancia de las representaciones en el aprendizaje de la matemática, la actividad matemática se realiza necesariamente en un contexto de representación y que los estudiantes también deberían ser capaces de reconocer el mismo objeto matemático de conocimiento en otros contextos de representación y usarlos, asimismo se tuvo en cuenta las formas de representación plateadas por Marshall, Castro y Canty (2010), también asumido por el Ministerio de Educación para fundamentar las Rutas de Aprendizaje de Matemática en los 3 niveles educativos, con algunas adaptaciones, quienes consideraban que traducir y moverse con flexibilidad entre las representaciones es un aspecto clave de la comprensión matemática de los estudiantes (p. 39) y que esas representaciones pueden ser las expresiones verbales y escritas, las concretas y pictóricas, los gráficos, las tablas y las expresiones simbólicas (p. 40). Estos planteamientos sirvieron de base para elaborar el instrumento de investigación, que fue aplicado como prueba de entrada y de salida, ésta última luego de aplicar un conjunto de sesiones de aprendizaje aplicando las diversas formas de representación matemática para mejorar el aprendizaje de las fracciones.

La hipótesis que orientó el proceso investigativo fue: La aplicación de las formas de representación matemática influyen positivamente en el aprendizaje de las fracciones en el cuarto grado de Educación Primaria.

El carácter de la investigación es explicativo, debido a que se explica cuáles fueron los resultados alcanzados después de haber aplicado las formas de representación matemática en el aprendizaje de las fracciones, con un diseño pre experimental, con un solo grupo en el que se aplicó una prueba de entrada y otra de salida, luego de la aplicación de la variable experimental. El grupo estuvo conformado por los estudiantes del cuarto grado de Educación Primaria.

Para su mejor explicación se ha dividido en cuatro capítulos. El Capítulo I comprende el planteamiento del estudio, en la que se define el problema, justifica y plantea los objetivos de investigación. El Capítulo II trata sobre las bases teórico científicas, en el que se describe los planteamientos de Duval (2006) y de Marshall y colaboradoras (2010), principalmente, que dan basamento al estudio realizado. El Capítulo III corresponde a la metodología de la investigación, en el que se expone el tipo, el nivel, el diseño de investigación y el Capítulo IV comprende el análisis e interpretación de resultados, y principalmente la discusión de resultados. Finalmente se expone las conclusiones, recomendaciones, bibliografía y el anexo.

El resultado de la investigación pretende ser un aporte en la comprensión del problema de aprendizaje de la matemática, básicamente en Educación Primaria, y sustenta experimentalmente la importancia y la necesidad de que los estudiantes deban hacer uso y transitar en el uso de múltiples formas de representación para aprender la matemática.

EL AUTOR

CAPÍTULO I

EL PROBLEMA

1.1 Planteamiento del problema

Cada tres años se realiza la evaluación estandarizada en Educación Secundaria, denominada PISA, "Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes" (PISA, por sus siglas en inglés Programme for International Student Assessment). PISA evalúa en los dominios de Comprensión lectora, Matemática y Ciencias, además recoge información sobre el contexto personal, familiar y escolar de los estudiantes, tal como señala el Ministerio de Educación (2017). El Perú, según los resultados del informe PISA presentado por la UMC en el 2015, en el área de Matemática nos ubica en el puesto 64 de los 72 países evaluados, y que, teniendo como referencia los 6 niveles de desempeño, debajo del nivel 1 se encuentra 37,7% de estudiantes; en el nivel 1, se encuentra 28,4%; en el nivel 2, se encuentra el 21,0%; en el nivel 3, se encuentra 9,8%; en el nivel 4; se encuentra 2,7%, en el nivel 5, se encuentra el 0,4% y ningún estudiante en el nivel 6. Teniendo en cuenta que, el nivel mínimo de la competencia matemática es el nivel 2, se tiene que el 66,1% de estudiantes peruanos no alcanzan ese nivel mínimo, porque se hallan en el nivel 1 y debajo del nivel 1 (pp. 80-82). Estos resultados respecto a esta competencia no son muy alentadores. En Matemática la capacidad que se evalúa es: Capacidad para formular, emplear e interpretar la matemática en distintos contextos, mediante el razonamiento matemático y la utilización de conceptos, procedimientos, datos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos (p. 16).

A nivel nacional se realiza cada año, la Evaluación Censal de Estudiantes (ECE) y la Evaluación Muestral (EM), para estudiantes del segundo y cuarto grado de primaria y segundo de secundaria, en Lectura, Matemática y Personal Social en primaria, y en secundaria, además Ciencias Sociales y Ciencia y Tecnología.

Los últimos resultados en la Evaluación Censal de Estudiantes del cuarto grado de primaria de los últimos años en el área de Matemática, arrojan resultados muy desalentadores, teniendo en cuenta que el nivel Satisfactorio, es el que expresa lo que el estudiante debe lograr lo previsto para el ciclo correspondiente. Los resultados de la ECE 2018 a nivel nacional, nos señala que, en Matemática solo el 30,7% de estudiantes alcanza el nivel satisfactorio, por cierto, mejor al 25,2% del año 2016. (Ministerio de Educación, 2019a, p.6).

A nivel de la región Huancavelica, alcanzaron el nivel satisfactorio solo el 30,4%, pero la gran proporción de estudiantes se encuentran en proceso 41,9%, en inicio 19,6% y en previo al inicio 8,1%, es decir, de 100 estudiantes solo 30 estudiantes alcanzan el nivel satisfactorio o nivel logrado, como se muestra en el siguiente gráfico (Ministerio de Educación, 2019b, p. 5).

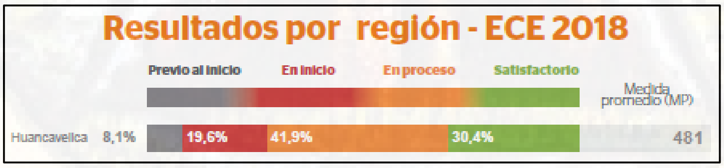


Figura 1. Resultados por región - ECE 2018
Fuente: Ministerio de Educación – UMC (2019b)

Y a nivel de la UGEL Huancavelica (provincia de Huancavelica) en el nivel satisfactorio se encuentra el 30,2% de estudiantes del cuarto grado, mejor al 23,8% del año 2016; mientras que, en el nivel en proceso se encuentra el 43,0 %; en el nivel en inicio 19,2 %, y en el espacio crítico previo al inicio se encuentra 7,6 % de estudiantes. Veáse a continuación el comparativo con las otras UGELs. (Ministerio de Educación, 2019b, p. 6).

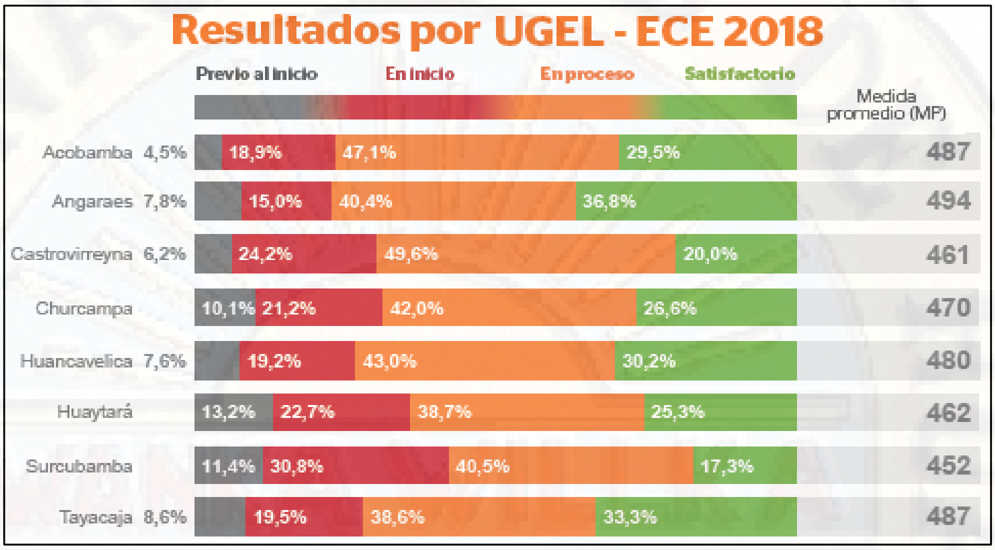


Figura 2. Resultados por UGEL ECE 2018
Fuente: ME – UMC (2019b)

Del mismo modo, en el comparativo zona rural y zona urbana, los resultados expresan que en zona urbana en el nivel satisfactorio se hallan 37,0%; en proceso 43,0%; en inicio 15,3% y en el nivel previo al inicio el 4,7 %; mientras que, en zona rural en el nivel satisfactorio se encuentra solo el 16,7%, en proceso 39,6%, en inicio 28,5% y en previo al inicio 15,2%. (2019b, p. 6).

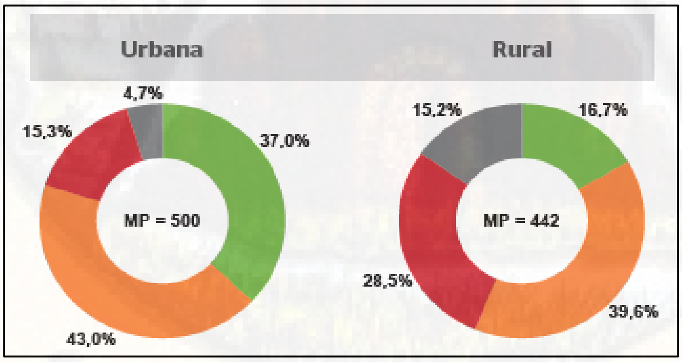


Figura 3. Resultado comparativo zona urbana y rural ECE 2018
Fuente: ME – UMC (2019b)

Como se observa, los resultados de zona rural y urbana tienen una diferencia abismal, con un alto índice de desventaja de la zona rural.

Justamente uno de los aspectos que evalúa la ECE anualmente, son las fracciones, básicamente en su concepción parte-todo con cantidades continuas y discretas, como está señalado en el Currículo Nacional de la Educación Básica, cuyo indicador es “Interpreta el uso de las fracciones en su significado parte todo con cantidades continuas o discretas” tal como refiere el Ministerio de Educación, en el Informe de la ECE (2017, p. 20), en dicho documento también plantea las dificultades que presentan los estudiantes, precisando que una de las mayores dificultades que tiene los estudiantes tiene que ver con: “Identifica las partes del total como números naturales. Confunde parte-todo con parte-parte” (p. 30).

Las dificultades señaladas en la ECE seguramente tienen diferentes causantes, pero también, tiene que ver con la práctica pedagógica docente y la forma de aprendizaje de los estudiantes; sin embargo, como han señalado estudios muy serios, las fracciones son uno de los contenidos matemáticos que muchas más dificultades acarrean, debido a que su aprendizaje requiere el conocimiento y operativización de concepciones tales como, parte-todo, cociente, razón operador y medida.

Además, las dificultades del aprendizaje de la Matemática en general, como lo demuestra el Informe ECE, en todos los desempeños y/o estándares evaluados, hace evidente la forma de cómo están aprendiendo los estudiantes, desde los primeros años de escolaridad, básicamente por ser producto de una enseñanza instructiva y altamente abstracta, dejando de lado la metodología para desarrollar el pensamiento lógico matemático. Lo que demanda una autoformación docente para enfrentar estos retos y atender las necesidades de aprendizaje de los estudiantes.

Por lo tanto, la mirada que se asume en el presente trabajo de investigación, es el tema metodológico, que debe responder a interrogantes: ¿cómo se enseña las fracciones?, ¿cómo se aprende las fracciones?, ¿cuáles son las dificultades más frecuentes en el aprendizaje de las fracciones?, ¿qué podemos hacer para superar las dificultades señaladas?

1.2 Formulación del problema

La situación actual, a nivel nacional, regional y local, descrita líneas arriba, y que tiene muchas aristas para explicar las razones de esta problemática, que, sin embargo, en el presente trabajo se asume una explicación particular, que permita entender por qué son los bajos resultados de aprendizaje, por ello, se expresa y delimita el problema en los siguientes términos:

¿Cómo influye la aplicación de las formas de representación matemática en el aprendizaje de las fracciones en el cuarto grado de la I.E. N° 36005 “JVV” de Ascensión?

Mientras que los problemas específicos son los siguientes:

- ¿Cómo influye las formas de representación matemática en el aprendizaje de las fracciones parte-todo con cantidades continuas en el cuarto grado?
- ¿Cómo influye las formas de representación matemática en el aprendizaje de las fracciones parte-todo con cantidades discretas en el cuarto grado?

1.3 Objetivos de la investigación

1.3.1 Objetivo general

Determinar la influencia de la aplicación de las formas de representación matemática en el aprendizaje de las fracciones en el cuarto grado.

1.3.2 Objetivos específicos

- Determinar la influencia de las formas de representación matemática en el aprendizaje de las fracciones parte-todo con cantidades continuas en el cuarto grado.
- Determinar la influencia de las formas de representación matemática en el aprendizaje de las fracciones parte-todo con cantidades discretas en el cuarto grado.

1.4 Justificación del estudio

1.4.1 Justificación práctica

La presente investigación permite atender una problemática actual y vigente, principalmente para los docentes; por ello, contribuirá a deconstruir la práctica pedagógica de los docentes respecto al aprendizaje de las fracciones y su relación con las distintas formas de representación matemática. No solo pensando en las evaluaciones estandarizadas, sino como elemento básico y fundamental para el desarrollo de las competencias y capacidades de los estudiantes del cuarto grado. Esto significa demostrar en la práctica la importancia de la aplicación de las formas de representación matemática en el desarrollo de los diferentes contenidos temáticos del área curricular de Matemática. Lo que finalmente puede contribuir a fortalecer los desempeños de los docentes, en suma, mejorar su práctica pedagógica y por supuesto mejorar los niveles de aprendizaje de los estudiantes.

1.4.2 Justificación metodológica

Asumiendo que el problema de aprendizaje de la Matemática en general, tiene su origen en la forma cómo se enseña y cómo se aprende, la explicación de la importancia y la utilidad de las formas de representación matemática, permitirá a los docentes, contar con una herramienta poderosa que fundamente y mejore su práctica pedagógica, y a los estudiantes contar con recursos pertinentes y necesarios para la comprensión de las actividades matemáticas, no solo para resolver situaciones relacionadas a las fracciones, sino aplicarlos en la construcción de otros conocimientos matemáticos. Empoderando a los estudiantes en el uso de las diferentes formas de representación matemática estamos garantizando un aprendizaje significativo permanente, progresivo y autónomo.

1.4.3 Justificación teórica

Permitirá recoger evidencia teórica y práctica que fundamente la importancia y necesidad de la aplicación de las diferentes formas de representación matemática, no solo en el aprendizaje de las fracciones, sino también de otros conocimientos matemáticos, verbigracia lo expresado por Duval, que, la transformación de las representaciones semióticas es intrínseca a cualquier proceso matemático. Y que la complejidad cognitiva del aprendizaje de las matemáticas (2016b, p.70), o que la actividad matemática se realiza necesariamente en un contexto de representación (…). Pero que los estudiantes también deberían ser capaces de reconocer el mismo objeto matemático de conocimiento en otros contextos de representación y usarlos (2016a, pp. 144-145).

Asimismo, permitirá sustentar o refutar la propuesta del Ministerio de Educación, planteada en las Rutas del Aprendizaje sobre las diferentes formas de representar un contenido matemático a través de las cuáles adquieren significado y mejor comprensión para los estudiantes; las mismas, que han sido considerados como parte de los procesos didácticos de la Matemática. Procesos didácticos que deberían contribuir a la construcción de aprendizajes, debido a que les permite transitar del pensamiento concreto al pensamiento abstracto. (2015a, pp. 26-27). Planteamiento que fue sustentado en lo propuesto por Marshall y colaboradoras, que consideraron que las representaciones matemáticas son palabras, imágenes, dibujos, diagramas, pantallas gráficas y expresiones simbólicas (2010, p. 40) y que la traducción de una representación a otra es una habilidad compleja que requiere el conocimiento de las representaciones involucradas (p. 40).

Además, permitirá reconocer las dificultades que evidencian los estudiantes en el aprendizaje de las fracciones, por cierto, un contenido algo popular, pero que generalmente se desarrolla solo en su noción parte-todo, y sólo con cantidades continuas. Información que debe servir para emprender otras investigaciones de carácter descriptivo, explicativo, etnográfico, etc.

1.5 Limitaciones del estudio

Las limitaciones estuvieron enfocadas en la elección del diseño de investigación, debido a que inicialmente, se había optado por uno que consideraba un grupo experimental y otro de control, pero luego de aplicar la prueba de entrada, los estudiantes y la maestra del grupo de control, se mostraron fastidiados e inconformes por la no ejecución de las sesiones en su aula, por lo que, se tuvo que determinar el trabajo con un solo grupo.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

2.1 Antecedentes de la investigación

2.1.1 A nivel internacional

Martínez y Meza (2017), en su estudio denominado *Adición entre Fracciones como Parte de un Todo Utilizando El Juego Con Regletas A3*, realizado en la Universidad Autónoma de Manizales - Córdoba, se plantearon como propósito: Analizar cambios en la comprensión del proceso de la adición entre fracciones como parte de un todo a partir de la utilización de las regletas A3. con los estudiantes de grado 4º de básica primaria de la sede principal en el Establecimiento Educativo Nuestra Señora de la Candelaria del municipio de Planeta Rica, Córdoba. La metodología asumida fue desde el enfoque de la investigación cualitativa, utilizando el método etnográfico. Los resultados que obtuvieron se expresan en que los niños al manipular las regletas A3 lograban por su cuenta encontrar equivalencias en superficies, argumentando en algunas oportunidades que "ocupan el mismo espacio" como si fuese un volumen; el manipular y confrontar las regletas les permitió establecer la relación de equivalencia. Finalmente concluyeron que se han obtenido cambios favorables en la comprensión del proceso de la adición con fracciones como parte de un todo utilizando el juego de las regletas A3. Estos cambios se evidencian en los procesos llevados a cabo por los estudiantes a través de las diferentes representaciones matemáticas.

Gonzales (2015), realizó un estudio denominado *Errores comunes en el aprendizaje de las fracciones: Un estudio con alumnos de 12/13 años en Cantabria,* en la Universidad de Cantabria-España, precisando que es un estudio mixto, cuantitativo y cualitativo, con el propósito principal de identificar errores y dificultades en el aprendizaje de fracciones. Los resultados que se obtuvieron expresan que, el 26,9% de los alumnos cometieron errores englobados en la primera categoría, *errores por descuido o distracción;* que un 91 % de los alumnos que tuvieron alguno de los errores pertenecientes a la categoría 2, *errores por desconocimiento de la respuesta*; que en la categoría 3, *errores por defectos en la comprensión del concepto,* se encuentran un 94% de los estudiantes; y un 77,6% de estudiantes cometieron errores clasificados en la categoría 4, *aplicación sistemática de procedimientos erróneos.* Concluyó que la dificultad en la enseñanza y aprendizaje de fracciones, tienen que ver con la interpretación de ciertos aspectos de la idea de fracción: considerar la división como un aspecto de la fracción, entender la fracción como un número y la equivalencia de fracciones. Asimismo, planteó que, si bien el uso de modelo parte-todo, parece adecuado para la introducción de las fracciones en los primeros años, al mismo tiempo parece obstaculizar la ampliación de los significados de fracción. Parece probable que las tres áreas de dificultad con las fracciones antes mencionadas son resultado de la incapacidad de establecer una conexión entre el modelo geométrico y la forma simbólica abstracta de una fracción, requiriendo un importante reajuste para lograrlo, lo cual no es posible con algunos niños. Es por ello que propone abandonar este modelo geométrico en cursos superiores, y presentar la idea de fracción en un contexto más amplio.

Rico (2007), realizó una investigación titulada *Estrategias para el aprendizaje de las fracciones con los alumnos del 5° grado,* en la Universidad Pedagógica Nacional de Zamora, Michoacán, una investigación acción, bajo el enfoque cualitativo, con el propósito principal de que los estudiantes desarrollen habilidades para entender el significado de las fracciones y sus operaciones, que comprendan y manejen las fracciones con diferentes significados: medida, cociente y razón, así mismo resolver problemas sencillos de adición y sustracción de fracciones. Los resultados se expresan en los siguientes términos: se logró desarrollar la capacidad de resolución de problemas en un 79% de los estudiantes, producto de que se despertó el gusto por las fracciones con apoyo de materiales concretos en la construcción del conocimiento matemático en el grupo, haciendo flexibles las actividades planeadas, dándoles la pauta a seguir, relacionándolo con los conocimientos previos, buscando la interacción del grupo en todo momento y despertando el gusto por las matemáticas. Concluyendo que la realización de las actividades propuestas coadyuvó al logro del propósito deseado, pues el grupo logró comprender el significado de las fracciones y su operatoria en diferentes contextos al manipular diversos materiales que ellos mismos construían y al resolver diferentes situaciones problemáticas relacionada con la vida dentro y fuera del aula.

Niño y Raad (2018), realizaron una investigación titulada *Interpretación de "la fracción como relación parte-todo" en contextos continuos y discretos, a partir de la implementación de una secuencia didáctica que privilegia la competencia comunicativa,* en la Pontificia Universidad Javeriana de Bogotá, con el propósito de describir y analizar la interpretación de la fracción como relación parte-todo, en contextos continuos y discretos, de los estudiantes de quinto grado de primaria, a partir de la implementación de una secuencia didáctica que relaciona los atributos de la fracción, los contextos y los registros de representación, privilegiando la competencia comunicativa; es un estudio de casos. Como resultados observaron que, los estudiantes hacen reconocimiento de la unidad, las partes e igualdad de las partes mientras no se aumente la asimetría y subdivisiones de la superficie propuesta; muestran mayor manejo de los atributos, pero cuando se aumentan las subdivisiones, presenta dificultad para resolver la situación planteada y requiere de acompañamiento para resolverla; por el contrario; se facilitan en el reconocimiento de la unidad, las partes e igualdad de las partes, entendiendo que al dividir una superficie, se obtienen subregiones iguales en área sin importar la forma; manejan adecuadamente los atributos de la fracción referentes al reconocimiento de la unidad, en su relación parte-todo, entienden la manera en que una parte puede asumirse como una nueva unidad, para establecer una nueva relación parte-todo; trabajan la relatividad de la unidad y de las partes, como también la reconstrucción de la unidad a partir de las partes; reconocen el manejo de los símbolos relacionados a las fracciones, reconstrucción de la unidad, relación aditiva y multiplicativa (todo-parte y parte-todo) en fracciones menores que la unidad; manejan relaciones cuantitativas de tipo aditivo entre las partes y el todo para reconstruir parte de la unidad o la unidad en sí, entre otros aspecto importantes. Finalmente concluyen que es necesario fortalecer el estudio de la fracción y su relación como parte-todo, tanto por parte de los docentes como de los estudiantes, y que, con frecuencia, el manejo de la fracción se realiza en las aulas con una orientación docente que hace más difícil la comprensión de esta. Asimismo, para que los estudiantes logren dominar todos los aspectos relacionados a las fracciones (todo-parte y parte-todo), se exige un recorrido previo que denota comprensión, y sólo así, el estudiante estará en la capacidad de manejar los atributos de la fracción, sus contextos y representaciones.

Vieyra (2010), desarrolló un estudio sobre la *Comunicación matemática en las primeras edades: representación de problemas aritméticos,* en la Universidad Autónoma de Barcelona-España, el objetivo de esta investigación fue analizar los tipos de representación que utilizan los niños de 7–8 años en la resolución de problemas aritméticos; además, identificar estas representaciones para describirlas y caracterizarlas. Es una investigación cualitativa, de corte descriptivo e interpretativo. Se obtuvo como resultados que, en general, todos los estudiantes utilizaron representaciones pictóricas para resolver el problema planteado, que el uso de representaciones pictóricas ayuda mucho a los estudiantes para no realizar operaciones aritméticas sin sentido; que los tipos de representaciones más utilizadas son la icónica y simbólica (lenguaje matemático y lenguaje verbal escrito), y que al parecer están relacionados con la pertinencia y calidad de las respuestas de los estudiantes. Concluyendo que, los alumnos de 7 y 8 años, frente a un problema de repartición no rutinario, utilizan diferentes tipos de representaciones para resolverlo, por lo tanto, consideran que el maestro, al escoger sólo problemas aritméticos de repartición rutinarios, quita al alumno la posibilidad de resolverlo mediante la utilización de varios tipos de representaciones, además se debe tener en cuenta, que aparte de la representación a través del lenguaje matemático propiamente dicho, que las representaciones a través del dibujo o el lenguaje verbal escrito son importantes, valorando de éste modo las "matemáticas informales" de los estudiantes.

2.1.2 A nivel nacional

Gutierrez (2012), realizó un trabajo de investigación titulado, *Material didáctico para el aprendizaje de fracciones y decimales en niños y niñas del sexto grado de la Institución Educativa N° 31218 "Mauro I. Carhuallanqui C. del barrio Mantaro – Huayucachi*, en la Universidad Nacional del Centro del Perú, una investigación cuantitativa, con el objetivo de, determinar la influencia de los materiales didácticos en el aprendizaje de fracciones y decimales en los estudiantes del sexto grado de Educación Primaria. La hipótesis fue, los materiales didácticos influyen positivamente en el aprendizaje de las fracciones y decimales en los niños y niñas del sexto grado de la Institución Educativa N°31218 —Mauro I. Carhuallanqui C. del Barrio Mantaro – Huayucachi. Los resultados se sintetizan en que, el uso de materiales didácticos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de fracciones y decimales tiene efectos positivos al incrementar significativamente el rendimiento académico del grupo experimental conformado por los niños y niñas del sexto grado, en comparación del grupo control. Concluyó que, los educandos que aprenden fracciones y decimales a través de materiales didácticos obtienen un promedio de rendimiento académico más aceptable y homogénea, que contribuye sustancialmente en el desarrollo del pensamiento matemático, ya que permite al estudiante conocer, descubrir y explicar objetivamente los conceptos, leyes, etc., y que constituyen un estímulo permanente para la participación activa del estudiante, promoviendo un aprendizaje significativo y por descubrimiento.

Carrillo (2012), realizó un trabajo de investigación sobre el *Análisis de la organización matemática relacionada a las concepciones de fracción que se presenta en el texto escolar Matemática quinto grado de Educación Primaria,* en la Pontificia Universidad Católica del Perú, una investigación cualitativa, con el propósito de analizar la organización matemática relacionada a las concepciones de fracción que se presentan en el texto escolar Matemática del quinto grado de Educación Primaria. Por la naturaleza del trabajo, análisis del texto escolar Matemática, podemos aseverar que se ha empleado la metodología cualitativa. Los resultados indican que se presentan actividades que requieren emplear las concepciones parte-todo, cociente, operador, razón y medida en el desarrollo del texto; las representaciones guardan relación con las concepciones de fracción e identifican la tarea que se propone y la técnica o técnicas que se presentan. Concluyendo que, en el texto escolar se ha identificado el uso de dos concepciones de fracción con mayor predominancia: como parte-todo y como operador; la noción de fracción como parte-todo es la que predomina y se presenta en la mayoría de las actividades; la concepción de fracción como operador, aparece como fracción de un número, y se presenta en algunas actividades. Las concepciones de fracción como razón y cociente no están consideradas explícitamente, solo aparecen eventualmente, refiere además que aparecen algunas representaciones figurales, que deben ser utilizados adecuadamente de acuerdo a cada tipo de fracción, ya que, pueden favorecer o desfavorecer el aprendizaje de las mismas.

Castro (2017), realizó la tesis denominada *Comprensión del concepto de fracción en los estudiantes en formación inicial de Educación Primaria. Una mirada desde la teoría de campos conceptuales*, en la Universidad Antonio Ruiz de Montoya, con el propósito de analizar las concepciones de fracción que tienen los docentes en formación inicial de primaria a fin de proponer una guía de trabajo que les permita fortalecer la comprensión del concepto de fracción en sus distintos significados a partir de una variedad de contextos y uso de diversas representaciones. El estudio es una investigación cualitativa del nivel descriptivo, porque pretende describir las concepciones que tiene los docentes en su formación profesional inicial. Las conclusiones de la investigación muestran que los docentes en formación, el grupo sometido a estudio, tienen serias dificultades en la comprensión de las fracciones, verbigracia, solo mostraban leer y escribir numéricamente una fracción propia o impropia sin contexto alguno, representaban gráficamente algunas fracciones propias y lo hacían solo de manera parte-todo con cantidades continuas y que no manejaban fracciones equivalentes, no atendían al «todo» en una expresión y solo usaban una representación de la fracción, generalmente la numérica, señalando que, trabajar los diferentes significados de la fracción permite profundizar en el concepto mismo y en sus diferentes representaciones, y que, abordar el aprendizaje de las fracciones con diferentes materiales y representaciones y en diferentes contextos, hace posible relacionar estos conceptos con otras nociones matemáticas y lograr así aprendizajes significativos.

Dávila y Trujillo (2018), desarrollaron un trabajo de investigación titulado, *Rendimiento de los estudiantes de 6° grado de primaria en la prueba FAB de resolución de tareas de alta y baja demanda cognitiva referidas a fracciones,* en la Pontificia Universidad Católica del Perú, con el objetivo de evaluar, recolectar y comparar datos sobre el rendimiento de los estudiantes en una prueba sobre fracciones, según género y niveles de demanda: alta y baja, a través de una prueba ad hoc denominada FAB (prueba de Fracciones de Alta y Baja demanda). La metodología asumida se enmarca en la investigación cuantitativa y de tipo descriptivo. El resultado se resume en que los estudiantes de la muestra seleccionada resuelven correctamente tareas relacionadas a fracciones de baja demanda cognitiva, es decir, tareas que requieren de procesos mecánicos y bajos niveles de conexión para su resolución. Sin embargo, no pueden resolver tareas referidas a fracciones de alta demanda cognitiva, las mismas que implican el uso de conexiones, uso de diversas estrategias matemáticas y comprensión del problema. Y por último concluyen que, la carencia de experiencias matemáticas retadoras y de alto impacto que le permitan al estudiante usar todos los medios para resolver un problema, estableciendo conexiones y relaciones diversas, son las principales causas.

2.1.2 A nivel local

No se ha encontrado referencia alguna respecto a las variables de investigación.

2.2 Bases teóricas

2.2.1 La teoría de la representación semiótica de Raymond Duval

La teoría de registros de representación semiótica ha sido desarrollada por Raymond Duval, filósofo y psicólogo de formación. Trabajó en el Instituto de Investigación en Educación Matemática (IREM) de Estrasburgo, en Francia (Morales, 2013, p. 1040). Trayectoria profesional que le sirvió para dar pie a su teoría sobre los registros de representaciones semióticas, en el texto “Semiosis y Pensamiento Humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales”, publicada en 1995; además de otras publicaciones posteriores.

En principio, a qué se refiere Duval cuando utilizó el término “semiótica”. Se refiere a los diferentes sistemas de signos que permiten la representación de objetos matemáticos, la forma de cómo funcionan y también de cómo se trabajan con ellas. Porque según planteaba, la actividad matemática,

> ... a diferencia de las otras áreas científicas (la astronomía, la geología, la química, la biología…) los objetos de conocimiento (los números, las funciones y sus propiedades…) no son accesibles físicamente, a través de evidencias sensoriales directas o mediante el uso de instrumentos. La única forma de acceder y trabajar con ellos es a través de signos y representaciones semióticas (Duval, 2006a, p.157).

Debemos entender en sentido amplio de la palabra que los signos constituyen un registro, tales como símbolos, trazos, íconos, etc. y que éstos están organizados de manera interna y externa; de manera interna, según las particularidades del contexto y de pertenencia a un campo semántico determinado, y de manera externa, según las normas para formular expresiones o configuraciones, propias al campo semántico. En consecuencia, los registros son medios de expresión y de representación caracterizados precisamente por sus respectivos sistemas semióticos (Guzmán, 1998, p. 6).

Como señala Duval, las matemáticas son un campo disciplinar que tiene su particularidad en el uso de representaciones semióticas, en el que se puede utilizar una amplia gama de sistemas semióticos, desde los más comunes a cualquier campo del saber humano, como el lenguaje cotidiano, hasta aquellos sistemas inherentes a las matemáticas como signos aritméticos, algebraicos, y expresiones rigurosamente formales. Verbigracia, una notación convencional (letras en geometría, símbolos en álgebra), un discurso, un texto, un gráfico, un dibujo, etc. Sin embargo, el mismo autor puntualiza que el uso de signos no solo se limita a representar los objetos matemáticos, sino principalmente a trabajar en y con ellos, reemplazando unos signos por otros. Y cambiar de un sistema semiótico a otro significa cambiar el contenido de representación sin cambiar las propiedades matemáticas representadas. Precisa que los sistemas semióticos se utilizan para operar, por lo tanto, sino hay mediación semiótica no hay actividad matemática, para que se desarrolle la comprensión matemática debe movilizarse diversas representaciones, que se elijan y usen de manera interactiva o simultánea, es decir, que los estudiantes tengan la capacidad de relacionar diversas formas de representación de los objetos o contenidos matemáticos (2006a, p. 158).

Sobre las representaciones semióticas, siguiendo el discurso de Duval, Tamayo (2006) manifiesta que, hacen referencia a todas aquellas construcciones de sistemas de expresión y representación que pueden incluir diferentes sistemas de escritura, como números, notaciones simbólicas, representaciones tridimensionales, gráficas, redes, diagramas, esquemas, etc. Cumplen funciones de comunicación, expresión, objetivación y tratamiento (p. 41).

Las representaciones semióticas son externas, son elaboradas por el hombre y que implican el uso de signos como parte de un sistema de representación, asumiendo ciertas particularidades sobre la significación y su funcionamiento. En otras palabras, son medios que disponen y pueden ser usados por los individuos para exteriorizar sus representaciones mentales, es a través de esos signos que expresamos lo que hemos representado internamente. Además, estas representaciones sirven como medios de producción de conocimientos, debido a que, cuántas más representaciones haga el individuo sobre un mismo objeto o evento, el conocimiento se enriquece y se acrecienta su utilidad, es decir, va mejorando, ampliando o profundizando la comprensión del objeto o evento de estudio.

Por ello Duval, planteaba dos requisitos necesarios para desarrollar toda actividad matemática: "I. Las representaciones semióticas deben ser usadas necesariamente, incluso si se elige el tipo de representación semiótica. II. Los objetos matemáticos representados nunca deben confundirse con el contenido de las representaciones semióticas utilizadas" (Duval, 2006, p.157).

Siguiendo esta línea de explicación Oviedo, Kanashiro, Bnzaquen y Gorrochategui aseveran que:

> los conceptos matemáticos no son objetos reales y por consiguiente se debe recurrir a distintas representaciones para su estudio y para llevarlo a cabo resulta importante tener en cuenta que las mismas no son el objeto matemático en sí, sino que ayudan a su comprensión. Si no se distingue el objeto matemático (números, funciones, rectas, triángulos, etc.) de sus representaciones (escritura decimal o fraccionaria, gráficos, trazados de figuras, etc.) no puede haber comprensión en matemática (2012, p.30).

En consecuencia, los objetos matemáticos tienen diferentes registros de representación, tales como: registro verbal, registro tabular, registro gráfico, registro algebraico, registro simbólico y registro figural (Hernández, Cervantes, Ordoñez y García, 2017, p. 5), quienes citan a Brojón (2015) que precisa que, se ha adquirido un concepto determinado, cuando se es capaz de transitar entre por lo menos dos diferentes representaciones semióticas del concepto mismo, en otras palabras, si y solo si, la transición de un registro a otro, de por lo menos entre dos registros diferentes, garantiza la adquisición o comprensión del concepto o contenido matemático.

Debemos precisar que para Duval, y tal como refieren otros estudiosos "no existe noética sin semiótica" (Camargo, 2013; Oviedo, Kanashiro, Bnzaquen y Gorrochategui, 2012; D'Amore, 2001). Castro, Gonzalez, Flores, Ramírez, Cruz y Fuentes (2017) citando a Duval expresan que:

> En la teoría de registros de representación semiótica, a la actividad ligada a la producción de una representación se le llama semiosis, mientras que a la aprehensión conceptual de los objetos matemáticos se le denota como noesis. Un registro de representación debe permitir las tres actividades cognitivas ligadas a la semiosis. Esto es, la formación de una representación identificable, tratamiento y conversión. La primera actividad está relacionada con la expresión de una representación mental: "las representaciones semióticas no solo son indispensables para fines de comunicación, sino que también son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática misma" (Duval, 1999, p. 5). Mientras que, las otras dos actividades están relacionadas con la transformación de las representaciones en otras representaciones. El tratamiento es una transformación interna, es decir, es la transformación de la representación en el mismo registro en el que está dada, por otro lado, la conversión es una transformación externa, o sea, es la representación en un registro distinto al registro en el que fue dada.

Siendo las "transformaciones" uno de los conceptos fundamentales en el planteamiento de las representaciones semióticas, requiere un abordaje aparte.

2.2.2 Los dos tipos de transformaciones de representaciones semióticas

En el aprendizaje de la Matemática, el uso y acceso a las representaciones semióticas, son indispensables y cruciales, ya que permite la adquisición y comprensión de un contenido matemático, producto de las transformaciones que podemos realizar con ellas, los tratamientos y conversiones.

Duval considera que ambos tipos de transformaciones semióticamente van separadas y que su funcionamiento es diferente e independiente. En el desarrollo de cualquier actividad matemática, se movilizan de manera paralela o a veces alternada, de manera explícita o a veces implícita, pero siempre están presentes. Lo que podría sintetizarse en la siguiente frase: las dos formas de transformaciones "yacen en el corazón de la actividad matemática" (2006b, p.80).

Duval en el artículo denominado Transformations de representations semiotiques et demarches de pensee en mathematiques, presentó el siguiente gráfico para explicitar en qué consiste la conversión y el tratamiento, que parece muy didáctico para su fácil comprensión:

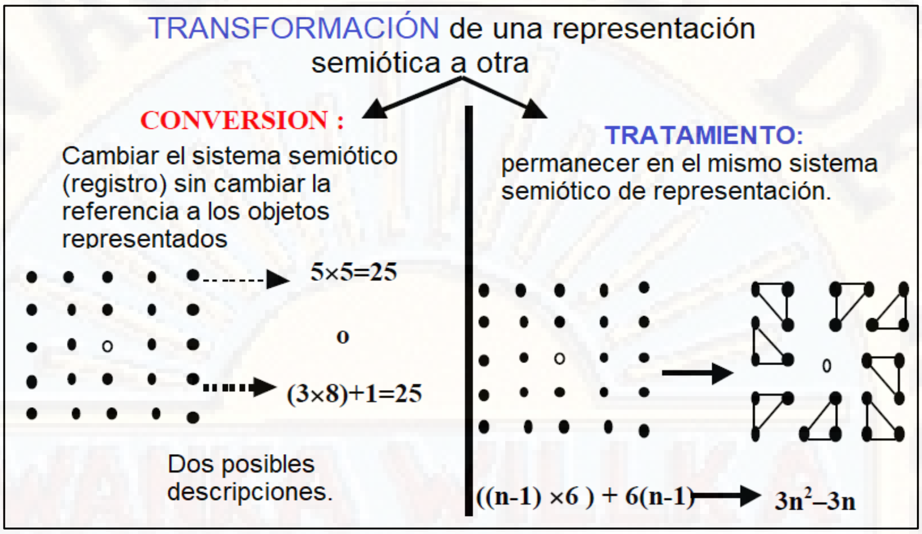


Figura 4. Los dos tipos de transformación semiótica.
Fuente: *Dos tipos de transformaciones de representación, cognitivamente heterogéneas.* Duval (2006b, p.80)

De la interpretación de este gráfico, podemos manifestar que, si bien se pueden utilizar simultáneamente, son totalmente diferentes, pero que están estrechamente relacionados.

2.2.2.1 La conversión

La conversión es una de las formas de transformar la representación de objetos, eventos, informaciones o relaciones, consiste en cambiar la representación de objetos matemáticos de un sistema semiótico a otro registro de representación, sin cambiar los objetos matemáticos (Oviedo, et al., p. 32). Es una transformación externa que realizamos a la representación inicial, para ello se requiere seleccionar la información o datos importantes que permitan una nueva representación o representación final, consecuentemente reorganizarlos para su tratamiento.

Para una mayor y mejor comprensión de lo expuesto, se recurre a lo ejemplificado por Duval.

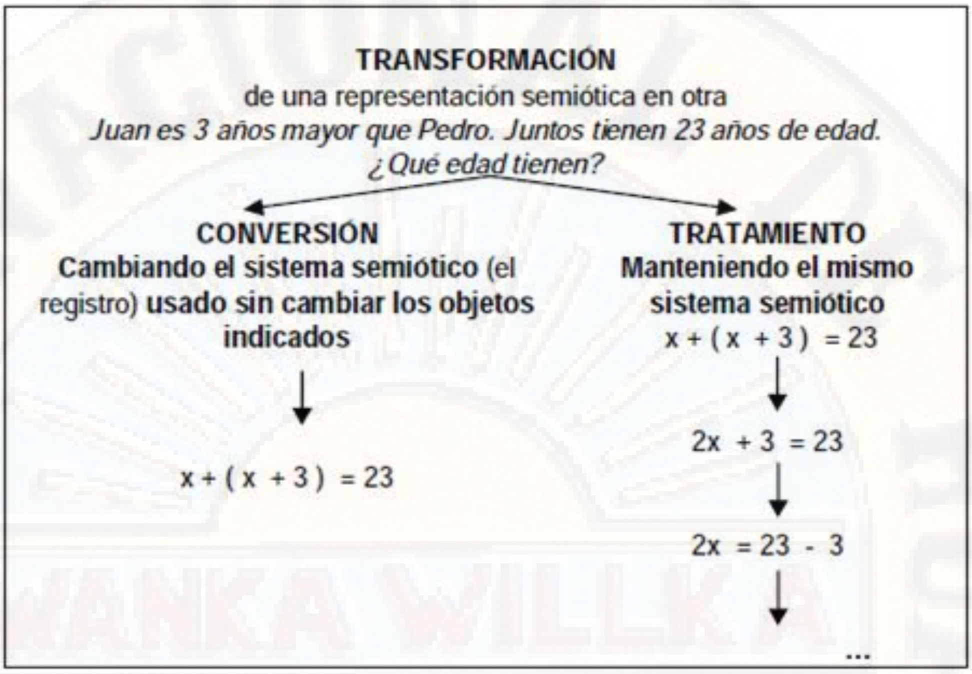


Figura 5. Un ejemplo de transformación semiótica
Fuente: Los dos procesos cognitivos fundamentales del pensamiento. Duval (2006b, p.146)

En este ejemplo se puede distinguir, que el problema está presentado en lenguaje natural, que sería el registro semiótico inicial, pero que luego es convertido a un lenguaje algebraico, lo que vendría a ser el registro final, luego el tratamiento es en registro algebraico También se debe notar que, la edad de Pedro está definido con la variable X, a partir del cual se define la edad de Juan. A decir de Duval, el paso de una representación discursiva (verbal o numérica-simbólica) a una representación no discursiva muy a menudo representa un salto representacional (2016b, p. 82).

Este proceso de conversión ha sido producto de la comprensión de la situación matemática, sin la cual sería imposible realizar cualquier tipo de representación y transformación, en ocasiones se requiere realizar más de una conversión para comprender el objeto matemático. Por ello, Duval (2006a, p. 149) refería que "al parecer que la conversión es un proceso cognitivo más complejo que el tratamiento" y "que puede ser considerada como el umbral de la comprensión".

La conversión según Duval tiene dos características cognitivas, primero, que está orientado y no es reversible, significa que existe una conversión directa y otra inversa, que generalmente son diferentes, que se puede realizar una transformación de un registro inicial a otra final o de llegada, pero que a partir de esta no necesariamente vamos a encontrar o volver a la representación inicial. Segundo, que la correspondencia entre la representación inicial y la de llegada se basan en las unidades relevantes de sus propios contenidos y no en el objeto representado por las dos representaciones. En términos más generales, a partir de una representación de llegada, no necesariamente encontramos la representación inicial y las operaciones para volver a una de las representaciones iniciales posibles no son las mismas que permitieron la conversión directa (2016b, p. 82).

A continuación, se expone un gráfico para ejemplificar la conversión en situación de las fracciones, en base a algunos ejemplos planteados por D'Amore (2001) y Oviedo, Kanashiro, Bnzaquen y Gorrochategui. (2012)

REGISTRO SEMIÓTICO		
Lenguaje natural o común	**Lenguaje aritmético**	**Lenguaje gráfico**
Un cuarto	$\frac{1}{4}$ (escritura fraccionaria)	
La mitad de la mitad	0,25 (escritura decimal	

CONVERSIÓN: PASAR DE UNA REPRESENTACIÓN A OTRA

Figura 6. Ejemplos de conversión
Fuente: Elaboración propia

La importancia de realizar las transformaciones por conversión, tal como señalan Hernandez, Cervantes, Ordoñez y García (2017) radica en que:

> Un aprendizaje centrado en la *conversión* de las representaciones y por ende en la coordinación de diferentes tipos de registros semióticos produce *una comprensión efectiva e integradora*, que posibilita la transferencia de los conocimientos aprendidos y genera resultados positivos en las macro-tareas de producción y comprensión como lectura y resolución de problemas (Egret, 1989; Duval, 1991, citados en García & Perales, 2016).

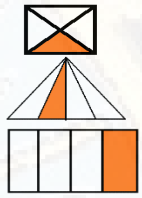
2.2.2.2 El tratamiento

El tratamiento es otra forma de transformación de una representación semiótica de una situación, cuestión, evento u objeto, que consiste en transformar una representación inicial a otra representación (de llegada o final) pero en el mismo registro, teniendo en cuenta su naturaleza y sus propias reglas. En otros términos, podemos decir que, se refiere a todas las múltiples manipulaciones que se puede hacer de un tipo de representación o de la información que ella contiene, pero manteniendo el mismo registro semiótico (Duval, 2016a; Duval, 2016b; Duval, 2009). Así lo entienden Oviedo y colaboradores, cuando señalan que, “El tratamiento de una representación es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formulada…” (2012, p.32); o lo que señala Tamayo (2006, p.41), “tratamiento, cuando una transformación produce otra dentro de un mismo registro”

Por ejemplo, del tratamiento de un sistema en lenguaje natural sería posible enunciarlo parafraseando o reformulándolo, y si fuera un registro gráfico sería expresarlo de manera circular, rectangular, etc.

Duval señala que, los tratamientos dependen de las posibilidades de transformación específicas del registro de representación utilizado. Por lo tanto, los diferentes registros de representación no ofrecen las mismas posibilidades de tratamiento (2006, p.82). En ese sentido, las representaciones numéricas (que son las más sencillas, puras y poderosas), así como las representaciones icónicas tienen sus propias posibilidades y limitaciones de transformación, porque no tienen la misma naturaleza.

A continuación, se formula un ejemplo de tratamiento respecto a las fracciones, teniendo en cuenta algunos ejemplos planteados por D’Amore (2001) y Oviedo, Kanashiro, Bnzaquen y Gorrochategui (2012).

REGISTRO SEMIÓTICO		
Lenguaje natural o común	**Lenguaje aritmético**	**Lenguaje gráfico**
Un cuarto	$\frac{1}{4}$ (escritura fraccionaria)	
La mitad de la mitad	0,25 (escritura decimal	

TRATAMIENTO

Figura 7. Ejemplos de tratamiento semiótico.
Fuente: Elaboración propia.

Finalmente parafraseando a Duval se puede decir que, la conversión y el tratamiento permiten la comprensión de un contenido matemático, en suma, permiten el aprendizaje de la matemática, producto de la coordinación de dos a más registros de representación en toda actividad matemática, que, como resultado de la ejercitación intencional, práctica y permanente se hará de manera rápida y espontánea.

Camargo (2013) afirma que no bastará con presentar o proponer actividades que apunten a la aprehensión o tratamiento de registros, sino que necesariamente deben implicar conversión, pues no existirá comprensión si no se maneja al menos dos registros semióticos diferentes del mismo concepto. (p.1844). Por lo tanto, las sesiones de aprendizaje, diseñadas para que el docente exponga la materia, para que el docente dicte y los estudiantes copien, para que el docente enseñe un procedimiento o la aplicación de una fórmula y los estudiantes repliquen el procedimiento realizado, etc. solo aleja a los estudiantes de la comprensión matemática y del aprendizaje de la Matemática.

En esos términos, Tamayo (2006) expresa lo siguiente:

> Parece necesario que, en el proceso de construir estas representaciones semióticas, una de las funciones principales de los maestros, sino la más importante referida al proceso de enseñanza-aprendizaje, es la de hacer evidente a sus estudiantes los procesos de transformación y de

conversión que se requieren para el paso de una representación a otra (p. 47).

2.2.3 Formas de representación matemática de Marshall, Castro y Canty

Como antecedente de esta propuesta metodológica, tenemos que el Ministerio de Educación (2015a), en Rutas de Aprendizaje considera que el estudiante debería comunicar el significado de las ideas matemáticas y expresarlas de forma oral y escrita usando el lenguaje matemático y diversas formas de representación con material concreto, gráfico, tablas y símbolos, y transitando de una representación a otra. Y que, las ideas matemáticas adquieren significado cuando se usan diferentes representaciones y se es capaz de transitar de una representación a otra, de tal forma que se comprende la idea matemática y la función que cumple en diferentes situaciones (p. 26). Y plantea que 5 deben ser las representaciones, según la adaptación de Discover strategier young math students in completently using multiple representations de Anne Marshall (2010), siendo éstas: vivencial, con material concreto, pictórica, gráfica y simbólica, que permiten lograr la capacidad de comprender las ideas matemáticas y expresarlas de forma oral y escrita.

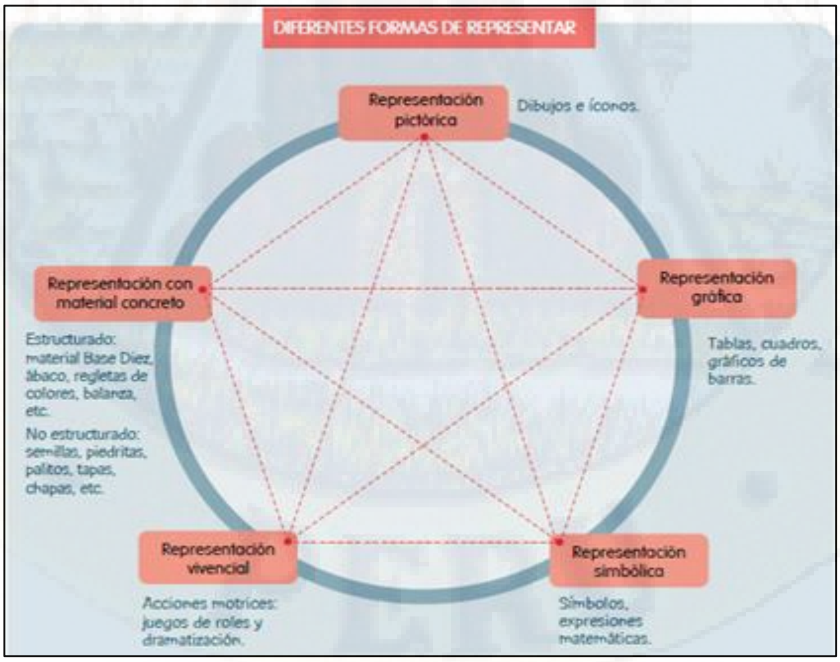


Figura 8: Diferentes formas de representación matemática.
Fuente: Ministerio de Educación (Rutas del Aprendizaje, 2015a)

Sin embargo, Marshall, Castro y Canty originalmente plantearon la siguiente figura para sustentar su propuesta pedagógica.

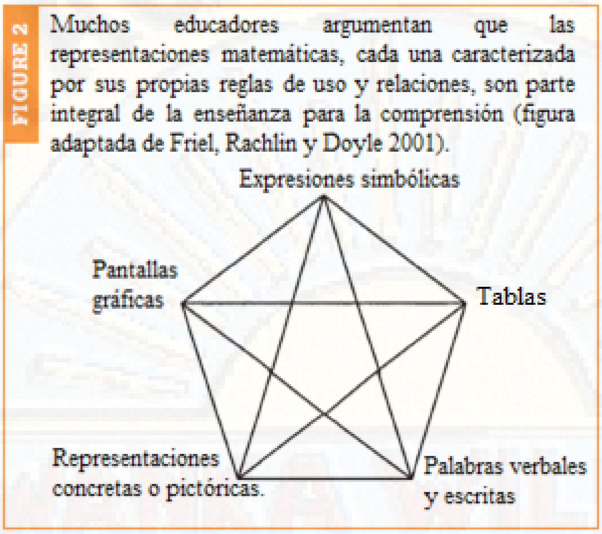


Figura 9. Las representaciones matemáticas.
Fuente: Marshall, Castro y Canty (2010, p.40).

Las representaciones matemáticas son palabras, imágenes, dibujos, diagramas, pantallas gráficas y expresiones simbólicas (p.40), inclusive las representaciones concretas, tal como se observa en la figura presentada. “Cada categoría se caracteriza por sus propias reglas de uso y relaciones” (Marshall et al., p. 40).

Como se observa en los dos cuadros anteriores, y haciendo una comparación, se entiende que el Ministerio de Educación ha hecho una adaptación de la propuesta planteada por las investigadoras. En el presente trabajo de investigación se asume la propuesta del Ministerio de Educación (2015, p. 26-27), lo que se pasa a describir brevemente:

Representaciones simbólicas, significa expresar, operar o trabajar con ideas matemáticas utilizando números, variables y otros símbolos. Es una representación abstracta.

Representaciones concretas, implica el uso de objetos concretos para manipular, mostrar, expresar, operar o trabajar ideas matemáticas (verbigracia, palitos, piedritas, Base Diez, regletas de colores, cubos).

Representaciones gráficas (pantallas gráficas, tablas), permite ilustrar, exponer, o trabajar las ideas matemáticas utilizando gráficos diversos, diagramas, tablas, imágenes, rectas numéricas y otras.

Representaciones pictóricas, se refiere a la diversidad de dibujos que podemos hacer de los objetos, son relativamente simples, permiten abstraer los significados o contenidos matemáticos, hacer explícito lo que no necesariamente es evidente.

Representaciones vivenciales, son todas aquellas acciones que podemos realizar de manera objetiva, con la intervención de los propios estudiantes, representando situaciones y realizando acciones, asumiendo roles, compartiendo reglas, etc. Situaciones y acciones con contenido matemático, el propósito es que los estudiantes vivencien con su cuerpo y sus sentidos experiencias matemáticas o experiencias con contenido matemático.

Empero, sobre la propuesta de las estudiosas norteamericanas, debemos rescatar la representación por medio de la palabra, ya que la propia experiencia en el desarrollo experimental de la investigación ha quedado demostrada su importancia y utilidad. Y que en la propuesta del Ministerio de Educación señala que estas diversas representaciones finalmente permiten la capacidad de expresar las ideas matemáticas de forma oral y escrita.

Las palabras, son representaciones verbales o escritas, se utiliza el lenguaje (palabras) para comunicar, interpretar, argumentar, definir o describir ideas, contenidos o situaciones matemáticas.

Sin embargo, más allá del planteamiento de las múltiples formas de representación, es necesario destacar cuál es el trasfondo de la propuesta. Así por ejemplo señalan que, (Marshall, et al, 2010) traducir, transitar o movilizarse con flexibilidad entre las diferentes representaciones es un aspecto sustancial para la comprensión de las matemáticas. Generar oportunidades para que los estudiantes hagan conexiones entre representaciones múltiples permitirá que las matemáticas sean significativas, y pueda ayudarlos a entender, que un contenido matemático es una red de ideas interconectadas, más allá de una simple colección de procedimientos, reglas o fórmulas arbitrarias y no conectadas. Brindarles oportunidades para que utilicen representaciones para comunicar o expresar ideas matemáticas, para que seleccionen apliquen y transiten entre representaciones matemáticas, así como para modelar e interpretar contenidos matemáticos.

Señalan que, un aspecto importante del desarrollo de una sólida comprensión de las matemáticas es no solo saber cómo usar una representación en situaciones de resolución de problemas, sino también poder hacer conexiones entre representaciones (Marshall et al., 2010, p.40).

Marshall y colaboradoras asumen que su investigación se sustenta en otros estudios (Janvier 1987, Knuth 2000, Lesh, Post y Behr 1987, Lesh, Landau y Hamilton 1983, Novick 2004). Consideran que la traducción son todos los procesos inmersos en el paso de una representación a otra, que dicen es una habilidad muy compleja ya que requiere el conocimiento de las representaciones que se hagan uso. Y que la traducción necesita conocimiento sobre las relaciones entre los diferentes tipos de diagramas que permiten a los solucionadores de problemas traducir la información de una representación a otra, de modo que la nueva representación conserve la información estructural transmitida por la representación original (Novick citado por Marshall, Castro y Canty, p.40). Y que la traducción coadyuvaría al desarrollo de la competencia representativa, que es muy compleja, porque implica saber cómo y cuándo utilizar las representaciones matemáticas de manera intencional, seleccionar las representaciones, pero también saber cómo y cuándo son más pertinentes y útiles, y que los conocimientos adquiridos o construidos durante y producto de la traducción servirá de base para el aprendizaje y comprensión de la matemática.

Marshall, Castro y Canty consideran:

> Tres estrategias de instrucción específicas crean oportunidades que pueden apoyar el desarrollo de la competencia de representación de los estudiantes: • Participar en el diálogo sobre las conexiones explícitas entre representaciones. • Alternancia de direccionalidad de las conexiones realizadas entre representaciones. • Fomentar la selección intencional de representaciones (p. 40).

Según las autoras estas estrategias harán que los estudiantes vayan desarrollando su experticia, haciéndose más precisos y flexibles para resolver problemas utilizando las diversas representaciones que elijan. El diálogo, mediante el cual los estudiantes puedan identificar y comparar las características de las representaciones, es decir, no solo expresarlo, sino elaborar y profundizar ideas, argumentar el porqué de sus representaciones, hacer explícita algunos contenidos en la representación y en las conexiones que se establezcan con otras representaciones. La direccionalidad alternativa, considerando que la direccionalidad es otra característica de la competencia representativa, implica movilizarse con flexibilidad de una a otras representaciones, de ida y vuelta, estableciendo conexiones adecuadas y significativas, inclusive alternando los tipos de representaciones, no siempre siguiendo una secuencia lineal de representación. La selección intencional, tiene que ver con que los estudiantes deban saber elegir una o más representaciones teniendo en cuenta las ventajas y desventajas, costos y beneficios asociados a una representación para una situación determinada, comprender el propósito de uso de una representación en una situación particular, considerando que algunas representaciones permiten destacar conceptos o contenidos matemáticos o las características inherentes a estos, es decir, ver la conveniencia de utilizar una u otra representación, por motivos de eficiencia, facilidad de uso, pertinencia al contexto, precisión o preferencia del estudiante (Marshall et al., p.46).

Finalmente se expresa lo que señalaron como conclusión de su investigación de estudio de casos:

> Los estudiantes deben tener oportunidades frecuentes no solo para aprender a usar y trabajar con representaciones en la clase de matemáticas, sino también para traducir entre representaciones. Las oportunidades suficientes les ayudan a ver las matemáticas como una red de ideas conectadas. Al brindar tales oportunidades, los maestros deben involucrar a los estudiantes en el diálogo sobre las representaciones y las relaciones entre ellos para ayudar a desarrollar la competencia representativa de los estudiantes, un aspecto importante de la comprensión matemática (Marshall et al., 2010, p.46).

2.2.4 Definición de fracción

Freudental (1983) expresa que:

> uno puede preferir la forma $\frac{2}{3}$, y, en general, para cada número racional, la expresión por medio de una fracción en la que numerador y denominador tienen máximo común divisor 1, la fracción simplificada; como se prefiere para el número 5 la expresión 5 antes que 3+2, 10-5, etc., aunque las otras son igualmente admisibles. Hay, de todos modos, una diferencia: “5” no es sólo el nombre preferido del número 5, es el primer nombre, el nombre con el cual me ha sido presentado, y bajo el cual lo conocí, mientras que “3+2” y “10-5” son alias con los cuales lo puedo llamar también. Sin embargo, 2/3, es sólo el nombre más simple de cierto número racional, e incluso yo no podría decir de muchos números racionales bajo qué nombre los conocí por primera vez. Ésta es la razón, pues, por la que las distintas expresiones fraccionarias del mismo racional viven mucho más sus propias vidas, y por la que se las conoce con un nombre especial: fracción (p. 2).

Asimismo, precisa que, las fracciones son el recurso fenomenológico del número racional – una fuente que nunca se seca. “Fracción” —o lo que le corresponda en otras lenguas— es la palabra con la que entra el número racional, y en todas las lenguas que conozco está relacionada con romper: fracturar. “Número racional” evoca asociaciones mucho menos violentas: “racional” está relacionado con “razón”, no en el sentido de la razón sino en el de proporción, de medida —un contexto aprendido y mucho más aprendido que “fracción” (p. 2).

El mismo Freudenthal precisa que “las fracciones se presentan si un todo ha sido o está siendo rajado, cortado, rebanado, roto, coloreado, en partes iguales, o si se experimenta, imagina, piensa, como si lo fuera” (p. 9).

Por otro lado, Fazio y Siegler (2011) aseveran que,

> las fracciones a menudo se enseñan utilizando la idea de que representan parte de un entero. Por ejemplo, un cuarto es una parte de un entero que fue dividido en cuatro partes. Esta interpretación es importante, pero no logra transmitir información vital que indica que las fracciones son números con magnitudes. Como tal, las fracciones pueden ser ordenadas de menor a mayor o tener un valor equivalente (1/2 = 2/4 = 3/6). Los niños que sólo comprenden una parte del enfoque de las fracciones a menudo cometen errores, como decir que 4/3 no es un número por que una persona no puede recibir cuatro partes de un objeto que es dividido en tres partes. El error común de intentar sumar

fracciones agregando primero los numeradores y luego los denominadores se debe, en parte, a no entender que las fracciones son números con magnitudes. El confiar solamente en una comprensión parcial de las fracciones, a menudo deja a los niños confundidos en cuanto al significado de las fracciones mayores a 1 y al significado de las fracciones negativas (p.10).

También Pruzzo (2012) manifiesta que,

En la actualidad, se ha concebido que para que el niño consiga una comprensión amplia del concepto de fracción se le deben plantear experiencias con la mayoría de las interpretaciones mencionadas (hace referencia a la fracción como razón y la fracción como operador). Además, dentro de cada una de ellas se introducen múltiples construcciones conceptuales. Así, por ejemplo, se enseña simultáneamente la fracción como relación parte-todo: a.- en cantidades continuas (entendidas como superficies: torta, campo, pizza, etc., pero también como líquidos: agua, leche, jugos; y en este sentido entra a jugar el concepto de medida de capacidad, pero no sólo usando la unidad convencional (litro), sino haciendo medir los líquidos con vasos u otros recipientes) y b.- en cantidades discretas, (como objetos, bolitas, caramelos, etc.). Pero, además, empleando también medidas de peso (1 Kg de papas, naranjas, etc.) (p. 6).

En forma genérica la fracción es un número racional, ya que puede representarse como el cociente de dos números enteros, y en su expresión común, en el denominador siempre diferente al cero. Siendo su representación fraccionaria a/b, donde a y b son enteros y b≠0 (Quispe, 2011, p. 13).

Por lo tanto, las fracciones son consideradas un modelo general de los números racionales, por ello, están relacionados con los porcentajes, los decimales, las razones y las tasas.

2.2.5 Fracción como parte-todo

Freudental (1983) manifiesta que:

…enfocar las fracciones desde el punto de vista de “parte–todo” es algo bastante limitado no sólo fenomenológicamente sino también matemáticamente —este enfoque produce sólo fracciones propias. La didáctica tradicional de la aritmética se limita a este enfoque, mayoritariamente incluso en el sentido restringido de la división del pastel. Tras estas divisiones concretas del pastel —en fracciones propias sólo— se introduce inmediatamente al estudiante en la división abstracta

> de cantidades y valores de magnitudes presentados abstractamente; con decretos arbitrarios como “1/2 vez significa lo mismo que 1/2 de”, y con reglas aritméticas se aplana un camino recto hacia el número racional. Algunos innovadores insertaron un nivel de operadores fraccionarios como inversos a los operadores multiplicativos (p. 14).

Kieren (1980) citado por Gómez y Perez (2015) considera la relación parte-todo como un todo continuo o discreto subdividido en partes iguales, indicando como fundamental la relación que existe entre el todo y un número designado de partes. Esta relación parte-todo sirve de base para la construcción de los otros enfoques. Haciendo referencia al enfoque de la fracción como operador y como medida, el cual expone en su artículo, debido a que según refieren son los “constructos más utilizados”.

También Perera y Valdemoros (2009) refiriéndose a Thomas Kieren (1983) dice que, este autor reconoce varios constructos intuitivos (medida, cociente, operador multiplicativo y razón), en los que subyace el conocimiento de la fracción. Además, identifica un quinto constructo intuitivo: la relación parte-todo que sirve de base para la construcción de los otros cuatro citados anteriormente (p.33). Aspecto que se tuvo en cuenta para realizar la presente investigación.

Salazar (2011) considera que una fracción parte-todo, se da en situaciones en las que un todo, ya sea éste continuo o discreto, ha de ser dividido en partes equivalentes. El todo es designado como la unidad y la fracción expresa la relación que existe entre el número de partes y el número total de partes en que ha sido dividido el todo (p. 4).

Finalmente, Gomez y Pérez (2016), relacionando el aprendizaje de las fracciones con las representaciones asevera en una de sus conclusiones que:

> En el momento en que los estudiantes experimentan que varias representaciones, por ejemplo, física, verbal, numérica, pictórica y gráfica de los números racionales se interrelacionan, su comprensión aumenta en la medida en que comprueban cómo están conectadas, pues es así como los estudiantes aprenden a comunicarse de diferentes maneras relacionando activamente materiales físicos, imágenes y diagramas con ideas matemáticas, a través de la práctica reflexionan sobre ellas y clarifican su propio pensamiento, estableciendo relaciones entre el lenguaje cotidiano con ideas y símbolos matemáticos, y también

mediante las discusiones matemáticas que a diario se dan con sus compañeros dentro de las clases.

Lizarde (2014) entiende además que, en este sentido, partes equivalentes o partes congruentes en que se divide una unidad y de ahí considerar alguna o algunas, es lo que define este subconstructo, refiriéndose a las fracciones como parte-todo. Además, sugiere que para su comprensión se requiere que los estudiantes desarrollen:

- La comprensión de “unidad divisible” y qué unidad se considera en cada caso concreto. - La conservación del área, para el caso de las representaciones gráficas. - La comprensión de la equitatividad y la exhaustividad, es decir que las partes en que se divida el entero sean congruentes y que además no sobre nada. - La comprensión de que, después de haber realizado el reparto, la integración de las partes vuelve a completar el entero (p. 50).

Piaget, Inhelder y Szeminska (1960, 24) citados por Ruiz (2013) consideran que la noción de fracción desde la relación parte-todo, se fundamenta en siete atributos básicos:

a. Un todo está formado por elementos separables.

b. La unidad “todo” se puede dividir en un número de partes determinado.

c. La reunión de todas las partes forman la unidad “todo”.

d. El número de partes no es igual al número de cortes.

e. Las partes iguales, deben ser congruentes.

f. Las partes se pueden considerar a su vez como unidad “todo”.

g. La unidad “todo” se conserva.

El mismo autor refiere que en el abordaje de las fracciones como parte-todo, se tiene como unidad una forma continua, pero también se puede tener como un “todo”, una unidad discreta, por ejemplo, un grupo de 17 canicas, de 30 palitos, de 40 estudiantes, etc.

2.2.6 Dificultades, errores y obstáculos en el aprendizaje de las fracciones

2.2.6.1 Dificultades

Muchos estudios a nivel mundial han demostrado la complejidad del abordaje de las fracciones, así como las dificultades que implican su aprendizaje (Pruzzo, 2012; Fazio y Siegler 2011; Freudenthal, 1983; Sanchez, 2011; Kieren, 1980; y otros) los que deben ser tomados en cuenta en el proceso de investigación.

En cuanto a las dificultades de aprendizaje, pueden tener varias causales, complejidad del concepto matemático, el método o estrategia con el que se enseña o aprende, con las experiencias previas del estudiante, inclusive con la misma predisposición del que aprende. A decir de Socas (1997) citado por Quispe (2011), las dificultades están asociadas a la complejidad de los objetos de las matemáticas. (…) es que la matemática utiliza una simbología acompañada de lenguaje habitual. El lenguaje natural ayuda a interpretar los símbolos, sin embargo, en esta función del lenguaje se detecta dificultades de comprensión y comunicación de los objetos matemáticos (p.45).

Ríos (2007), refiere que muchos autores coinciden que las dificultades de su aprendizaje se deben a las diversas representaciones (acepciones, interpretaciones, concepciones, constructos) que admite este concepto. Entre estas acepciones tenemos: la de parte todo (área), subconjunto (razón), reparto (división indicada), cociente, operador, número racional y decimal entre otros (p.127).

Además, concluyen que es necesario el aprendizaje de las diferentes acepciones de la fracción, porque todos los problemas matemáticos y de la vida real no son posibles de solución mediante una sola forma de representación, sino requieren de unas y otras.

Ríos (2007) considera que,

> Además, el conocer y aplicar varias representaciones permitirá al alumno desarrollar procesos mentales tales como la comparación, análisis, síntesis y planteamiento de inferencias, procesos que son indispensables en el razonamiento matemático. (…) Para entender algún

> concepto matemático o cualquier otro, primeramente, el alumno debe hacer representaciones del mismo. No obstante, las que se construyen en el sistema escolarizado, en muchas oportunidades, son producto de las experiencias previas del alumno y/o son el resultado de la combinación de estas con las experiencias vividas en el aula (p. 121).

Desde otra perspectiva Martinez y Lascano (2001) en un estudio realizado pudieron identificar que dos son las dificultades frecuentes en la enseñanza y aprendizaje de las fracciones, y que tienen que ver con considerar las partes como totalidad y el reconocimiento de las subdivisiones equivalentes. Concluye que se debe

> "… tener en cuenta que una de las dificultades relevantes para reconocer subdivisiones equivalentes puede ser que el significado de los números está conectado a cantidad de elementos, dado que los estudiantes tienen como referente el universo de los números naturales, y en la fracción para simbolizar cantidad hay que utilizar dos números que representan la relación entre la parte y el todo" (p. 176).

Asimismo, sugiere que "Una vez obtenidas fracciones a través de subdivisiones en las partes, se puede realizar conteo de fracciones unitarias para propiciar el reconocimiento de subdivisiones equivalentes" porque los estudiantes tienen la dificultad de establecer equivalencias entre fracciones- por ejemplo - 3/6 es equivalente a 1/2, que 2/6 es equivalente a 1/3. Finalmente concluye que las ideas anteriores permiten decir que al parecer los dos atributos están relacionados y que habría que trabajarlos simultáneamente (p. 177).

Pruzzo (2012) en su estudio considera que las dificultades halladas y que obstaculizan el aprendizaje de las fracciones se debe en gran medida a las prácticas de enseñanza, los datos empíricos están sosteniendo nuestra hipótesis acerca de que la enseñanza irrelevante, que no sigue las construcciones de los alumnos por la evaluación continua y longitudinal, provoca lagunas de aprendizaje y errores conceptuales que pueden, por eso mismo, ser revertidos (p. 9). Y los aspectos identificados en su estudio tienen que ver con la noción parte-todo y la comparación de fracciones. Sustenta sus estudios en otras investigaciones y expresa que, no sólo el significado de la palabra fracción, en todas sus interpretaciones, es complejo. También es complejo el subconstructo relación parte-todo, la fracción indicando 'la relación entre un número de partes y el número total de partes (que puede estar formado por varios todos)' (Llinares y Sánchez, 1997, p. 55). El aprendizaje de este concepto implica el desarrollo de distintas habilidades: Tener interiorizada la noción de inclusión de clases (según terminología de Piaget); la identificación de la unidad (que todo es el que se considera como unidad en cada caso concreto); las de realizar divisiones (el todo se conserva aun cuando lo dividamos en trozos, conservación de la cantidad) y manejar la idea de área (en el caso de las representaciones continuas). (Llinares, Sánchez, 1997, citado por Pruzzo, pp. 6-7).

Pruzzo (2012) señala que respecto a la comprensión de la noción parte-todo, las dificultades halladas tienen que ver con que, los estudiantes, no pueden construir la representación elemental del número fraccionario (relación partes-todo), ni tampoco su expresión simbólica, en la que el denominador representa las partes en que está dividida la unidad y el numerador las partes que se toman (p. 7); parafraseando a la autora diríamos, mágicamente un chocolate se convertirá en ocho chocolates, una torta se convertirá en cuatro tortas. Mientras que, respecto a la comparación de fracciones, tienen dificultades en comparar, entre sí y con números naturales, fracciones… a través de distintos procedimientos; y sumar y restar cantidades expresadas con fracciones… utilizando distintos procedimientos y representaciones. (p. 9).

Entonces, otra de las dificultades para el aprendizaje de las fracciones es el inadecuado proceso de enseñanza, debido al desconocimiento de la naturaleza del contenido matemático, una deficiente preparación en su formación inicial docente, seguir la cultura tradicional de enseñar lo que me enseñaron o cómo me enseñaron, el abuso inmediato y prematuro de la representación simbólica, entre otros aspectos. Lo que requiere una reeducación de los maestros en este tema, la comprensión de los contenidos matemáticos y desarrollar un aprendizaje más constructivo, acorde a las características de los niños y niñas de la actualidad y también de acuerdo a los avances de la ciencia y tecnología.

Mateos (2008), identificó las siguientes dificultades en las operaciones con las fracciones:

a) Debido al conocimiento de los números naturales, no pueden diferenciar cuál de los números es más grande $\frac{1}{2}$ *o* $\frac{1}{5}$. Dificultad en la comprensión de la expresión del número fraccionario.

b) Diferencia de los números naturales que tiene un antecedente y un subsecuente, mientras que las fracciones no lo tiene; característica que confunde al niño y que puede pensar ¿qué número sigue a 1/3?

c) En la resolución de problemas. Los contextos de los problemas y las exigencias del conocimiento previo dificultan la comprensión del problema y su respectiva solución.

Otro causal para tener las dificultades de aprendizaje, es el poco o no uso de los materiales educativos, más teniendo en cuenta que el aprendizaje de las matemáticas requiere la presencia de experiencias vivenciales y concretas, porque no se puede aprender la expresión simbólica de un dígito solo por repetición, sino por una variedad de actividades de manipulación de materiales, observaciones concretas, la experiencia sensorial de contar, eso mismo, debe suceder en el aprendizaje de las fracciones. Pero, qué materiales y en qué situaciones los estudiantes han utilizado materiales educativos para aprender las fracciones, cuáles han sido sus experiencias concretas para aprender la noción de una fracción. La respuesta a estas preguntas, seguramente expresarían las dificultades de aprendizaje de las fracciones que tienen los estudiantes en la actualidad.

2.2.6.2 Errores

Los errores son las manifestaciones de las dificultades y obstáculos que tienen los estudiantes, y son parte inherente a todo proceso de aprendizaje, que es necesario identificarlos oportunamente y utilizarlo positivamente a través de una retroalimentación adecuada. Se trata de considerar el error como una oportunidad de aprendizaje, una posibilidad permanente de aprendizaje, una herramienta para el aprendizaje, una orientación para el aprendizaje.

A partir de una revisión literaria, Gamboa, Castillo e Hidalgo (2019) consideran que el término de error puede tener las siguientes acepciones:

> a) Hablamos de error cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar (Godino et al., 2004, p. 73). b) Se podría definir "error" como un concepto equivocado o juicio falso. Por su parte, la equivocación se define como el tener o tomar una cosa por otra, juzgando u obrando desacertadamente (Lucchini, Cuadrado y Tapia, 2006, p. 3). c) Se considera que el error es un conocimiento deficiente, insuficiente, imperfecto, defectuoso, escaso o incompleto; una desviación de un conocimiento establecido (Carrión, 2007, p. 11) (p.7).

Los mismos autores (2019) hacen referencia que los errores pueden ser debidos al lenguaje matemático utilizado, debido al error de traducción de un lenguaje natural a un lenguaje matemático; errores por la dificultad para obtener información de imágenes espaciales; errores de asociaciones incorrectas, aplicar procedimientos a otros contextos que no son válidos; errores debido a la recuperación de esquemas previos para aplicarlo a otras situaciones sin tener en cuenta la situación y el contexto; errores debido a equivocados cálculos o cálculos accidentales en la ejecución de las operaciones resolutivas, por el uso equivocado de los números o de los símbolos involucrados; errores eventuales por aprendizajes previos equivocados o inadecuados que no permiten entender la situación; y errores debido a la ausencia o carencia de saberes previos, no haber tenido contacto con un contenido matemático, no haber interactuado con situaciones particulares, etc. (pp.12-15).

En el caso de las matemáticas, específicamente en el aprendizaje de las fracciones, muchos de los errores están relacionados con algunos conceptos o creencias erradas del profesor, del mismo estudiante, de la cultura educativa, etc.

Fazio y Siegler (2011) consideran que uno de los errores frecuentes en la enseñanza de las fracciones es no considerarlas números con magnitudes, Las fracciones a menudo se enseñan utilizando la idea de que representan parte de un entero. Por ejemplo, un cuarto es una parte de un entero que fue dividido en cuatro partes. Esta interpretación es importante, pero no logra transmitir información vital que indica que las fracciones son números con magnitudes. Como tal, las fracciones pueden ser ordenadas de menor a mayor o tener un valor equivalente (1/2 = 2/4 = 3/6). Los niños que sólo comprenden una parte del enfoque de las fracciones a menudo cometen errores, como decir que 4/3 no es un número por que una persona no puede recibir cuatro partes de un objeto que es dividido en tres partes. El error común de intentar sumar fracciones agregando primero los numeradores y luego los denominadores se debe, en parte, a no entender que las fracciones son números con magnitudes. El confiar solamente en una comprensión parcial de las fracciones, a menudo deja a los niños confundidos en cuanto al significado de las fracciones mayores a 1 y al significado de las fracciones negativas.” (p. 10).

Ríos (2011) en su estudio realizado, categorizó los errores sobre las fracciones de la siguiente manera: la incomprensión del símbolo, tecnología (errada elección de la técnica), de técnica (errada ejecución de tareas), de teoría (deficiencia en el manejo de conceptos), debido a la incomprensión del ítem o pregunta, debido a la no especificidad de la respuesta (aun y cuando el proceso es correcto), y sintáctico. (p. 18).

Identificar los errores es importante para los estudiantes para que asuman la necesidad de superarlos y lograr sus metas de aprendizaje, y para los docentes es importante porque les permite organizar mejor su tarea pedagógica, dando un mejor tratamiento a los aspectos que producen más dificultades, retroalimentando su práctica pedagógica, producto de la autocrítica reflexiva, así como brindando retroalimentación adecuada y oportuna a los estudiantes.

2.2.6.3 Obstáculos

Se puede considerar que los obstáculos son aquellos entorpecimientos y confusiones que surgen en el proceso de aprendizaje, por lo que generan estancamientos y retrocesos, puede deberse a insuficiente información o aprendizaje deficiente.

En este sentido la noción de error está relacionada con la noción de obstáculo epistemológico (Malisani, 1999, p. 3), porque Bachelard (2000)) considera que, al volver sobre un pasado de errores, se encuentra la verdad de un verdadero estado de arrepentimiento intelectual. En efecto, se conoce en contra de un conocimiento anterior, destruyendo conocimientos mal adquiridos o superando aquello que, en el mismo espíritu mismo, obstaculiza a la espiritualización (p.15). Asimismo señala que, un obstáculo epistemológico se incrusta en el conocimiento no formulado. Costumbres intelectuales que fueron útiles y sanas pueden, a la larga, trabar la investigación (pp. 16-17).

Duroux (1983) citado por Malisani (1999), establece una serie de condiciones que debe satisfacer un obstáculo para que sea considerado de tipo epistemológico:

> Un obstáculo es un conocimiento, una concepción, no una dificultad o falta de conocimiento; Este conocimiento produce respuestas correctas en un determinado contexto que el alumno encuentra a menudo; Pero genera respuestas falsas fuera del contexto; Este conocimiento se manifiesta resistente a las contradicciones (a las cuales se confronta) y a la sistematización de un conocimiento mejor; después de la toma de conciencia de su falta de precisión, este conocimiento continúa a manifestarse de manera intempestiva y obstinada (p. 3).

Brousseau citado por Del Puerto y Minnaard (2004), “distingue entre obstáculos de origen psicogenético, que están vinculados con el estadio de desarrollo del aprendiz, los de origen didáctico, vinculados con la metodología que caracterizó al aprendizaje, y los de origen epistemológico, relacionados con la dificultad intrínseca del concepto que se aprende…” (p. 3).

Podemos describir seis características principales de los obstáculos de la siguiente manera, (Astolfi, 1998):

• *su positividad*: *¿\ obstáculo no es ignorancia, ni un bloqueo psicológico, sino que implica una "saturación" de conocimientos previos, inmediatamente movilizados equivocadamente por la mente. Es un tejido de errores construidos, positivos, arraigados, solidarios. Sobre este tema se han mencionado los "esquemas peligrosos".

• *su facilidad*: obstáculo es una facilidad que se concede la mente para seguir razonando de manera sencilla, "inmerso" en la comodidad intelectual, gracias al juego fácil de analogías, de metáforas (demasiado) satisfactorias, de pares de oposiciones binarias, etc.

• *su interioridad*: contrariamente a lo que sugiere la etimología (obstare: mantenerse delante), el obstáculo no es aquello contra lo cual vendría a "tropezar" el pensamiento, sino que está en el pensamiento mismo, en las palabras, en la experiencia cotidiana, en el inconsciente... El error ocupa el centro mismo del acto de conocer y es la sombra proyectada de la razón, hasta el punto de que no se puede soñar con un aprendizaje sin obstáculo.

• *su ambigüedad*: toda representación es a la vez una herramienta necesaria y una fuente potencial de errores. Los obstáculos no lo son en sí mismos, ya que los razonamientos que movilizan pueden a priori ser válidos. Se hablará más bien de una función obstáculo cuando esos modos de pensamiento legítimos se utilizan para la resolución de un tipo de problemas para los que no se adecúan. Lo que constituye un obstáculo es el uso ilegítimo, fuera de sus límites de validez, de un determinado sistema cognitivo, que por lo demás también tiene sus virtudes.

• *su polimorfismo:* el carácter proteiforme del obstáculo lo lleva a dimensiones y adherencias múltiples, pues no se limita al campo racional, sino que a menudo extiende ramificaciones hacia los planos afectivo, emocional, fantasmático, mítico... ¡a menos que no sean estas dimensiones las que contaminen el razonamiento científico! Posee pues una "carga simbólica" y se caracteriza por un "realismo glotón".

• *su recursividad:* sólo retrospectivamente el obstáculo se nos presenta como lo que es. Es el pasado de la razón, cuando ésta se vuelve sobre sí misma para juzgarse. Por ello decía Bachelard que no hay que confundir los "fundamentos" con los "comienzos". El fundamento es recurrente: permite identificar a posteriori el comienzo como el balbuceo infantil que era, y que se revela como tal in fine, por lo que nos cuesta trabajo creer que hayamos podido permanecer durante tanto tiempo presos de esa idea que ahora nos parece tan evidente. Tomar conciencia de los obstáculos nos vuelve modestos y nos lleva a la ironía, e incluso a reírnos de nosotros mismos (pp. 159-160).

Cortina, Zuñiga y Visnovska (2013) consideran que la equipartición como estrategia inicial para la enseñanza y aprendizaje de las fracciones podrían generar tres obstáculos. En primer lugar, plantean la idea de la fracción como resultado de transformar un objeto, que consiste en que,

> … el entero es representado como un objeto susceptible de ser partido fácilmente (por ejemplo, una barra de dulce, una galleta o un pastel) y la fracción unitaria como el producto de la partición (es decir, rebanadas de pastel). En estas situaciones, no sólo sería posible, sino también tentador para los educandos asociar las fracciones con la necesidad de transformar, física e irreversiblemente, un objeto. En esta manera de imaginarse las fracciones, una fracción como 2/5 implicaría la existencia de cinco pedazos (es decir, cinco pedazos de dulce) de lo que solía ser un objeto íntegro (p. 12).

Entonces se generaría la idea de que son cinco objetos independientes de los cuales se seleccionan dos, perdiendo la idea de que son partes de un todo. En segundo lugar, consideran que otro obstáculo sería la imagen de las fracciones como tantos de tantos, que implica que: … tanto el numerador como el denominador se interpretan como números que expresan el resultado de un conteo. El denominador da cuenta del número de elementos en un conjunto y el numerador del número de elementos en un subconjunto. Así, una fracción como 2/5 implicaría la creación de un subconjunto de dos elementos que pertenecerían a un conjunto de cinco. (…). Ello quiere decir que una expresión como “2/5 de una barra de dulce” no implicaría para los alumnos de manera inmediata que la cantidad de dulce equivaldría a menos de 1/2 de la barra (razonando que 2 es menos que la mitad de 5). En lugar de ello, sería más probable que la expresión “2/5 de una barra de dulce” les provocase un razonamiento aditivo; por ejemplo, cuando se agrupan dos elementos de un conjunto de cinco, tres elementos quedan fuera del subgrupo. (p. 13). Esto significa que, los estudiantes aíslan las partes del todo, no lo relacionan con el todo, por ello, no pueden identificar equivalencias o comparaciones. En tercer lugar, plantean el obstáculo relacionado con la fracción incluida en un entero, citando a Thompson y Saldanha (2003), plantean que los estudiantes, … no aceptarán la idea de que se puede hablar del tamaño de una cantidad como siendo una fracción de otra cuando no tengan nada físicamente en común. Ellos aceptarán "¿El número de chicos [boys] es qué fracción del número de niños [children]?", pero se confundirán con "¿El número de chicos es qué fracción del número de chicas?" (pp. 13-14). Lo que implica que los estudiantes siempre comprenderían que una fracción está contenida dentro de un entero, lo que no le permitiría utilizar las fracciones en diversas situaciones y problemas, además siempre creerían que las cantidades enunciadas en una fracción siempre serán menores que 1.

2.3 Definición de términos

Representación, es la idea o imagen que reemplaza a la realidad existente; podemos también entenderlo como el signo, palabra, imagen, etc. con el que se hace presente un elemento o elementos de la realidad.

Representación matemática, son las diferentes formas de presentar los enunciados matemáticos, pueden ser de manera vivencial, con material concreto, gráfico, pictórico, expresión verbal o escrita, y simbólico.

Aprendizaje, es el proceso interno de adquisición cognoscitiva que enriquece y transforma las estructuras internas, de las potencialidades de la persona para comprender y actuar de manera pertinente en su entorno inmediato y mediato.

Fracción, es un número racional, que está compuesta por dos números naturales, donde uno de ellos es el numerador y el otro es el denominador.

Fracción parte-todo, indica la relación entre un número de partes y el número total de partes (que puede estar formado por varios todos). El aprendizaje de este concepto implica el desarrollo de distintas habilidades, tales como empoderamiento de la noción de inclusión de clases, la identificación de la unidad (del todo), las de realizar divisiones (el todo se conserva a pesar de que se lo divida en partes) y manejar la idea de área (para trabajar las cantidades continuas).

Cantidades continuas, consiste en medir cada una de las unidades, calcular matemáticamente, requiere diversas unidades de medición (kilogramos, metros, kilómetros, litros, etc.). Por ejemplo, no se puede decir, un arroz, dos arroces, sino tendríamos que utilizar una unidad de medida, un kilo, medio kilo, un cuarto de kilo de arroz. Son cantidades infinitas, su rango o valores es infinito.

Cantidades discretas, son aquellas que se pueden contar cada una de las unidades utilizando los números naturales. Por ejemplo, cuatro niños, dos carros, ocho cuadernos, etc. Son cantidades finitas.

2.4 Formulación de hipótesis

Las hipótesis planteadas que fueron objeto de contrastación son:

Hipótesis general:

La aplicación de las formas de representación matemática influyen positivamente en el aprendizaje de las fracciones en el cuarto grado de la I.E. N° 36005 "JVV" de Ascensión.

Hipótesis específicas:

- La aplicación de las formas de representación matemática influyen positivamente en el aprendizaje de las fracciones parte-todo con cantidades continuas en el cuarto grado.
- La aplicación de las formas de representación matemática influyen positivamente en el aprendizaje de las fracciones parte-todo con cantidades discretas en el cuarto grado.

2.5 Identificación de variables

Variable independiente: Aplicación de las formas de representación matemática. Implica que en el proceso de experimentación se aplicaron las diversas formas de representación planteadas por Marshall y colaboradoras, con la intención de saber cuál es la influencia que ejerce en el aprendizaje de las fracciones.

Variable dependiente: Aprendizaje de las fracciones. Fracciones en su noción parte-todo con cantidades continuas y discretas, que se relacionó con la aplicación de la variable independiente y se pudo determinar su nivel de influencia.

2.6 Operacionalización de variables

Véase anexo 2.

CAPÍTULO III

METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

3.1 Tipo de investigación

El tipo de investigación es aplicada, como señala Sánchez y Reyes (1998), porque persigue un fin utilitario y práctico, se pretende aplicar los conocimientos teóricos en una determinada situación educativa para observar las consecuencias prácticas, se busca trasformar o producir cambios en un aspecto de la realidad objetiva.

Así, el propósito de la investigación es responder a un problema teórico del aprendizaje de las fracciones y está orientado a describir y explicar cuáles son los resultados si aplicamos sistemáticamente una variable experimental, las formas de representación matemática; escudriñar, profundizar, ampliar y aportar información que nos permita comprender ese aspecto de la realidad y explicar cuáles son los resultados. Específicamente, la finalidad es de mejorar el conocimiento y comprensión de un aspecto del fenómeno educativo, la comprensión de un concepto matemático, la comprensión y aprendizaje de las fracciones por parte de los estudiantes de Educación Primaria.

3.2 Nivel de investigación

El nivel de investigación es el explicativo, porque el propósito de la investigación no solo es describir la realidad, o solo relacionar conceptos, sino el "… interés se centra en explicar por qué ocurre un fenómeno y en qué condiciones se manifiesta, o por qué se relacionan dos o más variables" (Hernández, Fernández y Baptista, 2010, p.84).

Teniendo en cuenta que la descripción y la explicación están estrechamente ligadas, sin embargo, es importante precisar que el presente estudio está orientado más a la explicación.

En el caso particular, se explica cuál fue la influencia que ejerció la aplicación de las formas de representación en el aprendizaje de las fracciones con estudiantes del cuarto grado de Educación Primaria, producto del desarrollo de un conjunto de sesiones de aprendizaje, así como de la aplicación de una prueba de entrada y otra de salida, para explicar los resultados.

3.3 Método de investigación

La concreción del presente trabajo de investigación requirió el empleo del método experimental, teniendo en cuenta lo que Sánchez y Reyes consideran que, debe organizarse intencionalmente ciertas condiciones, "de acuerdo con un plan previo, con el fin de investigar las posibles relaciones causa efecto exponiendo a uno o más grupos experimentales a la acción de una variable experimental y contrastando sus resultados con grupos de control o de comparación" (1985, p.30).

En este caso, se ha elaborado un instrumento de investigación (prueba escrita) que se aplicó a un grupo de estudio, antes de la aplicación de la variable experimental, es decir, las formas de representación matemática, luego del cual se aplicó una prueba de salida, para deducir el efecto que produjo la aplicación de las diferentes formas de representación matemática en el aprendizaje de las fracciones, de un modo comparativo para establecer las conclusiones de causa y efecto.

3.4 Diseño de investigación

El diseño seleccionado para la investigación es el **Pre experimental: Diseño de preprueba/posprueba con un solo grupo** (Hernández, Fernández y Baptista, 2010).

Cuyo esquema es:

GE = O1 ____**x**_____ O2

Donde:

GE = Grupo Experimental, es decir los 21 estudiantes del cuarto grado, con quienes se aplicó las formas de representación matemática para el aprendizaje de las fracciones, a quiénes se les aplicó una prueba de entrada y de salida para concluir los resultados de la aplicación de la variable experimental.

X = Representa la aplicación de la variable independiente, es decir la variable experimental, las formas de representación matemática, las mismas que se aplicaron mediante un conjunto de sesiones de aprendizaje.

O1 = Representa la prueba escrita de entrada que se aplicó al grupo experimental, antes de la aplicación de la variable experimental.

O2 = Representa la prueba escrita de salida que se aplicó al grupo experimental, luego de la aplicación de la variable experimental.

3.5 Población, muestra y muestreo

La población estuvo conformada por 61 estudiantes que integran las tres secciones del cuarto grado “A”, “B” y “C” de la I. E. N° 36005 “Juan Vergara Villafuerte” de Ascensión.

La muestra está conformada por los 21 estudiantes que integran la sección “A” del cuarto grado. Donde, 14 estudiantes son niños y 7 son niñas, que oscilan entre los 9 y 10 años de edad.

La selección de la muestra se realizó mediante un muestreo no probabilístico, el muestreo fue intencional.

3.6 Técnicas e instrumentos de recolección de datos

a) Técnica

Según el método, la hipótesis y el diseño de investigación asumido se eligió la técnica de evaluación educativa (Orellana y Huamán, 1999), procedimiento operativo que nos permite recoger información sobre el nivel de aprendizaje de los estudiantes, específicamente sobre las fracciones, mediante las pruebas pedagógicas que tienen una particularidad de uso en el campo educativo.

b) Instrumentos

El instrumento que se empleó es una prueba escrita ad hoc, la validez del instrumento fue de contenido, mediante juicio de expertos, siendo 4 los jueces que validaron el instrumento (Véase anexo 5).

Se elaboró este instrumento teniendo en cuenta lo precisado por Escalona (2001), quien citando a varios autores refiere que “El instrumento elegido para poner de manifiesto las concepciones de los alumnos es la noción de sistema de representación (Kaput, 1987; Duval, 1993; Rico, Castro y Romero, 1996). Hipótesis importante en los estudios basado sobre la noción de representación es que, para alcanzar la comprensión del concepto que se considera es necesario, entro otros aspectos, el dominio coordinado de dos o más sistemas de representación (Kaput, 1992; Romero, 1995)” (p. 154).

Está constituido de 8 ítems, algunas de selección múltiple y otras de desarrollo. Lo que permitió recoger información sobre los cambios ocurridos antes y después de la intervención pedagógica. La prueba escrita se elaboró teniendo en cuenta la propuesta de Marshall, Castro y Canty (2010), quiénes señalan que, las representaciones matemáticas son palabras, imágenes, dibujos, diagramas, pantallas gráficas y expresiones simbólicas, y teniendo en cuenta que, cada categoría se caracteriza por sus propias reglas de uso y relaciones (p. 40), y todo lo expuesto en la fundamentación teórica. Del mismo modo, se tuvo en cuenta lo planteado por el Ministerio de Educación (2015a) que, las ideas matemáticas adquieren significado cuando se usan diferentes representaciones y se es capaz de transitar de una representación a otra, de tal forma que se comprende la idea matemática y la función que cumple en diferentes situaciones (p. 26).

Por ello, se formularon las 8 preguntas, cada una de ellas asociadas a uno o más tipos de representación matemática; asimismo, 4 ítems se formularon con cantidades continuas y los otros 4 con cantidades discretas. (Véase anexo 4).

Este instrumento tiene como baremo los niveles de aprendizaje, establecidos del siguiente modo: previo al inicio (0 puntos), en inicio (de 0 a 8 puntos), en proceso (de 9 a 12 puntos) y satisfactorio (de 13 a 16 puntos) puntos. Se asumió esta escala de evaluación, haciendo una adaptación de la aplicada por el Ministerio de Educación (2019) en la Evaluación Censal de Estudiantes (ECE), por considerar la más pertinente para los fines de la investigación y el tratamiento estadístico.

Tabla 1

Baremo de calificación de la prueba escrita

NIVEL DE APRENDIZAJE	CALIFICACIÓN	DESCRIPCIÓN	VALORACIÓN CUANTITATIVA
SATISFACTORIO	A	El estudiante logró los aprendizajes esperados y evaluados **(comprensión de las fracciones como parte-todo, con cantidades continuas y discretas)**, además está preparado para afrontar otros retos.	13 a 16 puntos
EN PROCESO	B	El estudiante logró parcialmente los aprendizajes esperados y evaluados. Se encuentra en camino de lograrlos, pero todavía tiene dificultades	9 a 12 puntos
EN INICIO	C	El estudiante logró aprendizajes muy elementales respecto a lo esperado y evaluado.	1 a 8 puntos
PREVIO AL INICIO	P	El estudiante no logró los aprendizajes necesarios para estar en el nivel En inicio.	0 puntos

Nota. Adaptación de Informe Nacional ECE 2018.

Antes de su aplicación, habiendo realizado una prueba piloto en instituciones educativas de zona rural y urbana, se hizo los reajustes y mejoras necesarias, lo que se plasmó en la operacionalización de variables, véase anexo 2. Concluyéndose que el instrumento mide las dimensiones señaladas de la variable dependiente.

3.7 Técnicas de procesamiento y análisis de datos.

El procedimiento que se siguió para procesar y analizar los datos fueron los siguientes:

- Elaboración y validación de la prueba escrita.
- Selección y determinación de la muestra.
- Aplicación del instrumento de recolección de datos.
- Realizar el procesamiento y análisis de datos: Cuantificación de los datos obtenidos con el instrumento, elaboración de una base de datos.
- Procesamiento de datos con el programa SPSS
- Procesamiento estadístico.
- Interpretar los datos obtenidos.
- Establecer la influencia en el grupo experimental

Teniendo en cuenta que la variable formas de representación matemática y el aprendizaje de las fracciones son variables cuantitativas, con escalas de medición ordinales y cuyos datos son asimétricos, se asumió una prueba no paramétrica, la prueba de hipótesis de Wilcoxon.

3.8 Descripción de la prueba de hipótesis

Teniendo en cuenta el nivel de investigación, el diseño de investigación y la operacionalización de variables se asumió un modelo experimental de contrastación de la hipótesis, mediante el cual se confirmó la hipótesis sometida a prueba.

Se aplicó la variable experimental o variable independiente, es decir, se realizó las sesiones de aprendizaje incorporando las múltiples representaciones matemáticas, para buscar y observar los efectos en el grupo experimental, efectos que se midieron mediante el uso y tratamiento de una prueba escrita (cuestionario), confrontando los resultados de la prueba de entrada y la prueba de salida.

La prueba estadística se realizó siguiendo los siguientes procedimientos:

a) Definir la hipótesis estadística.
b) Establecer el nivel de significancia.
c) Determinar el uso de prueba estadística.
d) Calcular p=valor.
e) Tomar de decisiones.

CAPÍTULO IV

PRESENTACIÓN DE RESULTADOS

Los resultados de la investigación se expondrán a continuación, a partir del tratamiento de los datos obtenidos mediante el instrumento de investigación y según el diseño de investigación, orientado por los objetivos de la investigación y para contrastar la hipótesis de investigación.

Como parte del trabajo de campo se elaboró un plan de trabajo que tuvo las siguientes actividades y cronograma para su ejecución, que se cumplieron según lo señalado.

Tabla 2

Cronograma de actividades

Nº	ACTIVIDADES	RESPONSABLES	2019					
			A	M	J	J	A	S
01	Elaboración y presentación del plan de práctica a la I.E. N° 36005 – “JVV”	Investigador	X					
02	Aplicación de la prueba de entrada.	Investigador		**8**				
03	Aplicación de la variable experimental: Las formas de representación matemática mediante la ejecución de sesiones de aprendizaje.	Investigador – Docente de aula.		**15** **22** **29**	**5** **12** **19** **26**	**3** **10** **17**		
04	Aplicación de la prueba de salida.	Investigador				**24**		

05	Análisis e interpretación, tratamiento de la información obtenida.	Investigador – Asesor	X	X

Nota. Elaboración propia.

4.1 Presentación e interpretación de datos

Es preciso manifestar que la investigación requirió de la elaboración de un instrumento de investigación, preparado ad hoc y denominado Prueba Escrita (Cuestionario) tal como se ha descrito en el acápite correspondiente. La prueba de entrada se aplicó el 8 de mayo de 2019, posteriormente se realizó las sesiones de aprendizaje aplicando las formas de representación matemática, finalmente se aplicó como prueba de salida el 24 de julio de 2019.

La experiencia se realizó con 21 estudiantes integrantes del cuarto grado de la Institución Educativa N° 36005 “JVV” del distrito de Ascensión.

Las dimensiones que se tuvieron en cuenta son las siguientes:

En la variable formas de representación matemática, se consideró: vivencial, concreta, gráfica, pictórica, simbólica y palabras. Respecto a la variable dependiente, el aprendizaje de las fracciones, se tuvo en cuenta las siguientes dimensiones: fracciones como parte-todo con cantidades continuas y como parte-todo con cantidades discretas.

4.1.1 Resultados de la prueba de entrada

La aplicación de la prueba de entrada y su correspondiente valoración, con el baremo antes descrito, permitió obtener los resultados expuestos en la Tabla 3 (Véase anexo)

El resultado consolidado es el siguiente:

Tabla 4

Resultado general de la prueba de entrada

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	PREVIO AL INICIO	2	9,5	9,5	9,5
	EN INICIO	18	85,7	85,7	95,2
	EN PROCESO	1	4,8	4,8	100,0
	Total	21	100,0	100,0	

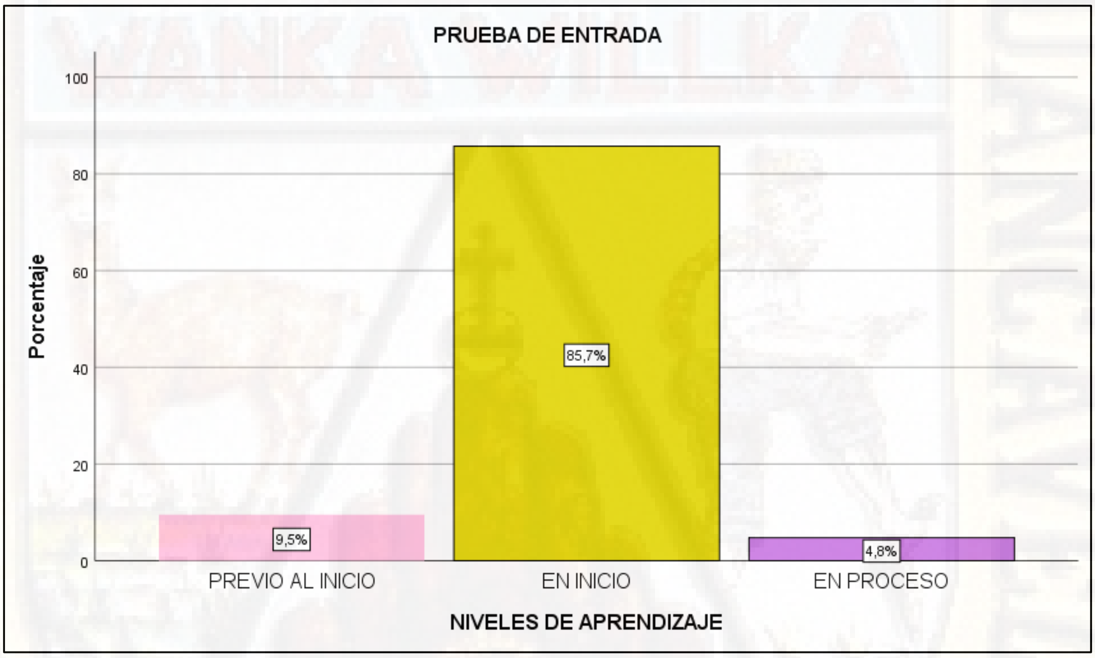


Figura 10. Resultado general de la prueba de entrada. Elaboración propia.

De la tabla 4 y figura 10, se puede concluir que ningún estudiante alcanza el nivel satisfactorio, solo 1 estudiante, que representa el 4,8% alcanza el nivel en proceso, es decir, *los estudiantes logran parcialmente los aprendizajes esperados y evaluados (comprensión de las fracciones como parte-todo con cantidades continuas y discretas). Se encuentra en camino de lograrlos, pero todavía tiene dificultades.* Mientras que el 85,7 %, es decir, 18 estudiantes alcanzan el nivel en inicio, o sea *el estudiante logró aprendizajes muy* *elementales respecto a lo esperado y evaluado*. Sin embargo, hay 2 estudiantes, que representan el 9,5 %, están en el nivel previo al inicio, es decir, *que no alcanzan ni las condiciones básicas o elementales de conocimiento de las fracciones*.

La mayor proporción de la muestra evaluada se encuentran en el nivel en inicio, lo que significa que los estudiantes logran aprendizajes muy elementales respecto a las fracciones como parte-todo, fundamentalmente se evidencia que no utilizan formas de representación matemática, y los pocos que lo hacen, utilizan la figura de un cuadrado para hacerlo. También se ha observado que, en las preguntas de elección múltiple, los niños si eligen y marcan la alternativa, aunque sea incorrecta, en cambio en las 2 preguntas de desarrollo, donde se les pide que expliquen la resolución del problema utilizando alguna representación, simplemente lo dejan en blanco, por escaso conocimiento de las formas de representación matemática o por lo que Duval (2016a) expresaba: "se debe tener en cuenta otro factor: las tareas de simple reconocimiento que consisten en elegir entre varias respuestas posibles son más fáciles que las de producción que piden que se elabore la respuesta" (p.156). Obviamente, los 2 ítems de desarrollo son más complejos porque requieren un proceso de mayor elaboración, análisis, representación y explicación, lo que los estudiantes, no hacían en este estado inicial.

4.1.2 Aplicación de la variable experimental

Tal como señala el diseño de investigación elegido, con un solo grupo con pre y pos test, luego de la prueba de entrada se desarrolló un conjunto de sesiones de aprendizaje, orientadas a utilizar las distintas formas de representación matemática en el aprendizaje de fracciones (Véase anexo 9)

Tabla 5
Cuadro de sesiones de aprendizaje desarrolladas

SESIONES	TÍTULO DE LA SESIÓN	PROPÓSITO DE APRENDIZAJE
Sesión 1	Conocemos las fracciones como parte todo.	COMPETENCIA: Resuelve problemas de cantidad.
Sesión 2	Representamos gráficamente fracciones	

Sesión 3	Resolvemos problemas de fracciones con cantidades continuas utilizando diversas representaciones.	CAPACIDADES: • Traduce cantidades a expresiones numéricas. • Comunica su comprensión sobre los números y las operaciones. • Usa estrategias y procedimientos de estimación y cálculo. • Argumenta afirmaciones sobre las relaciones numéricas y las operaciones. DESEMPEÑOS: Expresa con diversas representaciones y lenguaje numérico (números, signos y expresiones verbales) su comprensión de: - La fracción como parte-todo (cantidad discreta o continua), así como equivalencias y operaciones de adición y sustracción entre fracciones usuales usando fracciones equivalentes.
Sesión 4	Representamos con fracciones la misma parte de un terreno.	
Sesión 5	Conocemos las fracciones como partes de un todo con cantidades discretas.	
Sesión 6	Conocemos como funciona una librería.	
Sesión 7	Resolvemos problemas de fracciones como partes de un todo con cantidades discretas.	
Sesión 8	Representamos y hallamos fracciones equivalentes.	
Sesión 9	Resolvemos problemas de fracciones como partes de un todo, con cantidades continuas y discretas.	
Sesión 10	Identificamos fracciones con cantidades continuas y discretas.	

Nota. Elaboración propia.

Las sesiones de aprendizaje desarrolladas por un espacio aproximado de tres meses, mayo, junio, julio (fechas según tabla N° 02), cada miércoles de semana, generalmente 135 minutos, la mayoría de ellas, son adaptaciones de las sesiones publicadas por el Ministerio de Educación (2015b). Enfatizando en ellas, el uso de las distintas formas de representación matemática por parte de los estudiantes, asimismo se tuvo en cuenta el enfoque del área y la propuesta de los procesos didácticos.

Las sesiones de aprendizaje desarrolladas además de tener claro los propósitos de aprendizaje, en términos de competencia, capacidades y desempeños que se señala en la tabla anterior, se ha considerado los procesos didácticos de la matemática planteados por el Ministerio de Educación (2018): familiarización con el problema, búsqueda y ejecución de estrategias, socialización de representaciones, reflexión y formalización, y planteamiento de otros problemas (pp. 202-204). Señalando que la socialización de representaciones:

> Implica que el estudiante intercambie experiencias y confronte con los otros el proceso de resolución seguido, las estrategias que utilizó, las dificultades que tuvo, las dudas que aún tiene, lo que descubrió, etc., enfatizando las representaciones que realizó con el fin de ir consolidando el aprendizaje esperado (vocabulario matemático, las ideas matemáticas, procedimientos matemáticos y otros) (p. 203).

Como fundamento de la propuesta de los procesos didácticos de la matemática, específicamente en el tema de la socialización de representaciones, cita a Raymond Duval (2004), enseñar y aprender matemática conlleva que estas actividades cognitivas requieran además del lenguaje natural o el de las imágenes, la utilización de distintos registros de representación y de expresión. También refiere lo que Duval aseveró, que los conceptos matemáticos no son objetos reales y por consiguiente se debe recurrir a distintas representaciones para su estudio y para llevarlo a cabo resulta importante tener en cuenta que las mismas no son el objeto matemático en sí, sino que ayudan a su comprensión. Si no se distingue el objeto matemático (números, funciones, rectas, triángulos, etc.) de sus representaciones (escritura decimal o fraccionaria, gráficos, trazados de figuras, etc.) no puede haber comprensión en matemática (p. 207).

En este proceso de socialización de representaciones, se logró:

- Confrontar sus producciones con la de sus pares. Esto lo hacen verificando sus producciones, describiendo sus representaciones y resultados como parte del problema (s), sin tener que recurrir al dictamen del docente.
- Expresar las nociones y procedimientos utilizados, usando lenguaje y conocimientos matemáticos en las propuestas de solución.
- Responder a preguntas o repreguntas realizadas por sus pares o el docente para reflexionar o corregir sus errores respecto a sus producciones (nociones y procedimientos).
- Comunicar las ideas matemáticas surgidas. Por ello, ordenan sus ideas, las analizan, justifican y expresan de palabra o por escrito, usando materiales, organizadores visuales, etc. Ya sea a nivel individual, en parejas o por

equipos, de modo comprensible para los demás y sobre los resultados que han obtenido. (Ministerio de Educación, 2018, p. 203).

- Resolver problemas de manera colaborativa, utilizando diversidad de materiales (tapas, palitos, papeles de colores, botones, etc.) que les permitió la representación concreta del problema, explicando de manera individual y grupal las representaciones que realizaron y los procedimientos que siguieron.
- Resolver problemas con cantidades continuas y discretas, en diversos contextos, de la vida real (por ejemplo, del uso cotidiano de la compra de productos, como arroz, azúcar, yogur, cuadernos, útiles escolares, etc.) y del entorno matemático propiamente, lo que ayudó a la mejor comprensión del significado de la fracción como parte-todo.
- Interactuar entre estudiantes en los equipos de trabajo, generando la necesidad de utilizar la diversidad de representaciones matemáticas, por ejemplo, los estudiantes compartieron sus expresiones verbales y escritas, su entendimiento de la representación que realizaron. Desempeños que fueron registrándose en la lista de cotejo y/o escala de valoración, que acompaña a cada sesión de aprendizaje, como instrumento de evaluación.
- Utilizar los cuadernos de trabajo y/o textos escolares en las sesiones de aprendizaje, como extensión o transferencia de lo aprendido, aunque solo cuando se trataba de fracciones continuas, en cambio para el caso de fracciones discretas que no aborda se utilizaron fichas de aplicación.
- Experimentar las diversas formas de representación matemática, de acuerdo al criterio personal de los estudiantes, así como por la naturaleza del problema.
- Construir ideas matemáticas relacionadas a las fracciones, equivalencia de fracciones, números mixtos, fracciones homogéneas y heterogéneas, y fracción como cociente.

4.1.3 Resultados de la prueba de salida

La aplicación de la misma prueba escrita de salida, luego de haber desarrollado las sesiones de aprendizaje, tuvo el propósito de medir las modificaciones o cambios generados producto de esa intervención.

Los resultados detallados lo podemos observar en la tabla 6, anexo 3.

El resultado consolidado es el siguiente:

Tabla 7
Resultado general de la prueba de salida

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	EN INICIO	1	4,8	4,8	4,8
	EN PROCESO	10	47,6	47,6	52,4
	SATISFACTORIO	10	47,6	47,6	100,0
	Total	21	100,0	100,0	

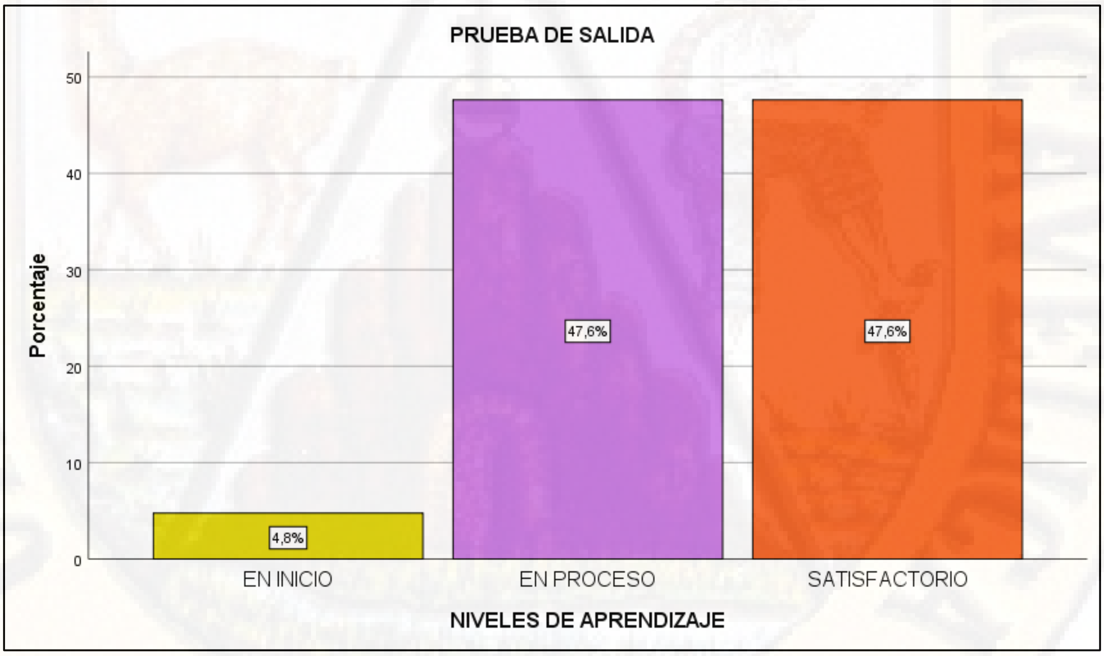


Figura 11. Resultado general de la prueba de salida. Elaboración propia, programa estadístico.

De la tabla 7 y la figura 11, se puede deducir que, ningún estudiante se halla en el nivel previo al inicio, por ello no aparece la barra correspondiente, es decir, los dos estudiantes, que antes de desarrollar las sesiones se encontraban en esa condición, han transitado a otro nivel. Lo cual es muy importante destacar.

Mientras que, sólo un estudiante, es decir, el 4,8% se encuentran en el nivel en inicio. Como se observa, la proporción de estudiantes que se hallan en el nivel en proceso ha crecido a comparación de la prueba de entrada, ahora tenemos un 47,6 % en este nivel, es decir 10 estudiantes, que *logran parcialmente los aprendizajes esperados y evaluados. Se encuentra en camino de lograrlos, pero todavía tiene dificultades*. Y otros 10 estudiantes que representan el 47,6 % se encuentran ahora en el nivel satisfactorio, es decir son los estudiantes que *logran los aprendizajes esperados y evaluados (comprensión de las fracciones como parte-todo, con cantidades continuas y discretas), además está preparado para afrontar otros retos.* Podemos, entonces, manifestar que la intervención pedagógica ejecutada ha tenido buenos resultados.

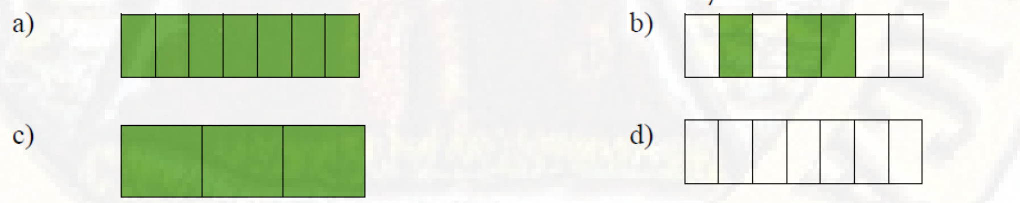
4.1.4 Comparativo de resultados de la prueba de entrada y prueba de salida

El comparativo de resultados se realizará de manera específica ítem por ítem, enfatizando las dimensiones de las variables.

a) Comparativo ítem 1

Ante la pregunta:

1. ¿En cuál de los gráficos, la parte coloreada representa $\frac{3}{7}$?



Los resultados comparados de la prueba de entrada y de salida fueron los siguientes:

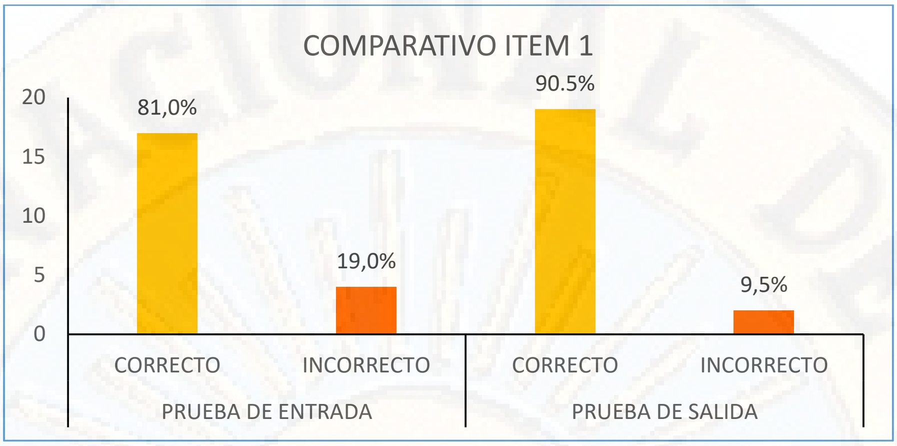


Figura 12. Resultados ítem 1. Elaboración propia, programa estadístico.

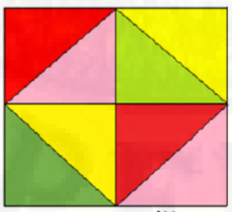
Como se puede observar, la primera pregunta está relacionado con una actividad muy frecuente o cotidiana con los estudiantes, identificar las fracciones de manera gráfica en un recuadro, siendo muy usual este tipo de actividades. Por ello, en la prueba de entrada 17 estudiantes, es decir el 81% respondieron correctamente, mientras que solo un 19%, es decir 4 estudiantes respondieron incorrectamente. En la prueba de salida hubo un pequeño incremento, son 19 estudiantes, el 90,5% que respondieron correctamente y solo 2 estudiantes, el 9,5% respondieron incorrectamente.

Esta es una actividad muy frecuente en las sesiones de aprendizaje, identificar la representación gráfica de una fracción, y casi siempre se presenta en un formato circular o cuadrangular, por lo tanto, resulta siendo una actividad común y nada compleja.

b) Comparativo ítem 2

Ante la pregunta:

2. Un albañil está cubriendo el piso con losetas a colores, tal como se muestra en el diseño:



Si juntamos las dos partes amarillas y las dos partes rojas del diseño, ¿qué fracción del total se obtiene?

a) $\frac{2}{8}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{8}{8}$ d) $\frac{4}{8}$

Las respuestas comparadas, tanto de la prueba de entrada y de la prueba de salida fueron los siguientes:

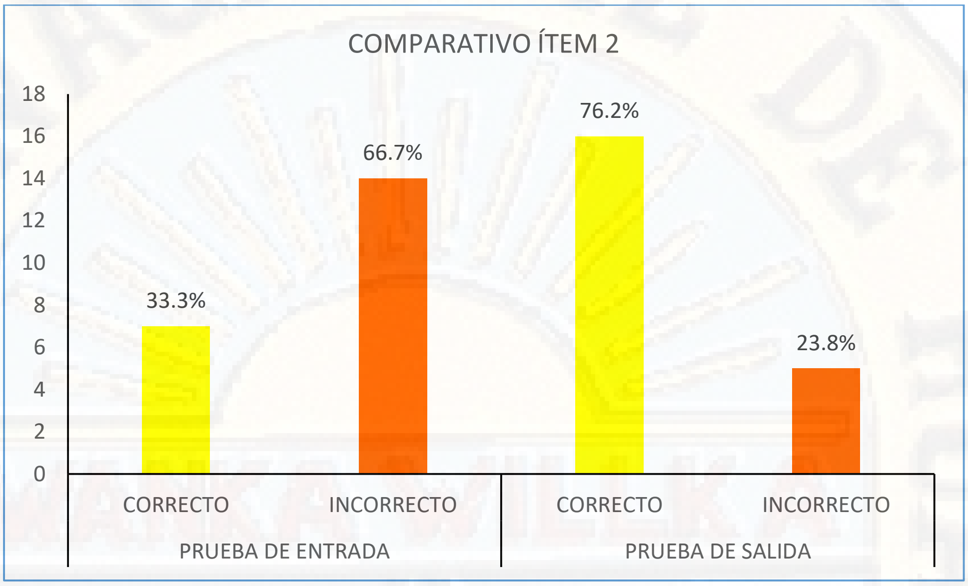
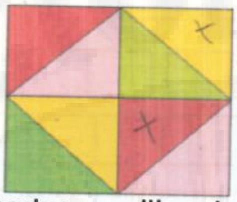


Figura 13. Resultado comparativo ítem 2. Elaboración propia, programa estadístico.

Como se puede destacar en la figura 13, inicialmente en la prueba de entrada solo 33,3%, es decir, 7 estudiantes respondieron correctamente, y el 66,7% o sea 14 estudiantes respondieron incorrectamente. Pero en la prueba de salida, esa condición cambió, respondiendo correctamente el 76,2%, es decir, 16 estudiantes y solo 5 estudiantes, que representan 23,8% respondieron equivocadamente. Observándose un real incremento de estudiantes que llegan a desempeñarse en este tipo de actividades, relacionadas a las partes de un todo.

Sin embargo, es necesario precisar que, en esta pregunta, se requería identificar el total de partes, luego identificar las porciones de color rojo y amarillo, juntarlos, y producto de la relación parte con el todo, reconocer que son 4 de 8 la fracción que representan. A partir de una representación gráfica debían identificar su representación simbólica. La relación que establecieron en la prueba de entrada, en su mayoría no es la correcta, casi todos marcaron como respuesta ¼, inclusive en la prueba de salida. Veamos un ejemplo:

Un albañil está cubriendo el piso con losetas a colores, tal como se muestra en el diseño:



Si juntamos las dos partes amarillas y las dos partes rojas del diseño, ¿qué fracción del total se obtiene?

a) $\frac{2}{8}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{8}{8}$ d) $\frac{4}{8}$

Se puede deducir, que el estudiante o no sabe la respuesta correcta y propone un resultado al azar (Sanchez, 2001), o que los estudiantes tuvieron un “defecto de comprensión”, en la medida que no entendieron la acción que debieran realizar y qué les pedía hallar, o sucedió una “aplicación sistemática de procedimientos erróneos”, primero tuvieron que discriminar que son dos porciones amarillas y dos porciones rojas, tal como se observa en el gráfico y en el enunciado del problema, pero solo consideraron una porción amarilla y otra roja, las juntaron y luego asumieron que el diseño solo tiene 4 partes, no distinguiendo las pequeñas partes triangulares, por lo tanto, señalaron que la respuesta es ¼, atribuyendo este error a la presentación tradicional de una fracción, un cuadrado grande dividido en cuadrados pequeños. Por otro lado, podría ser que, no consideraran el valor de cada porción independientemente, sino considerar que siendo del mismo color valen y son lo mismo.

c) Comparativo ítem 3

Ante la pregunta:

3. Raúl y María tienen la siguiente proporción de papeles para hacer un arreglo. Ambos utilizarán 1/3 del papel que tienen.

¿Cuál de las siguientes expresiones es correcta?

a) Ambos utilizarán el mismo tamaño de papel, cada uno 1/3.
b) Raúl utilizará 2/3 de papel, mientras que Katy utilizará 1/3 de papel
c) Raúl y María utilizarán un pedazo de papel.
d) Utilizarán diferentes tamaños de papel, a pesar de tener 1/3 cada uno.

Las respuestas comparadas, tanto de la prueba de entrada y de la prueba de salida fueron los siguientes:

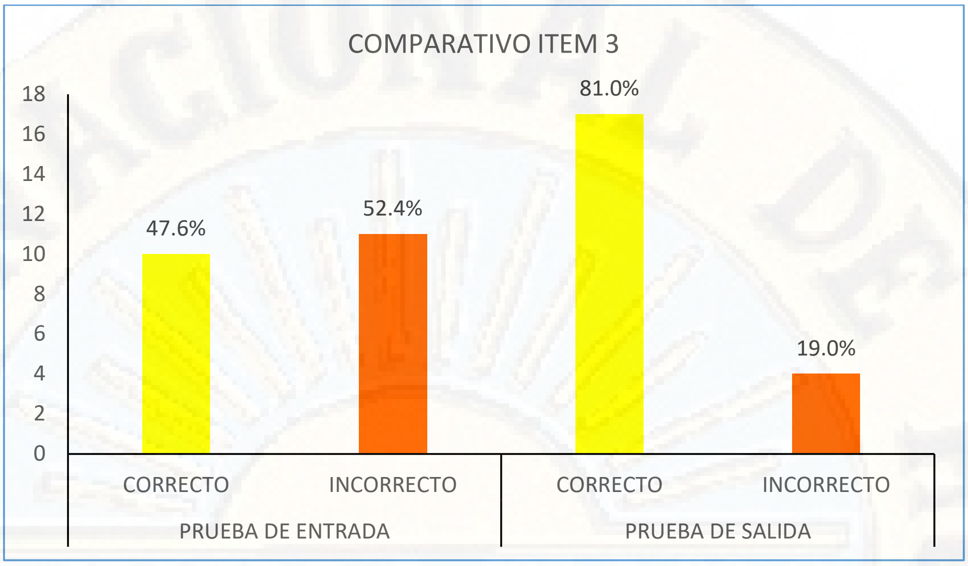
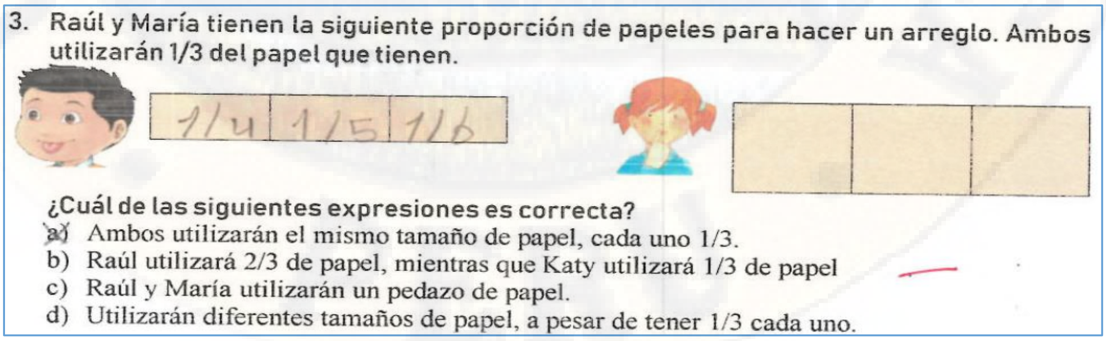


Figura 14. Resultado comparativo ítem 3. Elaboración propia, programa estadístico.

En la figura 14, permite observar el cambio significativo en el aprendizaje de los estudiantes, si en la prueba de entrada solo el 47,6% respondieron correctamente, es decir 10 estudiantes, luego de la intervención pedagógica, llegaron a ser 17 estudiantes que representan el 81%. Mientras que, los que respondieron incorrectamente, descendió de 52,4% a 19,0%, es decir de 11 estudiantes a 4 estudiantes.

Esta actividad requería hacer una acción de conversión o traducción, según el marco teórico, pues a partir de una representación gráfica debería realizar una representación léxica o con lenguaje natural (con palabras). Sin embargo, la respuesta incorrecta y frecuente fue “Ambos utilizarán el mismo tamaño de papel, cada 1/3”, como podremos observar en la siguiente evidencia:



Para expresar sus respuestas, los estudiantes, solo identificaron de que cada unidad o entero tienen 3 partes, pero no hicieron la relación de tamaño en ambas situaciones o simplemente no tomaron importancia del tamaño de los papeles a pesar de tener la misma cantidad de partes. Este error de los estudiantes deviene de que es muy poco usual este tipo de experiencias de representación de fracciones, primero porque generalmente se trabaja el modelo circular o cuadrangular, por el abuso de representaciones continuas, normalmente vinculadas al círculo (Sanchez, 2001), por otro lado, otra causa es que, lo usual es partir de enunciados verbales o escritos para representarlo gráficamente, o a partir de representaciones verbales identificar su representación gráfica.

d) Comparativo ítem 4

Ante el problema:

4. Miguel y sus dos hijos se reparten una botella de un litro de jugo en cantidades iguales. Sabiendo que cada vaso contiene ¼ de litro, ¿cuántos litros de jugo bebieron en total? *Explica tu respuesta con un gráfico, dibujo, diagrama o la forma que desees.*

Las respuestas comparadas, tanto de la prueba de entrada y de la prueba de salida fueron los siguientes:

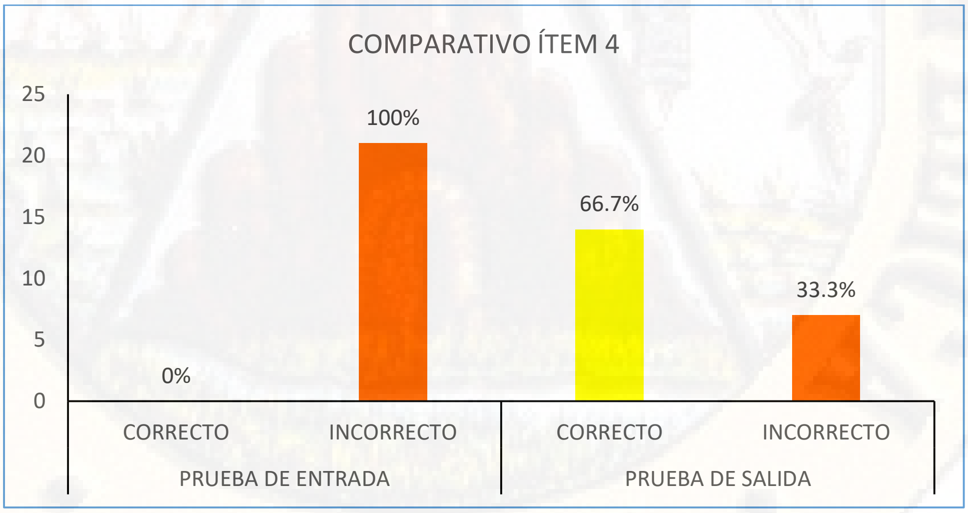
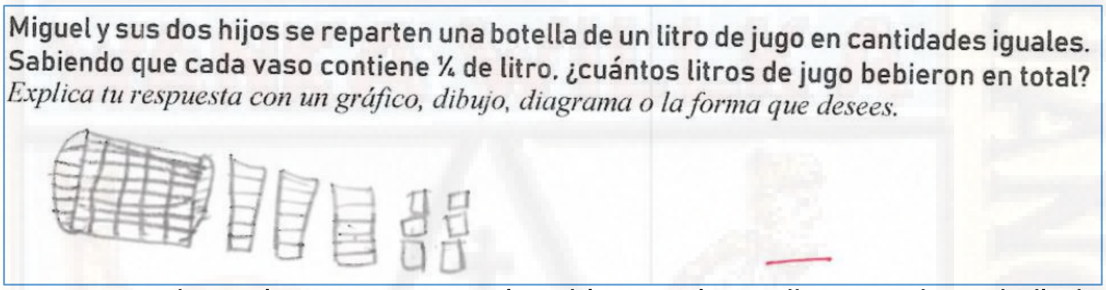


Figura 15. Resultado comparativo ítem 4. Elaboración propia, programa estadístico.

En la figura 15, es muy didáctico para expresar que en la prueba de entrada ninguno de los estudiantes respondió o desarrolló esta actividad, en cambio en la prueba de salida demuestra que hubo un 66,7%, es decir 14 estudiantes respondieron correctamente, lo que permite observar el cambio significativo en el aprendizaje de los estudiantes. Y que del total de estudiantes que inicialmente respondieron incorrectamente, en la situación final descendieron a 33,3%, es decir a 7 estudiantes, que todavía tenían las mismas dificultades.

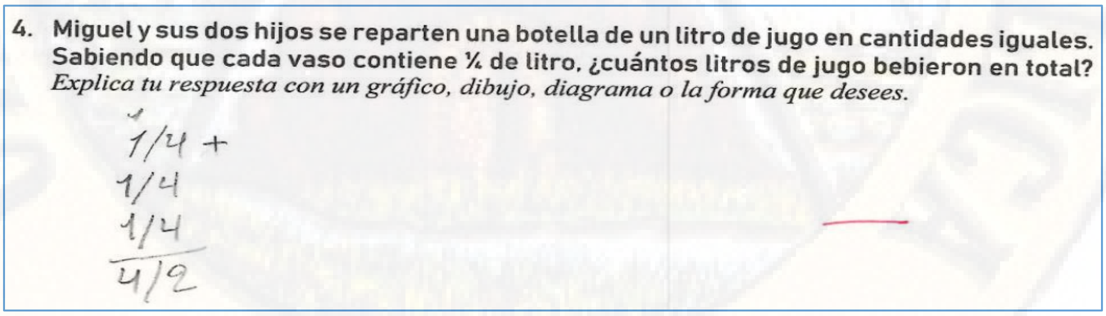
Es menester, precisar que esta actividad es de alta demanda cognitiva, a diferencia de las dos primeras, para resolver el problema tenían que explicar el procedimiento seguido mediante cualquier tipo de representación.

Veamos algunas evidencias de los errores que cometen los estudiantes:

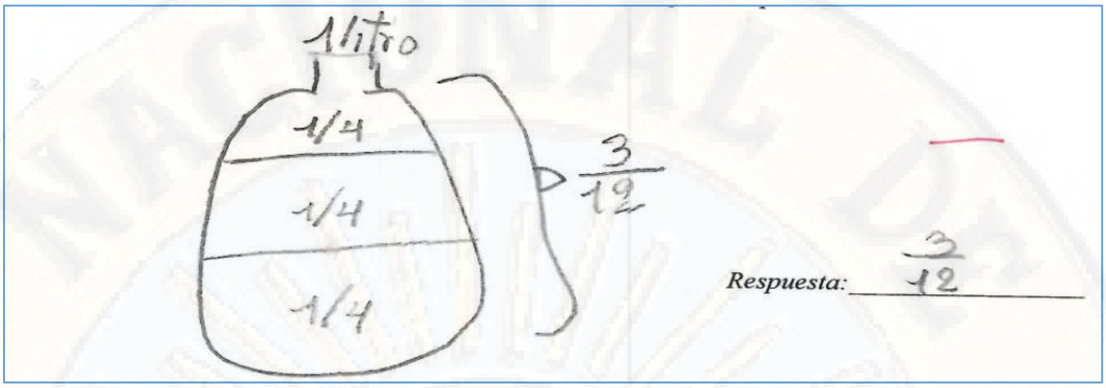


No traducen lo que expresa el problema. El estudiante no ha asimilado el concepto de número fraccionario – por eso - recurre al empleo de los esquemas asimiladores anteriores (el número natural) (Pruzzo, 2012). Es notorio que ha representado una centena, 3 decenas y 6 unidades con material Base diez, lo que no tiene absoluta relación con el problema plateado.

Veamos otras evidencias:

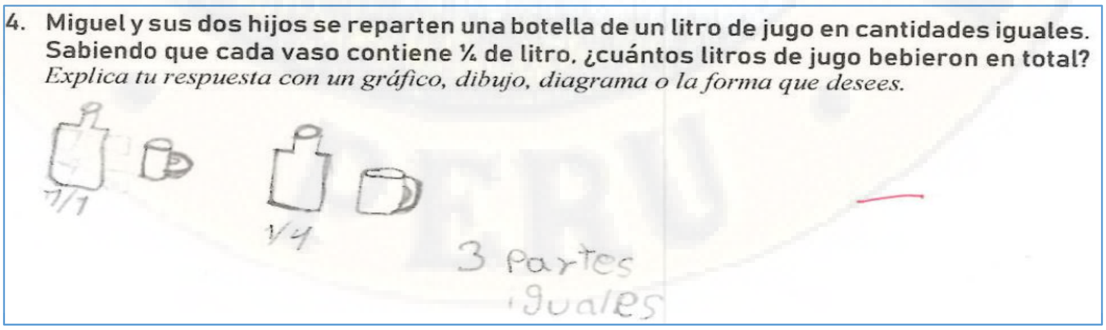


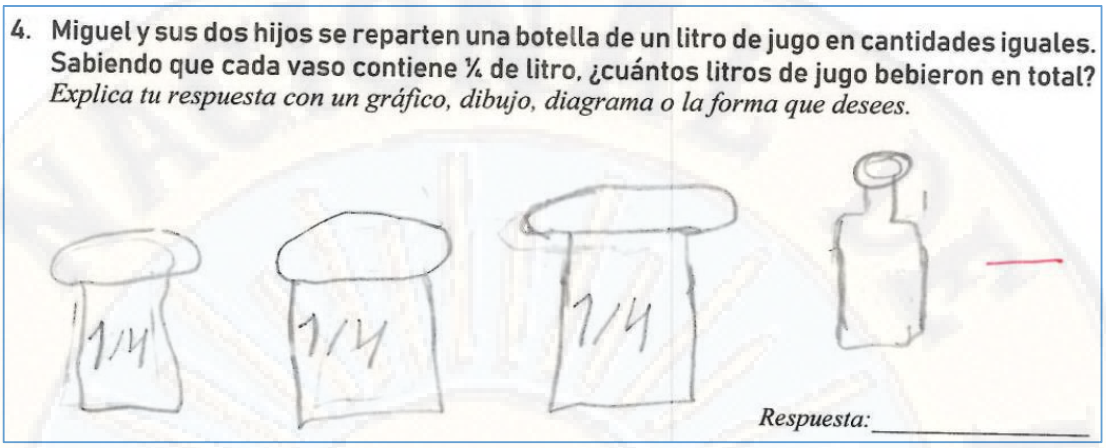
En esta evidencia el estudiante, sumó los denominadores y le aplicó la técnica operativa de la adición de los números naturales, 4+4+4=12, se ubica la unidad 2 y se lleva la decena, luego suma 1+1+1+1=4, como si fueran números naturales, y escribe como respuesta 4/2.



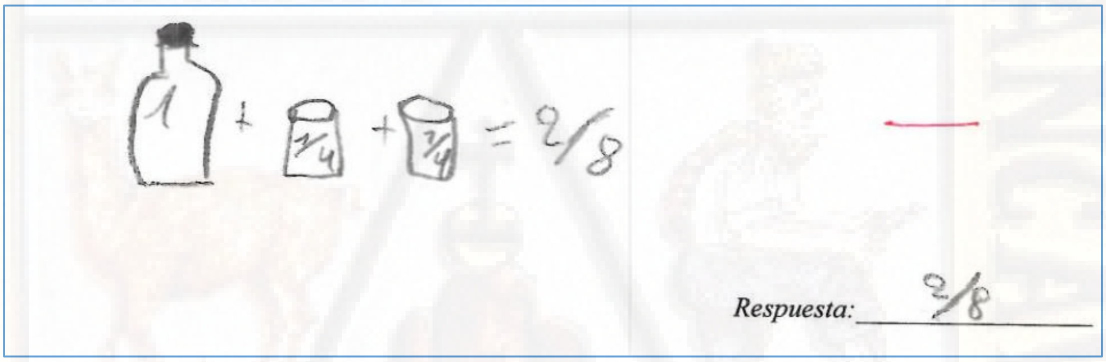
En este caso, el estudiante sumó los denominadores 4+4+4=12, y 1+1+1=3, y como respuesta escribió 3/12. Empero cabe resaltar, que si identificaron las partes que les correspondía a los tres personajes del problema, pero no dividieron la unidad o el todo en las partes que correspondía, esto porque no tiene claro la comprensión de la noción de una fracción. Según Fazio y Siegler, el error común de intentar sumar fracciones agregando primero los numeradores y luego los denominadores se debe, en parte, a no entender que las fracciones son números con magnitudes (p.10).

Entonces no es la aplicación incorrecta de la operación, porque aún sin conocer la técnica operativa de la adición de fracciones, podrían haberlo realizado si graficaban o representaban el litro de jugo y las partes requeridas, y solo juntaban las partes que correspondían a los tres personajes. Al igual que Pruzzo, Sánchez (2001) refiere que estos “errores … tienen su origen en la similitud que tanto en el lenguaje como en el simbolismo presentan con los números naturales. La consecuencia es que el niño en ocasiones trata de utilizar sus conocimientos de cálculo con los números naturales, para lo cual extrapola a las fracciones las reglas y algoritmos de aquellos … de los números naturales”





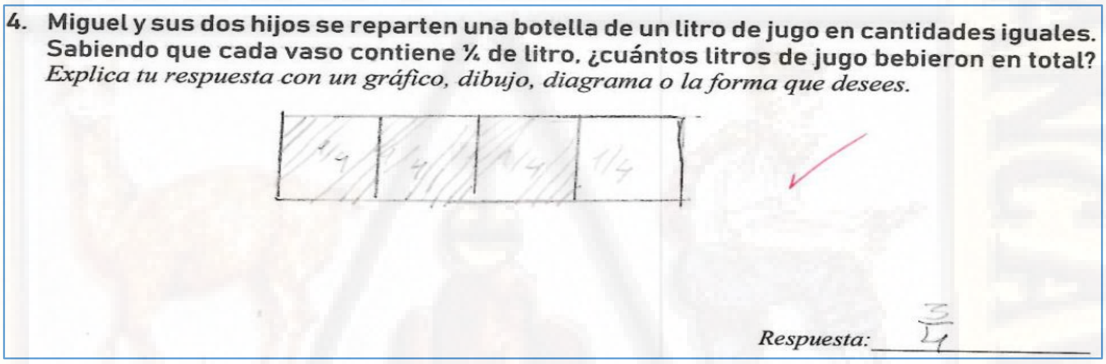
En estas dos evidencias, no relacionan la parte con el todo y no identifican lo que pide hallar el problema. No han establecido la relación “parte-todo” se presenta cuando un “todo”, continuo o discreto, se divide en partes “congruentes” (Quispe, 2011).



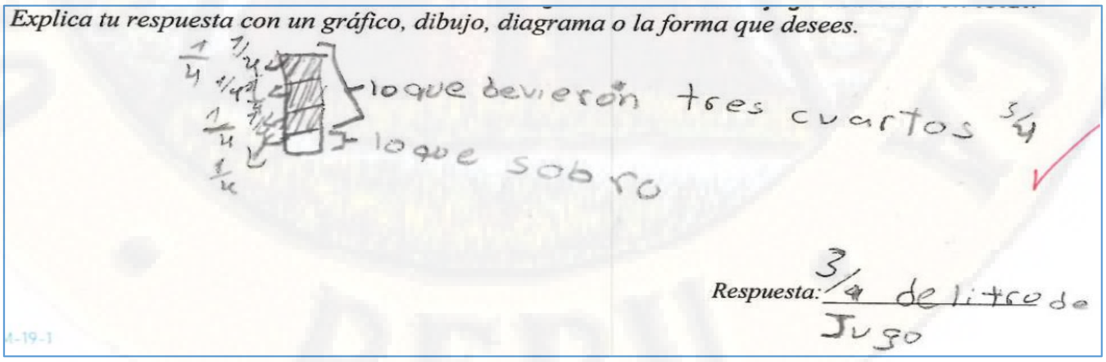
No identificó los datos del problema, que se trataba de “Miguel y sus dos hijos”, tendrían que haber 3 vasos, sin embargo, también está indicando que la botella se tendría que sumar con los vasos, no diferencia las partes del todo.

Estas fueron las respuestas que más presentaron los estudiantes, entre otros que dejaron en blanco otros que respondieron fuera de contexto. Es necesario puntualizar, que esta no es una presentación usual de un problema de fracciones, estamos hablando de fracciones con cantidades continuas, que podría ser un litro de gaseosa, un kilo de arroz, cuartos de pollo, etc. pero que no son presentados a los estudiantes. Es importante destacar lo que Pruzzo (2012), planteaba “para que el niño consiga una comprensión amplia del concepto de fracción se le debe plantear experiencias con la mayoría de interpretaciones…” en ese sentido los estudiantes deberían trabajar con fracciones “en cantidades continuas (entendidas como superficies: torta, campo, pizza, etc., pero también como líquidos: agua, leche, jugos; y en este sentido entra a jugar el concepto de medida de capacidad, pero no solo usando la unidad convencional (litro) sino haciendo medir los líquidos con vasos u otros recipientes)" (p. 6). Por esta razón, es que la actividad planteada en el ítem 4 resulta siendo más complejo y dificultoso para los estudiantes.

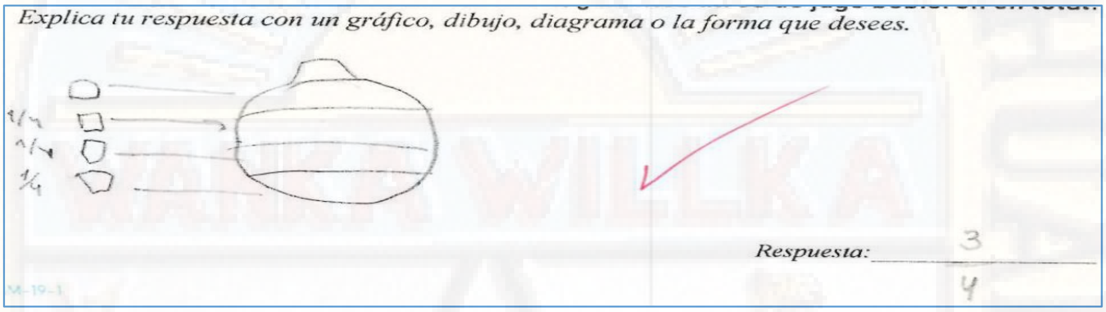
Pero luego de la ejecución de las sesiones de aprendizaje, basados en brindar a los estudiantes las oportunidades de utilizar las diferentes representaciones matemáticas, y teniendo también como fundamento que: "Los estudiantes deben ser alentados a utilizar objetos concretos, dibujos u otras representaciones que los ayuden a resolver los problemas" (Fazio y Siegler, 2011), veamos las producciones de los estudiantes en la prueba de salida:

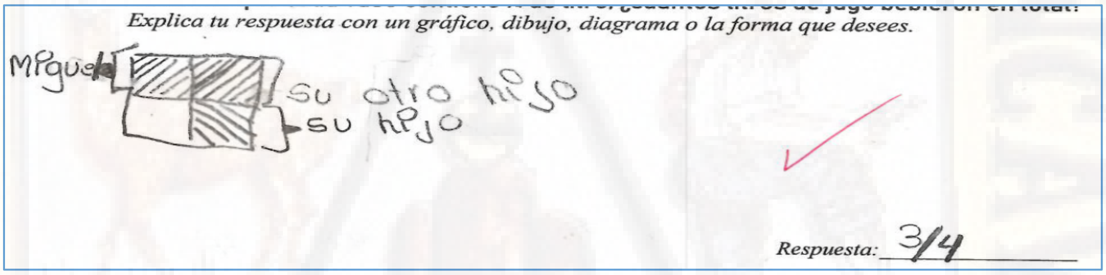


El estudiante resolvió con un simple gráfico mediante el cual representó lo expresado en el problema, luego solo junto las partes para expresar los litros que bebieron las tres personas. Asoció la representación gráfica con la representación simbólica.



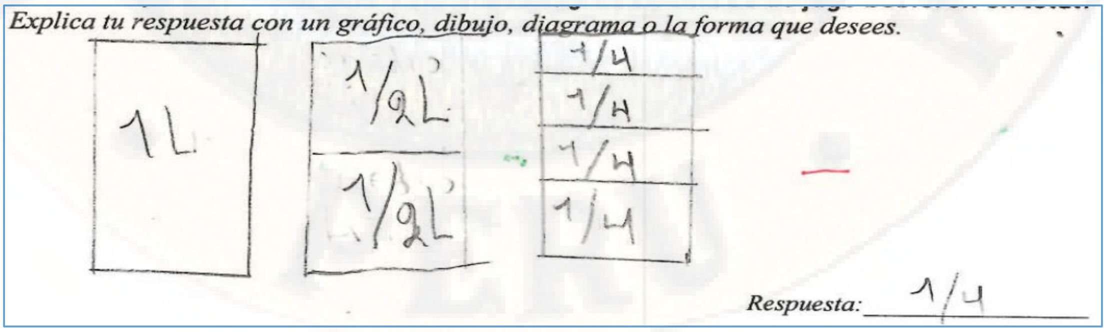
Los estudiantes están diferenciando y reconociendo las partes y el todo, han realizado una adición simple, natural y espontánea. Aquí se puede vislumbrar lo que “R. Duval sostiene que las representaciones semióticas son aquellas en las cuales la producción no puede hacerse sin la movilización de un sistema semiótico: así las representaciones semióticas pueden ser producciones discursivas (en lenguaje natural, en lenguaje formal) o no discursivas (figuras, gráficos, esquemas...). (Citado por Guzman, 1998). Además porque “esta producción no responde únicamente o necesariamente a una función de comunicación: puede responder también a una función de objetivación o a una función de tratamiento”



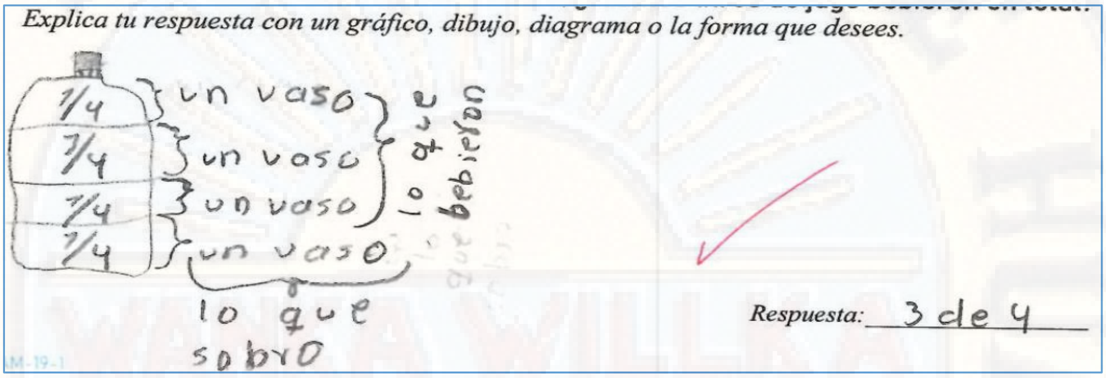


En estas evidencias, los estudiantes demuestran la comprensión de la noción de la fracción como parte-todo, han entendido que las partes en que se ha dividido la unidad lo indica el denominador de la fracción, mientras que las partes que se destacan están indicadas por el numerador (Quispe, 2011).

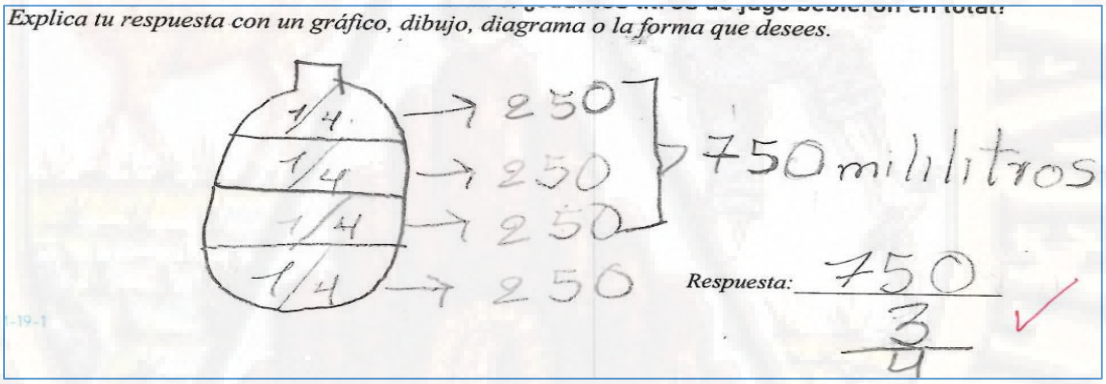
Es una representación gráfica que eligieron los estudiantes para resolver el problema.



A pesar de haber respondido equivocadamente a la pregunta, el estudiante ha representado adecuadamente el contexto del problema, hallando inclusive la equivalencia de una fracción. La mayoría de estudiantes ya no tuvieron las dificultades iniciales de reconocer el todo dividido en partes congruentes.



El estudiante está enunciando la respuesta de un modo diferente a lo usual, pero que si expresa el contexto de la fracción. Y ha expresado la respuesta en términos de una razón, aspecto que no necesariamente se abordó de manera explícita.



Este es el trabajo de un estudiante que podría demostrar el proceso de conversión que señala Duval, cambiar la representación de objetos o relaciones matemáticas de un sistema semiótico a otro es siempre un salto cognitivo (2006a), porque no solo ha dividido el todo en partes congruentes, sino ha asumido una interpretación de medida de capacidad (mililitros) y expresado la respuesta de dos formas diferentes, pero sin perder la naturaleza o contenido del problema planteado. Es lo que Marshall et. al señalan, que para el desarrollo de “una sólida comprensión de las matemáticas es no solo saber cómo usar una representación en situaciones de resolución de problemas, sino también poder hacer conexiones entre representaciones (2010, p. 40), refiere además que, la traducción requiere ‘conocimiento sobre las relaciones entre los diferentes tipos de diagramas que permiten a los solucionadores de problemas traducir la información de una representación a otra, de modo que la nueva representación conserve la información estructural transmitida por la representación original (p.41).

El análisis de los siguientes ítems está relacionado con fracciones, en cantidades discretas (como objetos, bolitas, caramelos, etc.) Pero, además, empleando medidas de peso (1 kg de papas, naranjas, etc.). (Pruzzo, 2012).

e) Comparativo ítem 5

En la actividad:

5. En el siguiente conjunto de canicas(daños), ¿qué parte representa el rectángulo?

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{5}{1}$ c) $\frac{1}{20}$ d) 5

Los resultados obtenidos tanto en la prueba de entrada y la prueba de salida fueron los siguientes:

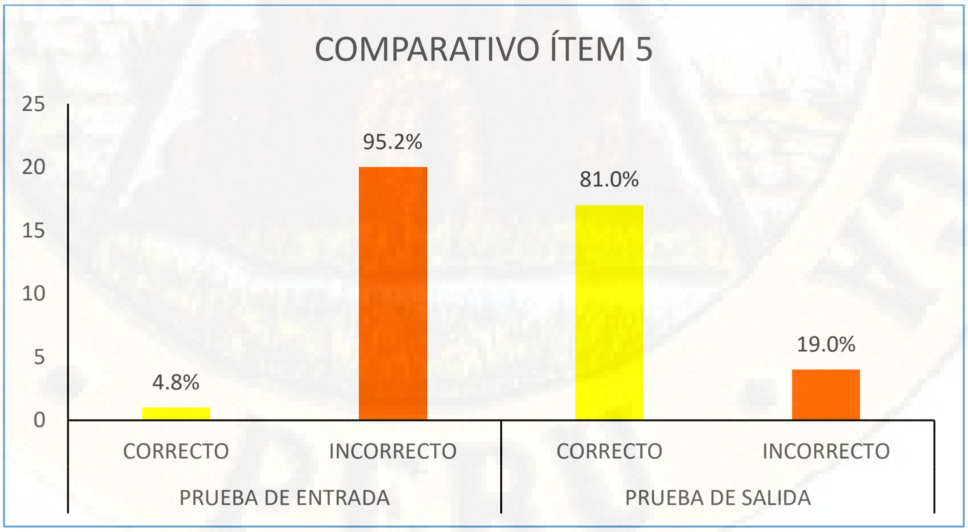


Figura 16. Resultado comparativo ítem 5. Elaboración propia, programa estadístico.

En la figura 16, nos permite observar estadísticamente que los cambios se han dado luego de la intervención pedagógica con las sesiones de aprendizaje enfatizando el uso de representaciones matemáticas. Si en la prueba de entrada 1 sólo estudiante, que representa el 4,8% de la muestra seleccionada respondió correctamente, en la prueba de salida la cantidad de estudiantes que respondieron correctamente fueron 17, que representan el 81% del total de estudiantes. En cambio, la porción de estudiantes que respondieron incorrectamente, que en la prueba de entrada fueron 20, lo que representa el 95,2%, descendieron en la prueba de salida a 4, lo que representa al 19% del total de estudiantes.

Analicemos las respuestas de los estudiantes en la prueba de entrada. La mayoría de estudiantes respondieron de la siguiente manera:

5. En el siguiente conjunto de canicas(daños). ¿qué parte representa el rectángulo?

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{5}{1}$ c) $\frac{1}{20}$ d) 5

En este caso, la respuesta expresa que, si bien pueden tener la noción de representación simbólica, porque identifican un numerador y denominador, no expresan lo que realmente representa pictóricamente, debido a que no es una representación usual de una fracción, no reconocen la fracción como parte-todo con cantidades discretas (colecciones). Así lo expresa Ríos (2007), que la enseñanza de las fracciones tiene una particularidad que luego genera muchas dificultades en su comprensión, la presentación de la definición bajo la interpretación parte-todo con representaciones gráficas con figuras geométricas, tales como círculo y el rectángulo. Así pues, el tratamiento de totalidad predominante es el continuo, no se considera el caso discreto (…). Este aspecto viene siendo una problemática de sistema, ya que, en los mismos textos y cuadernos de trabajo del cuarto grado del Ministerio de Educación del Perú, no aparecen actividades con cantidades discretas.

Otra cantidad de evaluados respondieron la alternativa d). Porque no reconocen que se pueda formar fracciones con este conjunto de objetos, y lo que hicieron es contabilizar los objetos independientemente.

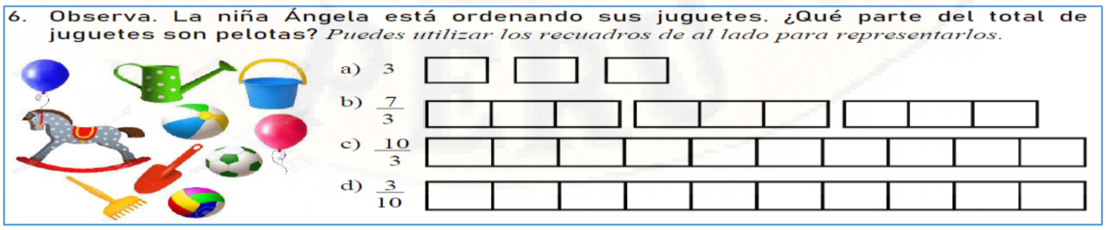

5. En el siguiente conjunto de canicas(daños). ¿qué parte representa el rectángulo?

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{5}{1}$ c) $\frac{1}{20}$ d) 5

Otro pequeño grupo de evaluados, respondieron que hay "1/20" lo que significa que, interpretaron que los daños (canicas) encerrados en el recuadro representan una parte de los 20 que hay en la colección. Lo que hicieron es solamente contar el total de daños y luego identificaron que hay un subgrupo, entonces señalaron que hay 1/20. Pero no se dan cuentan que el total es 20 y que el recuadro está expresando las 4 partes iguales formadas. La dificultad se presenta debido que, aquí el todo no es una unidad (un objeto, una figura, una torta) sino una colección de objetos, y que, si se puede dividir en partes congruentes, en este caso en 4 partes. El tratamiento de cantidades continuas y cantidades discretas necesariamente genera confusiones entre los estudiantes, más sino se ha trabajado con cantidades discretas, para ello, se requiere tener claridad en otros aspectos como, a qué se refiere cuando se hace mención a partes iguales y equivalencia, con el fin de que el estudiante al tener claras estas ideas, tenga fácil la transición hacia la parte numérica, comprender que la partición puede realizarse de objetos o de conjuntos (Arroyave, Ciro y Ocampo, 2016, p.53).

f) Comparativo ítem 6

La actividad planteada fue:


6. Observa. La niña Ángela está ordenando sus juguetes. ¿Qué parte del total de juguetes son pelotas? *Puedes utilizar los recuadros de al lado para representarlos.*

a) 3

b) $\frac{7}{3}$

c) $\frac{10}{3}$

d) $\frac{3}{10}$

Los resultados obtenidos tanto en la prueba de entrada y la prueba de salida fueron los siguientes:

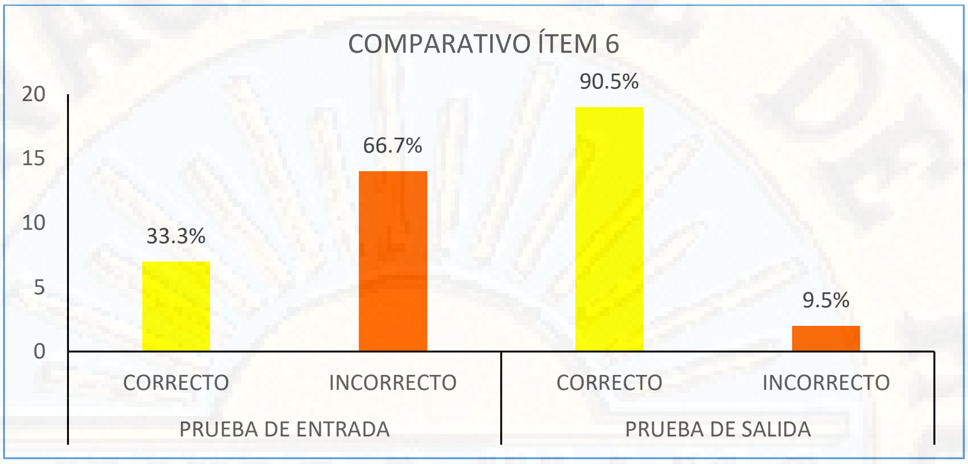
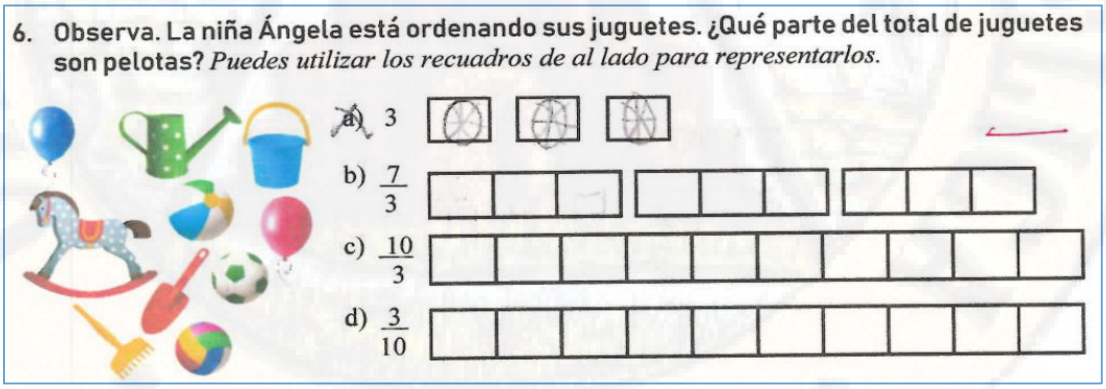


Figura 17. Resultado comparativo ítem 6. Elaboración propia, programa estadístico.

En la figura 17, muestra estadísticamente que la cantidad de estudiantes que respondieron correctamente en la prueba de entrada, que eran 7 y que representaban al 33,3% de la muestra, creció en la prueba de salida a 19, que representan al 90,5%. Y que la cantidad de estudiantes que respondieron incorrectamente descendió de 14, o sea 66,7%, a 2, que representa al 9,5% de estudiantes.

Procedemos a realizar un análisis sobre las respuestas de los estudiantes. V.gr. por qué los estudiantes marcaron la alternativa a).



6. **Observa. La niña Ángela está ordenando sus juguetes. ¿Qué parte del total de juguetes son pelotas?** *Puedes utilizar los recuadros de al lado para representarlos.*

a) 3

b) $\frac{7}{3}$

c) $\frac{10}{3}$

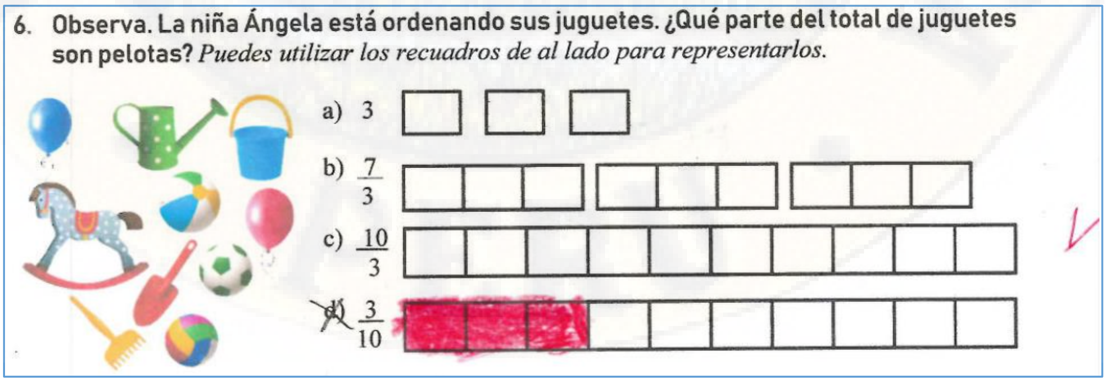
d) $\frac{3}{10}$

Teniendo en cuenta que esta fracción está expresada con cantidades discretas, los estudiantes eligieron esta opción, porque consideran los elementos de esta colección como independientes, y lo único que hicieron fue contar los elementos y representarlo simbólicamente, inclusive utiliza los cuadros para representarlo. Aquí se nota, que aún no ha desarrollado la noción de que una colección de objetos también puede formar un todo y dividirse en partes equivalentes o congruentes.

Lizarde (2014) refiere que, cuando se considera una cantidad discreta, hay que tener cuidado al querer darle sentido concreto a la relación parte-todo e incluso complejiza el sentido de la fracción impropia. Entonces no solo se trata de plantear actividades o problemas diversos, tanto con cantidades continuas o discretas, sino es necesario tener en claro que el tratamiento con cantidades discretas es más complejo, este autor citando a Fandiño (2009) plantea, por ejemplo, se pueden hallar los ¾ de 12 personas (se trata de 9 personas) pero es imposible darle sentido concreto a los 3/5. Sería necesario entonces distinguir: dada una unidad-todo discreta, existen algunas fracciones que tienen un sentido concreto y otras que no lo tienen (p. 50). A pesar de que en esta situación problemática la representación pictórica tiene una interpretación concreta, algunos estudiantes tuvieron la dificultad de relacionar el todo (colección de objetos) dividido en partes iguales.

Comprensión que fue superado en la prueba de salida, en el que, inclusive coloreaban lo que representaba la fracción. Debido a que, en las sesiones de aprendizaje, además de propiciar el uso de diversas representaciones matemáticas, se fue trabajando con cantidades continuas y discretas, en el desarrollo de las cuales, mediante la lista de cotejo se fue observando la dificultad que tenían los estudiantes en trabajar con cantidades discretas, sin embargo, les resultaba muy interesante.

Este es un ejemplo de las respuestas más frecuente en la prueba de salida:


6. Observa. La niña Ángela está ordenando sus juguetes. ¿Qué parte del total de juguetes son pelotas? *Puedes utilizar los recuadros de al lado para representarlos.*

a) 3

b) $\frac{7}{3}$

c) $\frac{10}{3}$

d) $\frac{3}{10}$

g) Comparativo ítem 7

Ante la pregunta:

7. Observa la siguiente imagen. ¿Cuál sería la expresión más adecuada?

a) Cada parte representa un entero.
b) Las cuatro partes representan ¼ del total.
c) Las dos partes representan 2/6 del total.
d) Cada parte representa 1/3 del total.

El procesamiento de datos tanto de la prueba de entrada y la prueba de salida nos arrojaron los siguientes resultados:

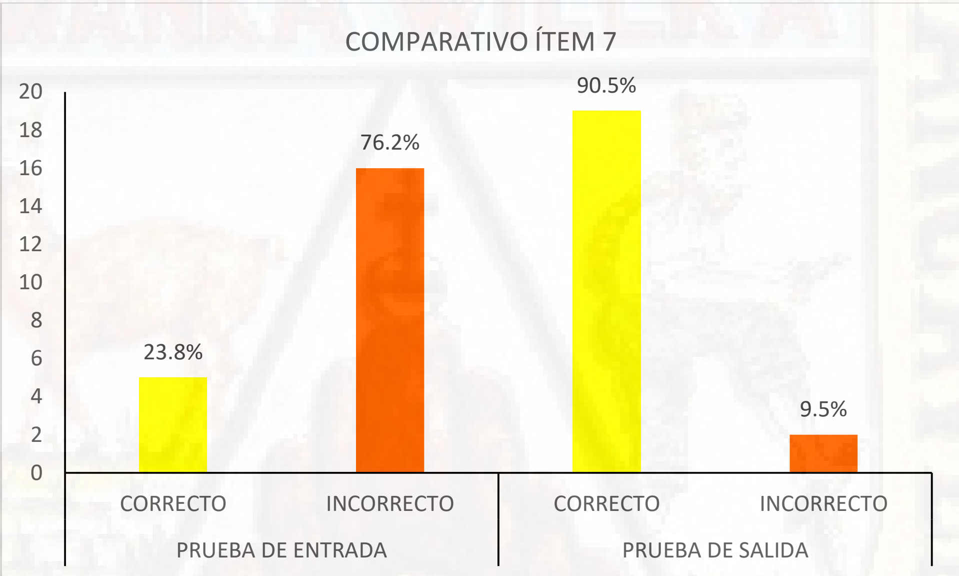


Figura 18. Resultado comparativo ítem 7. Elaboración propia, programa estadístico.

En la figura 18, muestra didácticamente que la situación inicial ha cambiado, la cantidad de 5 estudiantes que respondieron correctamente en la prueba de entrada se incrementó a 19, es decir de 23,8% 90.5%; en cambio, de 16 estudiantes que respondieron incorrectamente, se descendió a 2, es decir, de 76,2% a 9,5%. Esta actividad trataba de elegir una representación escrita a partir de una representación pictórica.

El análisis de las respuestas elegidas por los estudiantes nos permite deducir que:

7. Observa la siguiente imagen. ¿Cuál sería la expresión más adecuada?

a) Cada parte representa un entero.
b) Las cuatro partes representan ¼ del total.
c) Las dos partes representan 2/6 del total.
d) Cada parte representa 1/3 del total.

En este caso, los estudiantes están tomando como referencia de que hay solo cuatro porciones de chocolate para decir que las cuatro partes son un ¼ del total, pero no toman en cuenta que el total está formado por las seis unidades y no solo las cuatro porciones.

a) Cada parte representa un entero.
b) Las cuatro partes representan ¼ del total.
c) Las dos partes representan 2/6 del total.
d) Cada parte representa 1/3 del total.

En este caso, la dificultad radicaría en la confusión o por lo menos la poca claridad que tiene el estudiante de definir cuál es la parte y cuál el todo, ha considerado solo la parte fracturada, y no las seis porciones de chocolate que forman el todo, por otro lado, cada parte no podría representar 1/3, porque hay seis partes. Los estudiantes aún no han logrado comprender la noción de fracción como parte-todo, se observa que la noción de dividir en partes se convierte en un obstáculo para la comprensión de la fracción, porque solo se le considera como una parte desmembrada.

Algunos respondieron que "cada parte representa un entero" (alternativa a), lo que evidencia que no comprenden que un entero está formado de partes y las partes conforman un entero. No diferencian cuando un objeto (o colección) o una porción de él, forman un todo o una parte. Luego de la intervención pedagógica esta dificultad fue superada por la mayoría de estudiantes, tal como se observa en el gráfico.

Arroyave, et al. citando a Fandiño (2009) refiere que, si se considera la fracción como una relación parte-todo, hay una gran diferencia dependiendo si el 'todo' (la unidad), está constituido por algo continuo o si está constituido por un conjunto discreto, nuevamente se asume que es importante tener en cuenta la complejidad del abordaje de las cantidades discretas, para diseñar los procesos de aprendizaje.

h) Comparativo ítem 8

Ante la pregunta:

8. **Si doce tazas representan 2/3 de las que hay en la cocina. ¿Cuántas tazas hay en la cocina?** *Resuelve el problema utilizando un gráfico, dibujo, diagrama o la forma que desees.*

El procesamiento de datos tanto de la prueba de entrada y la prueba de salida nos muestran los siguientes resultados:

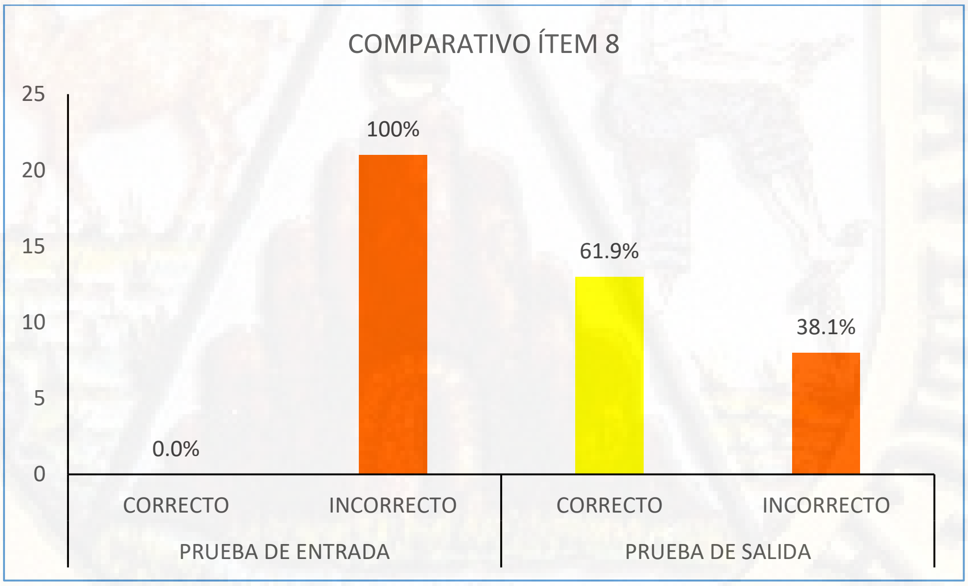
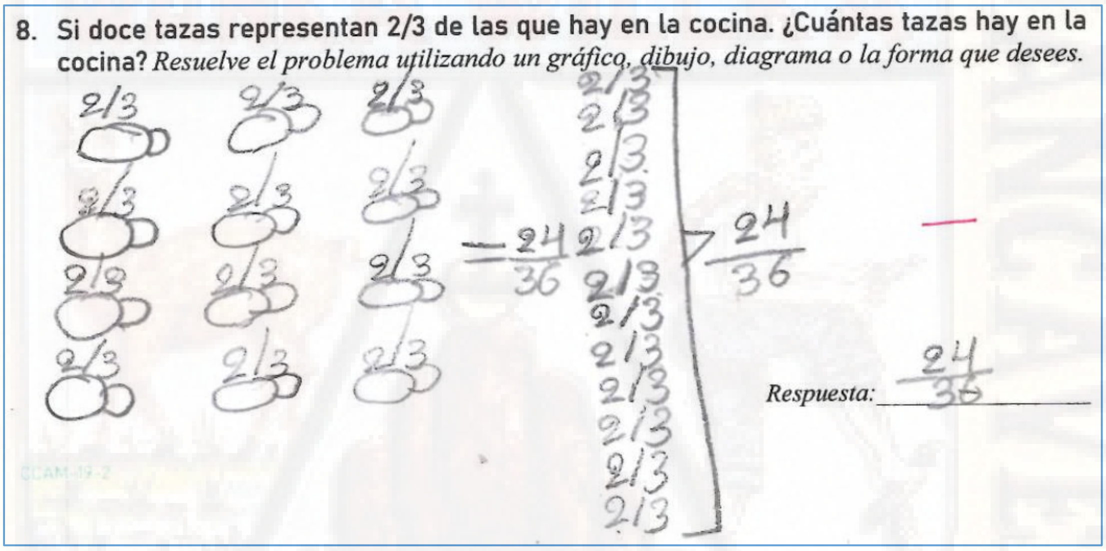


Figura 19. Resultado comparativo ítem 8. Elaboración propia, programa estadístico.

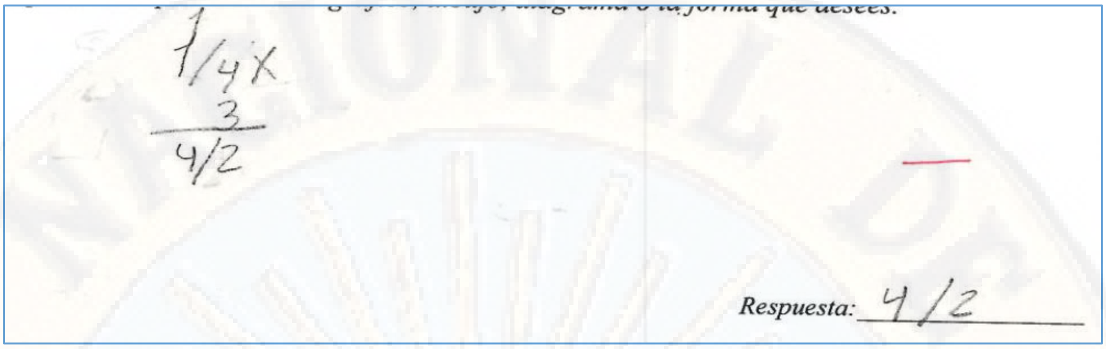
En la figura 19, se muestran comparativamente que los resultados han mejorado a diferencia de la prueba de entrada. Ningún estudiante respondió correctamente en la prueba de entrada pero que en la prueba de salida 13 estudiantes, es decir, 61,9% de los evaluados han mejorado esa situación, respondiendo correctamente. Y que del total de estudiantes que respondieron incorrectamente en la prueba de entrada, en la prueba se salida se redujo a 8 estudiantes, es decir a 38,1%.

Es oportuno mencionar que esta actividad tiene mayor complejidad a comparación de las 3 anteriores, porque además de identificar los datos para resolver el problema y la operación que puedan realizar, se les pedía que resuelvan el problema utilizando cualquier tipo de representación y el de su elección.

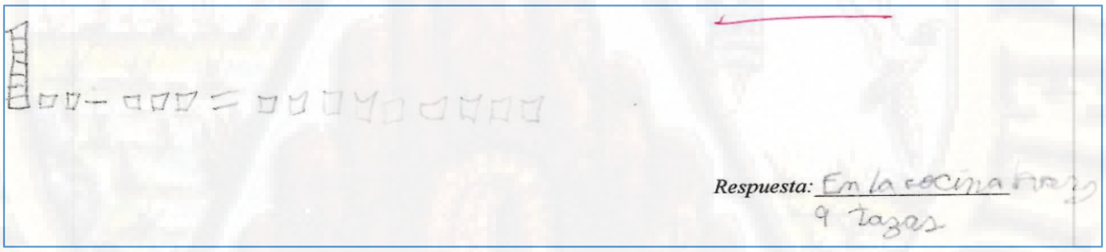
Analicemos algunas de las respuestas de los estudiantes en la prueba de entrada para deducir la concepción que tienen sobre las fracciones y las posibles dificultades que presentan.



En este caso el estudiante ha representado cada 2/3 como una taza y ha dibujado 12 tazas, para finalmente sumar los numeradores y denominadores, aplicando la noción de adición o multiplicación de números naturales. No ha relacionado la información de que 12 tazas es 2/3 del total, y lo que nos pide hallar es el total. Se muestra un limitado uso de la representación pictórica, solo ha utilizado una representación simbólica usual de una fracción. Además, de que la complejidad de este problema, es porque se trata de una fracción con cantidades discretas. Veamos otros ejemplos:



En esta otra evidencia, al igual que en la anterior aplicaron una técnica operativa con números naturales (multiplicación) para resolver el problema. En esta actividad se aprecia lo que Perera y Valdemoros (2009) consideran que, a pesar de que las tareas requieren como solución la identificación de fracciones, la generalidad de los niños ignoraron dicha solicitud y escribieron sólo números naturales, o bien, usaron los algoritmos de la aritmética que les son conocidos (p. 42), o lo que expresa Pruzzo(2012), cuando el alumno no ha asimilado el concepto de número fraccionario recurre al empleo de los esquemas asimiladores anteriores (el número natural) (p. 7), también lo refiere Lizarde (2014), cuando los niños comparan fracciones y no tienen bien construido el concepto, su conocimiento del campo de los números naturales se convierte en un distractor y fuente de errores (p. 519).

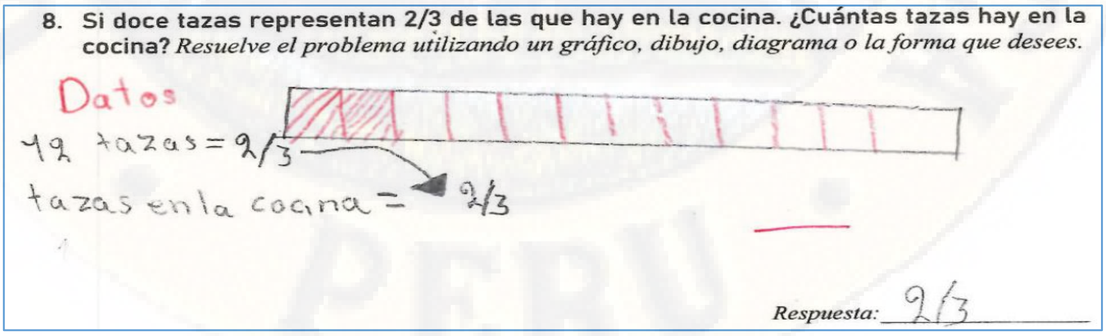


En este caso, la representación también corresponde al tratamiento que se les da a los números naturales, lo que se evidencia en la representación con Base Diez, así como la operación 12-3= 9.

Esta es otra evidencia parecida al de varios estudiantes, aquí representaron las doce tazas, tal como lo harían con números naturales, se nota que en este tipo de problemas con cantidades discretas no es fácil para los estudiantes reconocer el todo y las partes. No se dan cuenta de lo que trata el problema, tienen dificultad en comprender el sentido y contexto del problema. Esto debido a la pocas o nulas ocasiones que tiene los estudiantes de enfrentar a problemas de este tipo que tienen que ver con fracciones con cantidades discretas, tal como se puede evidenciar en los textos escolares y cuadernos de trabajo del Ministerio de Educación. Inclusive algunos optaron por no resolver el problema, dejando el espacio en blanco. Perera y Valdemoros, aseveran al respecto que, dejaron la colección de objetos sin fraccionar y, por tanto, sin distribuir; (…). Estos estudiantes carecen de los recursos que Kieren (1983, 1988) señala esenciales para la construcción de la fracción: la identificación de la unidad y su consiguiente partición (p.43).

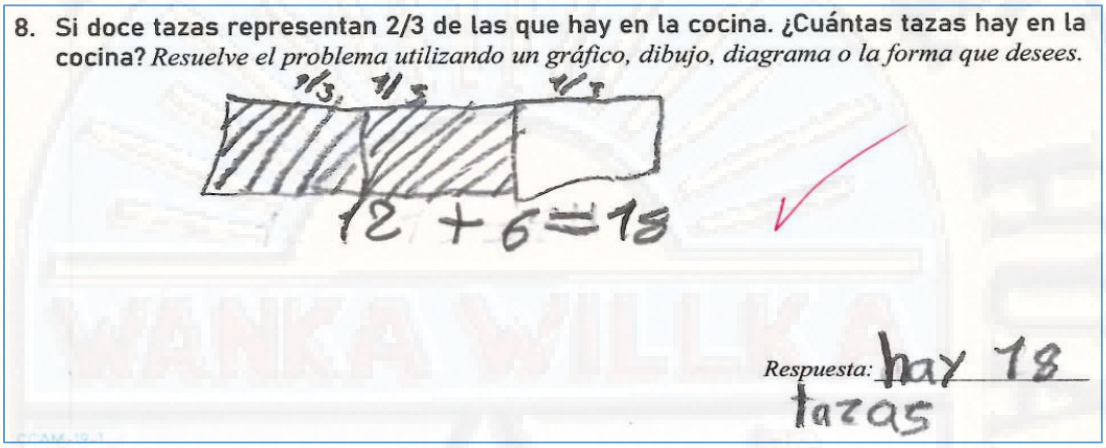
Quispe (2011) sustenta lo dicho en los siguientes términos, de los contextos continuo y discreto de la fracción como parte-todo, la que presenta mayor dificultad es del contexto discreto, por consiguiente, se fuerza a que el niño amplíe su esquema de la relación parte-todo (p.75).

Si bien es cierto, que luego de la experimentación aplicando las distintas formas de representación matemática, los resultados de aprendizaje mejoraron en la prueba de salida, sin embargo, un buen porcentaje de estudiantes siguen mostrando algunos errores de comprensión y representación, a pesar de haber enriquecido o incorporado una variedad de representaciones, verbigracia:

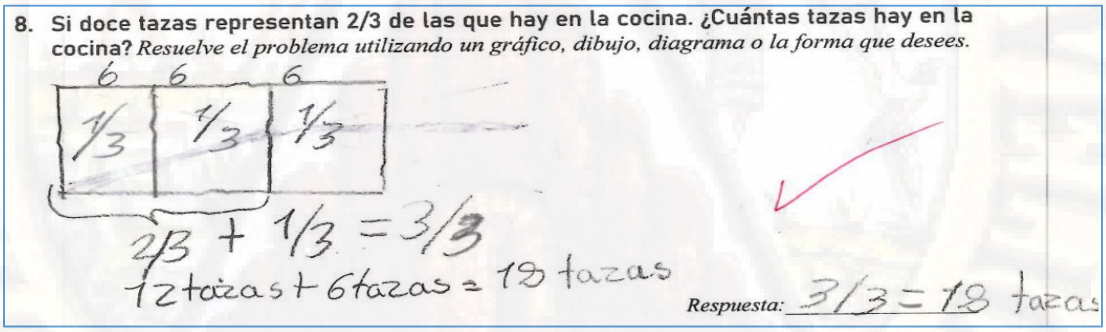


Al estudiante aún le resulta difícil establecer cuál sería el todo y las partes, es que tampoco es una operación sencilla, Llinares y Sánchez, citados por Pruzzo, manifiestan que, resulta muy difícil concebir la diferencia entre tomar partes de un todo y repartir uno o varios todos (p. 6).

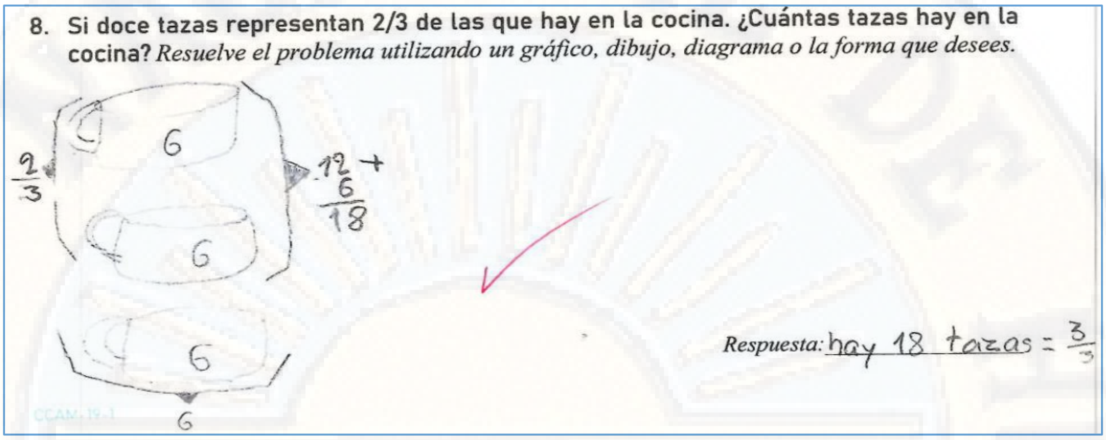
Por otro lado, luego de la aplicación de las diferentes formas de representación, en la prueba de salida se puede visualizar formas de representación diversas y muy creativas de parte de los estudiantes:



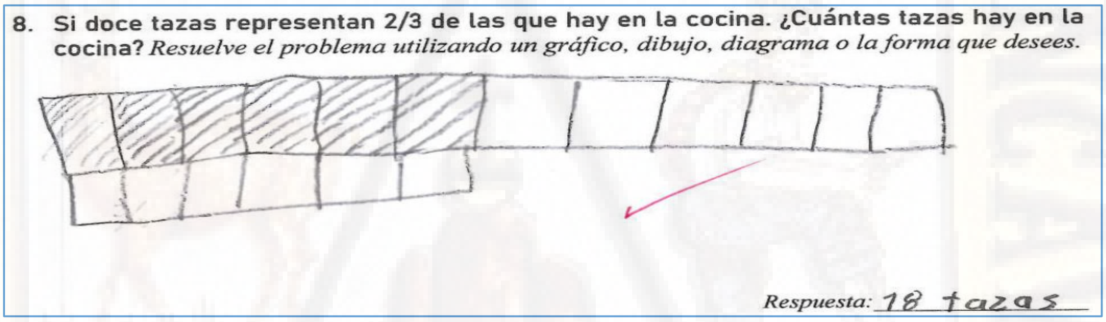
En este caso, solo ha graficado y relacionado la fracción con la cantidad de tazas, no requirió de la técnica operativa de la adición de fracciones. Reconocer que 2/3 implica estar tomando 2 partes de las 3 que tiene la cantidad total de tazas, le ayudó a resolver el problema, por lo tanto, solo faltaba saber cuánto es la otra parte para hallar el total de tazas.



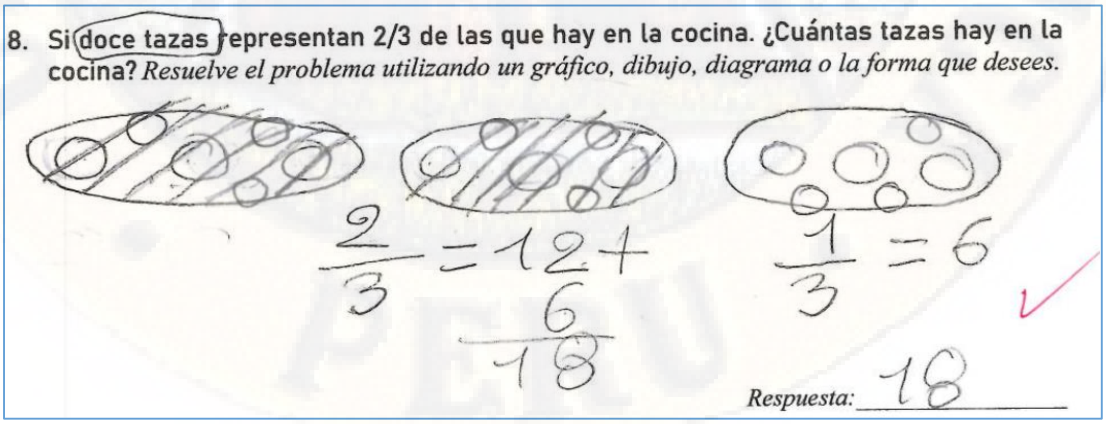
Algo similar sucede en este caso, a pesar de no haber respondido la pregunta del problema, hay que destacar que el estudiante tuvo la intención de relacionar los 3/3 como el total de tazas, concluyó que cada parte es 1/3, que equivales a 6 tazas, y que en la situación planteada hay 3/3 que representa al todo, 18 tazas. Relacionado a este aspecto de mejora, Moreno et. al. (2017) hace referencia de que una de las ventajas de utilizar las representaciones semióticas es que, el hecho de presentar los objetos matemáticos a través de sus múltiples representaciones permite atender a las singularidades de aprendizaje de cada alumno, optando por unas u otras y coordinándolas entre sí, en función de sus estilos cognitivos (p. 5).



En este caso, el estudiante realizó una representación pictórica, lo fundamental fue identificar una de las tres partes como 6 tazas, relacionar los 2/3 con 12 tazas y luego sumar los otros 6 que representan 1/3 del total.



En esta otra evidencia, una representación gráfica, lo que hizo el estudiante es representar las tres partes, y cada una de ellas dividirla en tantas partes como tazas conforman esta porción. Para luego simplemente contar el total de cuadritos.



Esta evidencia nos muestra una representación más elaborada, ha utilizado una representación gráfica, simbólica y ha realizado algunas operaciones. Ha destacado la cantidad de 12 tazas como 2/3, por lo tanto, ha dibujado las 12 tazas dividido en dos grupos, porque cada uno es 1/3, inclusive lo ha destacado con trazos oblicuos. Luego ha agregado el 1/3 que faltaba. Es notorio, que el estudiante ha comprendido que la colección de tazas es el todo y está dividido en 3 partes iguales. Así lo hicieron también algunos otros estudiantes.

Pero es claro, que no todos los estudiantes han logrado comprender la noción de fracciones como parte-todo con cantidades discretas, como muestra de ello, es el resultado comparativo del ítem 8, que requiere una atención especial y amplia.

Finalmente, estos resultados comparativos nos muestran de manera específica, los cambios suscitados producto de la intervención pedagógica realizada, es decir, producto de la ejecución de las sesiones de aprendizaje enfatizando el uso de las representaciones matemáticas, porque permitió brindar a los estudiantes una oportunidad de relacionarse con una variedad de representaciones matemáticas y con cantidades que no son usuales en su contexto educativo. Siguiendo la línea teórica de Duval (2006a), la comprensión (matemática) no significa dar un salto desde el contenido de una representación hasta el concepto puramente matemático representado sino en relacionar diversos contenidos de representación del mismo concepto, y las sesiones de aprendizaje desarrolladas por el investigador, asumiendo el rol de docente, cumplió esa función, no, de que se aprendieran el concepto matemático, sino utilicen y movilicen las distintas formas de representación matemática, para que logren comprenden la noción de fracciones como parte-todo con cantidades continuas y discretas. Tamayo (2006) en términos más específicos dice que, en el proceso de construir estas representaciones semióticas, una de las funciones principales de los maestros, sino la más importante referida al proceso de enseñanza-aprendizaje, es la de hacer evidente a sus estudiantes los procesos de transformación y de conversión que se requieren para el paso de una representación a otro (p. 47). Marshall, et. al (2010) refrendan lo dicho, los maestros deben ayudar a los alumnos a comprender que las representaciones son herramientas para modelar e interpretar fenómenos matemáticos, representar aspectos de situaciones en términos matemáticos y enfatizar la importancia de representar ideas matemáticas de diversas maneras (p. 40). Porque el uso de representaciones no es un aprendizaje espontáneo, sino más bien intencional y consciente. Consideramos todavía una tarea pendiente en nuestro contexto escolar próximo.

4.2 Proceso de prueba de hipótesis

Se utilizó la prueba no paramétrica de Wilcoxon, teniendo en cuenta que los datos son asimétricos y que se trabajó con un solo grupo de 21 estudiantes con la aplicación de una prueba de entrada y salida. La prueba de hipótesis se realizó con los siguientes procedimientos:

4.2.1 Definición de hipótesis estadística:

a) **Hipótesis nula:** Las medias comparadas de la prueba de entrada y de salida luego de la aplicación de las formas de representación matemática son iguales.

H_o : $P_1 = P_2$

b) **Hipótesis alterna:** Las medias comparadas de la prueba de entrada y de salida luego de la aplicación de las formas de representación matemática son diferentes.

H_A : $P_1 \neq P_2$

4.2.2 Nivel de significancia:

El nivel de significancia es de 5% = 0,05%

4.2.3 Determinación del uso de prueba estadística:

Habiendo aplicado la prueba de Shapiro Wilk, se encontró que los datos son anormales o asimétricos, por lo tanto, se determinó una prueba estadística no paramétrica, la prueba de Wilcoxon.

4.2.4 Calcular p-valor

Aplicando la prueba de Wilcoxon en el SPSS, la tabla obtenida es el siguiente:

Tabla 17

Prueba de Wilcoxon

Estadísticos de prueba[a]

	PRUEBA DE SALIDA - PRUEBA DE ENTRADA
Z	-3,923[b]
Sig. asintótica(bilateral)	**,000**

a. Prueba de rangos con signo de Wilcoxon

b. Se basa en rangos negativos.

Fuente: Programa estadístico

Donde el p-valor hallado = **0,000**

4.2.5 Toma de decisiones

Se comprueba que p-valor es menor que el nivel de significancia, es decir, menor que 0,05, por lo tanto, se rechaza la hipótesis nula y se acepta la hipótesis alterna, es decir, estadísticamente se comprueba que las medias comparadas de la prueba de entrada y de salida luego de aplicar las formas de representación matemática son diferentes, veamos:

Tabla 18

Comparativo de medias

		PRUEBA DE ENTRADA	PRUEBA DE SALIDA
N	Válido	21	21
	Perdidos	0	0
Media		**,95**	**2,43**
Mediana		1,00	2,00
Moda		1	2[a]

a. Existen múltiples modos. Se muestra el valor más pequeño.

Fuente: Programa estadístico

Por lo tanto, se acepta que las formas de representación matemática influyen positivamente en el aprendizaje de las fracciones de los estudiantes de cuarto grado de Educación Primaria.

En consecuencia, también se aceptan las hipótesis específicas planteadas en el trabajo de investigación:

- La aplicación de las formas de representación matemática influyen positivamente en el aprendizaje de las fracciones parte-todo con cantidades continuas en el cuarto grado de Educación Primaria.
- La aplicación de las formas de representación matemática influyen positivamente en el aprendizaje de las fracciones parte-todo con cantidades discretas en el cuarto grado de Educación Primaria.

  Confirmándose las hipótesis de investigación formulados.

4.3 Discusión de resultados

La investigación tuvo el propósito de determinar si existe influencia positiva entre la aplicación de las distintas formas de representación matemática en el aprendizaje de las fracciones con estudiantes del cuarto grado de Educación Primaria del distrito de Ascensión y provincia de Huancavelica.

Respecto al objetivo general, determinar la influencia de la aplicación de las formas de representación matemática en el aprendizaje de las fracciones en el cuarto grado de Educación Primaria, el presente estudio ha demostrado que influye positivamente, mediante la prueba estadística de Wilcoxon, con p-valor de 0,000, menor al nivel de significancia.

Significa que la aplicación de la variable independiente, es decir, aplicar las formas de representación matemática en el aprendizaje de las fracciones, ha sido favorable, lo que se demuestra en los resultados obtenidos. Pero ¿por qué podría haber influenciado significativamente en el aprendizaje de los estudiantes?

Ya decía Duval (2006a) en su artículo denominado “Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación”, que la actividad matemática se realiza necesariamente en un contexto de representación y en el uso de diversas formas de representación, por lo que, no se puede hacer matemática, y mucho menos en escuelas primarias, alejadas de la representación matemática; y que esos contextos de representación en la matemática son necesariamente semióticos.

En el tema de las fracciones, no se puede aprender alejada de estas condiciones cognitivas. Tal como se evidenció en la prueba de entrada, donde los estudiantes no utilizan o a veces utilizan representaciones de las fracciones, limitadas y hasta equivocadas. Sin embargo, luego de la intervención pedagógica aplicando las formas de representación matemática, mediante sesiones de aprendizaje, en la prueba de salida, los estudiantes tenían ya mayores referencias para utilizar las diversas representaciones que se adecuaban mejor a las situaciones problemáticas planteadas. Inclusive se muestra acciones de conversión, que como refiere el mismo Duval, es un proceso cognitivo más complejo que el tratamiento, que implica cambiar la representación de objetos o relaciones matemáticas de un sistema semiótico a otro, tal como se puede observar en la presentación de datos. La capacidad de realizar conversiones depende de la habilidad de movilizar diversas representaciones, de manera interactiva y en paralelo, este proceso nos garantizaría la comprensión conceptual de las fracciones.

Sin duda, el tratamiento o abordaje de las fracciones, tampoco es simple, sino más bien complejo, “la transformación de las representaciones semióticas es intrínseca a cualquier contenido matemático. Y aquí radica una de las principales fuentes de las dificultades o, más precisamente, la complejidad cognitiva del aprendizaje de las matemáticas” (Duval, 2006b). Si muchos de los estudiantes tienen dificultades en la adquisición de los números naturales y sus operaciones, que es el contenido más ampliamente estudiado y tratado, imaginémonos el abordaje de las fracciones; es entonces cuando surge revitalizado el papel fundamental que cumplen las representaciones semióticas y más específicamente el desarrollo de las transformaciones semióticas en todas las actividades matemáticas. Y lo que se hizo en este estudio es aplicar los aportes importantes de la representación semiótica a través de las sesiones de aprendizaje.

En esa misma línea, Camargo (2013) expresaba que no es suficiente la exposición del docente para que se pueda adquirir un concepto, se debería recurrir a diferentes registros de representación y para ello eran fundamentales las actividades que se propongan a los estudiantes, que no es suficiente proponer actividades para que los estudiantes puedan aprehender los conceptos o contenidos matemáticos, sino básicamente actividades que permitan la conversión, lo que implica utilizar por lo menos dos registros semióticos diferentes. (p.1844). Es por esta razón, la vital importancia de que los estudiantes en la Educación Primaria desarrollen los aprendizajes de la matemática utilizando los diversos tipos de representación, y más que eso transitando de una a otra de acuerdo a las situaciones que se les plantee. Al respecto, producto de un estudio muy serio, Oviedo, Kanshiro, Bnzaquen y Gorrochategui (2012) planteaban literalmente que, el pasaje de un sistema de representación a otro o la puesta en juego simultánea de varios sistemas de representación en el desarrollo de una clase no resulta, para nada, evidente o espontáneo para nuestros alumnos. En general les cuesta reconocer el mismo objeto a través de sus representaciones en distintos registros semióticos (p.31). Entonces mientras los estudiantes, no tengan experiencias de representación, tratamiento y conversión de estas representaciones, no tengan oportunidades de representar los conceptos o contenidos matemáticos, porque no son reales, solo podemos acceder a ellas mediante la representación, es poco probable que comprendan el sentido de lo que quieren aprender y también lo que, los docentes deseen enseñar.

Sobre los objetivos específicos planteados: 1. Determinar la influencia de las formas de representación matemática en el aprendizaje de las fracciones parte-todo con cantidades continuas en el cuarto grado. 2. Determinar la influencia de las formas de representación matemática en el aprendizaje de las fracciones parte-todo con cantidades discretas en el cuarto grado.

Se puede aseverar, y que está muy relacionado con lo antes señalado, que se ha notado, que las mayores dificultades y errores expresados por los estudiantes se encuentra en el uso de diversas formas de representación matemática, así como en la resolución de problemas con fracciones parte-todo con cantidades discretas, y esto obedece al tema del tratamiento del contenido matemático por parte de los docentes, el aprendizaje de las fracciones se ha desarrollado siempre y únicamente a partir de la representación gráfica y simbólica, tal como se evidencia en las pruebas desarrolladas por los estudiantes, donde la mirada está en lo usual, lo gráfico y simbólico, dejando de lado lo vivencial, lo concreto, lo pictórico. Así lo refería Godino citado por Gamboa, Castillo e Hidalgo (2019), la abstracción y generalización de las matemáticas es una posible causa de las dificultades de aprendizaje (p. 8), también Freudenthal (1993) señalaba que, tras estas divisiones concretas del pastel —en fracciones propias solo— se introduce inmediatamente al estudiante en la división abstracta de cantidades y valores de magnitudes presentados abstractamente. (p. 14).

Estos problemas inducen a los estudiantes a cometer ciertos errores, por ejemplo, al expresar en lenguaje matemático una situación expresada en lenguaje natural, o del lenguaje natural a un lenguaje gráfico. Pero también les induce a hacer asociaciones incorrectas, por ejemplo, aplicar la técnica operativa de números naturales para desear operar del mismo modo con las fracciones. También estos errores se deben al poco o nulo repertorio de experiencias de representación.

El repertorio de experiencias, de recursos cognitivos, del uso de estrategias se deben sí o sí a la aplicación y uso de las formas de representación matemática, vivencial, concreta, pictórica, gráfica y simbólica, retomando de la propuesta original las expresiones verbales o escritas (palabras). Estas fueron las formas de representación que se utilizaron para el abordaje de las fracciones tanto con cantidades continuas como con cantidades discretas. El Ministerio de Educación, refiere que el uso de estas representaciones están estrechamente vinculados con el desarrollo del pensamiento del niño, y que este proceso se inicia cuando el estudiante interactúa con el entorno inmediato, así como cuando manipula materiales concretos, avanzando a un nivel más abstracto, cuando realiza representaciones pictóricas y gráficas de lo vivenciado, y se va consolidando cuando emite representaciones simbólicas, lo que le permite comprender el conocimiento matemático. Porque el tránsito de una representación a otra, va mostrando que se está comprendiendo las nociones, conceptos o contenidos matemáticos. Sugiere que primero se pueda trabajar en la misma representación para luego aprender a transitar a otra, por ejemplo, en el nivel concreto con chapitas, palitos, material Base Diez, regletas, etc. También refiere que, para la adquisición del lenguaje matemático, el estudiante debe transitar inicialmente de expresiones coloquiales, a expresiones simbólicas y finalmente a un lenguaje técnico y formal. (pp. 26-28).

Un aspecto importante que necesita ser destacado es el uso de los materiales educativos, estructurados y no estructurados, como parte sustancial de la representación concreta, tal como señala Fazio y Siegler, los estudiantes deben ser alentados a utilizar objetos concretos, dibujos u otras representaciones que los ayuden a resolver los problemas (p. 9), considera además que, una forma de mejorar la comprensión conceptual es el uso de material didáctico manipulativo y la representación visual de las fracciones (p. 12), así se entendimos y se puso en práctica, en el desarrollo de todas las sesiones de aprendizaje se utilizaron diversos materiales, eso contribuyó en gran medida en la comprensión del significado fracción parte-todo con cantidades continuas y discretas.

Marshall, Castro y Canty afirman que, los maestros deberían ayudar a los estudiantes a comprender que todas las representaciones que se hagan, son herramientas que sirven para modelar o interpretar conceptos o contenidos matemáticos, que son representaciones de diversas situaciones en términos matemáticos, para ello, es fundamental que los docentes apliquen estrategias para que los estudiantes aprendan cómo y cuándo hacer representaciones y como hacer conexiones entre estas, el diálogo, alternar el uso de representaciones y la selección intencional.

Respecto a los antecedentes de la investigación, podemos expresar que, Martínez y Meza (2017), concluyeron que se había obtenido cambios favorables en la comprensión del proceso de la adición con fracciones como parte de un todo utilizando el juego de regletas A3, y que estos cambios se evidencian en los procesos llevados a cabo por los estudiantes a través de las diferentes representaciones matemáticas, sin duda, teniendo en cuenta, lo propuesto por Marshall y colaboradoras (2010), el uso de las regletas A3 tiene que ver con la representación concreta, y que, no solo usaron este tipo de representación sino otras que ayudaron a comprender la noción de la adición de fracciones. Por lo tanto, como se ha determinado en la presente investigación, la aplicación y uso de las distintas formas de representación coadyuvan a una mejor comprensión de los contenidos matemáticos, en este caso en la comprensión de las fracciones con cantidades continuas y discretas, en el caso de estos investigadores, en el aprendizaje de la adición de fracciones.

Gonzales (2015), en su investigación denominado *Errores comunes en el aprendizaje de las fracciones: Un estudio con alumnos de 12/13 años en Cantabria,* encontró que, el 94 % de estudiantes comenten errores por defectos en la comprensión del concepto y un 77% incurren en la aplicación sistemática de procedimientos erróneos, concluyendo que, la dificultad en la enseñanza y aprendizaje de fracciones, tienen que ver con la interpretación de ciertos aspectos de la idea de fracción: considerar la división como un aspecto de la fracción, entender la fracción como un número y la equivalencia de fracciones. Asimismo, planteó que, si bien el uso de modelo parte-todo, parece adecuado para la introducción de las fracciones en los primeros años, al mismo tiempo parece obstaculizar la ampliación de los significados de fracción, y que al parecer las dificultades con las fracciones son resultado de la incapacidad de establecer una conexión entre el modelo geométrico y la forma simbólica abstracta de una fracción. Proponiendo abandonar este modelo geométrico en cursos superiores, y presentar la idea de fracción en un contexto más amplio. Los resultados de la presente investigación concuerdan en que, el aprendizaje de la noción de la fracción parte-todo, a pesar de ser la más habitual, no es de fácil comprensión, además porque se presentan con cantidades continuas y discretas, y que esta última resulta siendo la que representa mayor dificultad para los estudiantes, por su poco abordaje y su mayor complejidad, tal como se ha demostrado con la aplicación de la prueba escrita. Además, se ha probado que, la forma de representación común de las fracciones que conocen los estudiantes, es la representación gráfica, en forma de pastel, rectangular y triangular, lo que limita su perspectiva de otras formas de representación de las fracciones, verbigracia, resulta siendo un obstáculo para comprender las fracciones con cantidades discretas y la asunción de distintas representaciones, por lo tanto, se debe de trabajar con las distintas formas de representación, superando el modelo circular, rectangular y triangular, así como solo el trabajo con cantidades continuas, y abordando las diferentes nociones de las fracciones progresivamente. Marshall, Castro y Canty (2010) en este sentido producto de sus investigaciones expresan que, traducir y moverse con flexibilidad entre las representaciones es un aspecto clave de la comprensión matemática de los estudiantes (p.39). Es en esa misma línea que, Vieyra (2010) en su estudio *Comunicación matemática en las primeras edades: representación de problemas aritméticos,* concluyó que, los alumnos de 7 y 8 años, frente a un problema de repartición no rutinario (no común, de la vida real, por ejemplo), utilizan diferentes tipos de representaciones para resolverlo, por lo tanto, consideran que el maestro, al escoger sólo problemas aritméticos de repartición rutinarios (modelos matemáticos, modelos algorítmicos), quita al alumno la posibilidad de resolverlo mediante la utilización de varios tipos de representaciones, además se debe tener en cuenta, que aparte de la representación a través del lenguaje matemático propiamente dicho, que las representaciones a través del dibujo o el lenguaje verbal escrito son importantes, valorando de éste modo las "matemáticas informales" de los estudiantes. Justamente en el estudio, se resalta la necesidad de que los estudiantes transiten de una representación a otra, como garantía de una comprensión efectiva, y que en ese proceso los estudiantes vayan eligiendo las representaciones matemáticas más adecuadas a la situación que se le presente, a su experticia o a cómo quiere resolverlo; en ese sentido, es importante que el estudiante vivencie el uso de las diferentes formas de representación matemática, tarea que es responsabilidad del docente de aula. Recordando que, en toda actividad matemática, a decir de Duval (2006a), lo que importa es su propiedad de **transformación** porque *el procesamiento matemático* siempre implica alguna transformación de representaciones semióticas (la conversión y el tratamiento) y que, aunque los individuos empleen diversos sistemas de representación semiótica solo elijan una según el propósito de la actividad (p.145).

Rico (2007) en su trabajo *Estrategias para el aprendizaje de las fracciones con los alumnos del 5° grado,* concluía que, la aplicación de diversas estrategias y actividades, el uso de materiales concretos en la construcción del conocimiento matemático, haciendo flexibles las actividades planeadas, dándoles la pauta a seguir, relacionándolo con los conocimientos previos, buscando la interacción del grupo en todo momento y despertando el gusto por las matemáticas, permitieron que el grupo logre comprender el significado de las fracciones y su operatoria en diferentes contextos al manipular diversos materiales que ellos mismos construían y al resolver diferentes situaciones problemáticas relacionada con la vida dentro y fuera del aula. Duval (2006a) refería que, en la matemática, los objetos de conocimiento (los números, las funciones y sus propiedades…) no son accesibles físicamente, a través de evidencias sensoriales directas o mediante el uso de instrumentos. La única forma de acceder y trabajar con ellos es a través de signos y representaciones semióticas (p.157). Por lo tanto, el uso de materiales concretos, en el aprendizaje de cualquier contenido matemático, es vital, así se corrobora en el presente estudio, debido a que, todas las actividades desarrolladas como parte de la aplicación experimental de las distintas formas de representación matemática en el aprendizaje de fracciones, partieron del uso de materiales concretos, envases, regletas de colores, palitos, botones, chapas, recortes de figuras, etc. Hecho que facilitó, inclusive, la comprensión de otras nociones, por ejemplo, la equivalencia de fracciones, los tipos de fracciones (fracciones propias, impropias y mixtas) y la adición de fracciones.

Niño y Raad (2018) en *Interpretación de “la fracción como relación parte-todo” en contextos continuos y discretos, a partir de la implementación de una secuencia didáctica que privilegia la competencia comunicativa*, concluyeron que, es necesario fortalecer el estudio de la fracción y su relación como parte-todo, tanto por parte de los docentes como de los estudiantes, y que, con frecuencia, el manejo de la fracción se realiza en las aulas con una orientación docente que hace más difícil la comprensión de esta. Asimismo, para que los estudiantes logren dominar todos los aspectos relacionados a las fracciones (todo-parte y parte-todo), se exige un recorrido previo que denota comprensión, y sólo así, el estudiante estará en la capacidad de manejar los atributos de la fracción, sus contextos y representaciones. La aplicación de las formas de representación matemática, requiere indefectiblemente, una acción intencional del docente que debe planificar las sesiones de aprendizaje, previendo la secuencia didáctica, las actividades, las estrategias, los materiales, los modos y los roles que se deben asumir, tal como se puede observar en el anexo correspondiente, solo así, se podría garantizar que los estudiantes puedan vivenciar el uso de las formas de representación matemática, porque no es una acción espontánea o esporádica, sino requiere una atención sistemática. Asimismo, el uso de la competencia comunicativa, tiene que ver con el uso de las palabras, como expresiones verbales y escritas, a decir de Marshall y colaboradoras (2010), las mismas que se han vivenciado en el proceso de experimentación en la presente investigación, juegan un papel importante en la comprensión de las fracciones como parte-todo con cantidades continuas y discretas. Por lo tanto, se encuentra más argumentos para fundamentar la importancia de las distintas formas de representación en el aprendizaje de cualquier contenido matemático.

Gutierrez (2012), en su tesis titulado *Material didáctico para el aprendizaje de fracciones y decimales en niños y niñas del sexto grado,* concluyó que, los estudiantes que aprenden fracciones y decimales a través de materiales didácticos obtienen un promedio de rendimiento académico más aceptable y homogénea, que contribuye sustancialmente en el desarrollo del pensamiento matemático, ya que permite al estudiante conocer, descubrir y explicar objetivamente los conceptos, leyes, etc. Estudio que respalda a los resultados obtenidos en la presente investigación, porque como se observó en los resultados estadísticos, los promedios de la prueba de entrada y de salida difieren significativamente, producto de la intervención pedagógica aplicando las formas de representación matemática, donde se hace gala del uso de diferentes recursos educativos que permitieron la fácil y mejor comprensión de las fracciones, observándose además, que todos los estudiantes participantes de la experiencia obtuvieron un mejor bagaje para afrontar las situaciones problemáticas que se les plantea, superando sus dificultades, errores y obstáculos.

Carrillo (2012), en cambio, en su trabajo referido al análisis de las concepciones de fracción que se presenta en el texto escolar de quinto grado de Educación Primaria, concluyó que, en el texto escolar se ha identificado el uso de dos concepciones de fracción con mayor predominancia: como parte-todo y como operador; la noción de fracción como parte-todo es la que predomina y se presenta en la mayoría de las actividades; la concepción de fracción como operador, aparece como fracción de un número, y se presenta en algunas actividades. Refiere además que aparecen algunas representaciones figurales, que deben ser utilizados adecuadamente de acuerdo a cada tipo de fracción, ya que, pueden favorecer o desfavorecer el aprendizaje de las mismas. Como se observará en las sesiones de aprendizaje del anexo 9, como parte de la experiencia pedagógica de la aplicación de las formas de representación matemática, se previó el uso de los textos escolares y cuadernos de trabajo del cuarto grado dotados por el Ministerio de Educación, en el que se corrobora los hallazgos de Carrillo (2012), en vista de que, existen actividades con predominancia de las fracciones parte-todo, seguramente, porque corresponden a la propuesta curricular nacional, sin embargo, únicamente presentan fracciones con cantidades continuas y no hallándose actividades con cantidades discretas; lo que, como se ha expresado líneas arriba y como aseveran los resultados de las investigaciones, puede representar una limitante en la enseñanza y aprendizaje de las fracciones.

Castro (2017), en tesis denominada *Comprensión del concepto de fracción en los estudiantes en formación inicial de Educación Primaria. Una mirada desde la teoría de campos conceptuales,* concluyó que, los docentes en formación del grupo de estudio, tienen serias dificultades en la comprensión de las fracciones, solo mostraban leer y escribir numéricamente una fracción propia o impropia sin contexto alguno, representaban gráficamente algunas fracciones propias y lo hacían solo de manera parte-todo con cantidades continuas y que no manejaban fracciones equivalentes, no atendían al «todo» en una expresión y solo usaban una representación de la fracción, generalmente la numérica. En el planteamiento del problema del estudio, se afirma que, hay dificultades en el aprendizaje de la matemática por ello los bajos resultados en las pruebas estandarizadas, lo que obedecería a diferentes factores, y una tendría que ver, con el qué y cómo se enseña la matemática, específicamente el tema de las fracciones, que se remonta a una larga y vieja tradición, de qué y cómo aprendieron los docentes en la escuela primaria y secundaria, qué y cómo aprendieron en las instituciones de formación docente, en consecuencia, qué y cómo están enseñando en ejercicio de su profesión; por decirlo retóricamente, si los docentes tienen estas dificultades y estos saberes, qué y cómo estarán enseñando, lo que implicaría realizar un estudio serio.

Por su lado, Dávila y Carrillo (2018), en su trabajo *Rendimiento de los estudiantes de 6° grado de primaria en la prueba FAB de resolución de tareas de alta y baja demanda cognitiva referidas a fracciones*, concluyeron que, los estudiantes resuelven correctamente tareas relacionadas a fracciones de baja demanda cognitiva, es decir, tareas que requieren de procesos mecánicos y bajos niveles de conexión para su resolución, sin embargo, no pueden resolver tareas referidas a fracciones de alta demanda cognitiva, las mismas que implican el uso de conexiones, uso de diversas estrategias matemáticas y comprensión del problema, por último refieren que, la carencia de experiencias matemáticas retadoras y de alto impacto que le permitan al estudiante usar todos los medios para resolver un problema, estableciendo conexiones y relaciones diversas, son las principales causas. Los resultados de la prueba de entrada y de salida del presente estudio, han demostrado que las actividades usuales de fracciones y de representación gráfica son las que más fácilmente resuelven los estudiantes, pero si se les plantea situaciones problemáticas, es decir con enunciado problémico, tienen dificultades para resolverlos; además resulta siendo una actividad de baja demanda cognitiva trabajar solo con cantidades continuas, no obstante, cuando se plantea actividades con cantidades discretas los estudiantes tiene serias dificultades, obviamente, porque las actividades de alta demanda cognitiva requieren de conexiones mayores y complejas, que el estudiante no lo tiene a la mano, y que se adquiere si y solamente si se interactúa con ellos, por ello, es fundamental, lo que ya se ha dicho, la aplicación y uso de las diferentes formas de representación matemática, no solo en el aprendizaje de las fracciones sino en el aprendizaje de cualquier contenido matemático.

Todo lo versado, tanto en el sustento teórico y los antecedentes de la investigación, no hacen más que sustentar, respaldar, argumentar y corroborar los resultados de la investigación.

CONCLUSIONES

1. Producto de la experimentación pedagógica, aplicando las formas de representación matemática, los estudiantes mejoraron sus niveles de aprendizaje de las fracciones respecto a la prueba de entrada, ubicándose un 47,6% en el nivel satisfactorio, es decir 10 estudiantes; mientras 47,6%, 10 estudiantes en el nivel en proceso y sólo el 4,8%, es decir 1 estudiante se encuentra en el nivel en inicio.
2. La aplicación sistemática de las formas de representación matemática (vivencial, concreta, pictórica, gráfica, simbólica y de expresión verbal y escrita) influyen positivamente en el aprendizaje de las fracciones en el cuarto grado de Educación Primaria.
3. La aplicación de las formas de representación matemática influyen positivamente en el aprendizaje de las fracciones parte-todo con cantidades continuas en el cuarto grado de Educación Primaria.
4. La aplicación de las formas de representación matemática influyen positivamente en el aprendizaje de las fracciones parte-todo con cantidades discretas en el cuarto grado de Educación Primaria.

RECOMENDACIONES

1. A los directivos y docentes se recomienda emplear las formas de representación matemática: vivencial, concreta, pictórica, gráfica, simbólica y de expresión verbal y escrita, para la enseñanza y aprendizaje de las fracciones con cantidades continuas y discretas, en Educación Primaria.
2. A los directivos y docentes se recomienda emplear las formas de representación matemática para la enseñanza y aprendizaje de las fracciones en su noción parte-todo, razón, operador, cociente y medida, con cantidades continuas y discretas, en Educación Primaria y Secundaria.
3. A los directivos y docentes se recomienda emplear las formas de representación matemática: vivencial, concreta, pictórica, gráfica, simbólica y de expresión verbal y escrita, para la enseñanza y aprendizaje de los diferentes contenidos matemáticos, en todos los niveles educativos.
4. A los directivos y docentes se les recomienda profundizar más en las dificultades, errores y obstáculos que tienen los estudiantes en el aprendizaje de los contenidos matemáticos, para emprender nuevas acciones investigativas orientadas a mejorar los resultados de aprendizaje de los estudiantes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arroyave, B.A., Ciro, Y.A. & Ocampo, G.C. (2016) *Aproximación para la comprensión de las fracciones en los grados transición, primero y segundo.* Tesis. Universidad de Medellín.

Astolfi, J.P. (1994) *El trabajo didáctico de los obstáculos, en el corazón de los aprendizajes científicos.* Enseñanza de las ciencias, revista de investigación y experiencias didácticas. *12*(2), 206-216. Recuperado de https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/21359

Astolfi, J.P. (1998) *El tratamiento didáctico de los obstáculos epistemológicos.* Revista Educación y Pedagogía. *21*(25), 149-171. Recuperado de https://aprendeenlinea.udea.edu.co/revistas/index.php/revistaeyp/article/download/5863/5276

Bachelard, G. (2000) *La formación del espíritu científico, contribución a un psicoanálisis del conocimiento objetivo.* [Archivo PDF] Recuperado de http://www.posgrado.unam.mx/musica/lecturas/LecturaIntroduccionInvestigacionMusical/epistemologia/Bachelard%20Gaston-La-formacion-del-espiritu-cientifico.pdf

Bravo, L. (2016) *El aprendizaje de las matemáticas: Psicología cognitiva y neurociencias*. Revista de Investigación Arequipa. Pontifica Universidad Católica de Chile, Santiago, Chile. (7), 11-29.

Camargo, A. P. (2013) *El papel de los registros de representación semiótica en la enseñanza y el aprendizaje del cálculo.* Actas del VII CIBEM. UCU. Uruguay. Recuperado de http://cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/872.pdf

Carrillo, M. (2012) *Análisis de la organización matemática relacionada a las concepciones de fracción que se presenta en el texto escolar Matemática quinto grado de Educación Primaria.* Tesis. Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima, Perú.

Carrión, V. (2007) *Análisis de errores de estudiantes y profesores en expresiones combinadas con números naturales*. Revista Iberoamericana de Educación matemática UNIÓN. (11), 19-57. Recuperado de http://www.fisem.org/www/union/revistas/2007/11/Union_011_007.pdf

Castro, M.G., González, M.D., Flores, S., Ramírez, O., Cruz, M. D. & Fuentes M.C. (2017) *Registros de representación semiótica del concepto de función exponencial.* Revista Entreciencias: diálogos en la Sociedad del Conocimiento. *5* (3). Universidad Nacional Autónoma de México. Recuperado de https://www.redalyc.org/jatsRepo/4576/457651376007/html/index.html

Castro, O.R. (2017) *Comprensión del concepto de fracción en los estudiantes en formación inicial de Educación Primaria. Una mirada desde la teoría* *de campos conceptuales*. Tesis. Universidad Antonio Ruiz de Montoya. Lima, Perú.

Cortina, J.L., Zuñiga, C. & Visnovska, J. (2013) *La equipartición como obstáculo didáctico en la enseñanza de las fracciones.* Revista Educación Matemática. Universidad Pedagógica Nacional, México. *25* (2), 7-30. Recuperado de http://www.redalyc.org/pdf/405/40528961002.pdf

Dávila, K. J. & Trujillo, E. *(2018) Rendimiento de los estudiantes de 6° grado de primaria en la prueba FAB de resolución de tareas de alta y baja demanda cognitiva referidas a fracciones.* Tesis. Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima, Perú.

D'Amore, B. (2006) *Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa México. Número especial, 177-195. Recuperado de http://welles.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/damore/

D'Amore, B. (2001) *Objetos matemáticos y registros semióticos: ¿qué es aprender conceptos matemáticos.* En Dificultades de Aprendizaje de las Matemáticas. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. FER/EDIGRAFOS.

Del Puerto, S.M., Minnaard, C. L. y Seminara, S.A. (2004) *Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las Matemáticas.* Revista Iberoamericana de Educación IV CAREM (IV Conferencia Argentina de Educación Matemática), Buenos Aires, Argentina. 1-12. Recuperado de https://rieoei.org›RIE›article›view

Duval, R. (2006a) *Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación.* LA GACETA de la Real Sociedad Matemática Española. *9*(1), 143-168. Recuperado de https://skat.ihmc.us/rid=1JM80DWCV-2BL5619-23T/

Duval, R. (2006b) *Transformations de representations semiotiques et demarches de pensee en mathematiques.* Actas de la XXXII Coloquio COPIRELEM, 67-89. IREM Estrasburgo. Recuperado de http://www.arpeme.fr/documents/57D29967BB6F8B17028B.pdf

Escolano, R. (2001) *Enseñanza del número racional positivo en Educación Primaria: Un estudio desde el modelo cociente.* Quinto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Universidad de Zaragoza. Almería

Fazio, L. y Siegler, R. (2011) *Enseñanza de las fracciones.* Academia Internacional de Educación (IAE). Impreso en Quito, Ecuador. Recuperado de http://unesdoc.unesco.org/images/0021/002127/212781S.pdf

Freudenthal, H. (1983) *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht: Reidel.* Traducción de Luis Puig, publicada en Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. México: CINVESTAV, 2001. Recuperado de https://www.uv.es/puigl/cap5fracciones.pdf

Gamboa, R., Castillo, M. & Hidalgo R. (2019) *Errores matemáticos de estudiantes que ingresan a la universidad.* Revista Actualidades Investigativas en Educación, Universidad de Costa Rica. *19*(1), 1-31. Recuperado de https://www.scielo.sa.cr/pdf/aie/v19n1/1409-4703-aie-19-01-104.pdf

Godino, J.; Batanero, C.; Font, V. (2009) *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática.* Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10

Gomez, A. & Pérez, A. (2016) *Tres enfoques para la enseñanza de los números racionales.* Revista SABER, Revista Multidisciplinaria del Consejo de Investigación de la Universidad de Orienta. *28*(4). Recuperado de https://www.redalyc.org/jatsRepo/4277/427751143016/html/index.html

Gonzales, A., Guerra, T. & Ordoñez, G. (2018) *Guía para elaborar proyectos de investigación.* Universidad Nacional de Huancavelica, Huancavelica – Perú.

Gonzales, D. (2015) *Errores comunes en el aprendizaje de las fracciones: Un estudio con alumnos de 12/13 años en Cantabria*. Tesis. Universidad de Cantabria. Recuperado de https://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/6903/

Gutierrez, C. (2012) *Material didáctico para el aprendizaje de fracciones y decimales en niños y niñas del sexto grado de la Institución Educativa N° 31218 "Mauro I. Carhuallanqui C. del barrio Mantaro – Huayucachi".* Tesis. Universidad Nacional del Centro del Perú. Huancayo – Perú

Guzmán, I. (1998) *Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. *1*(1), 5-21. Tomado de Disponible en: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33510102

Hernandez, R., Fernandez, C., & Baptista, M. (2010) *Metodología de la Investigación.* McGraw-Hill/ Interamericana Editores, S.A. de C.V. Quinta edición. México.

Hernández, A., Cervantes, J.A., Ordoñez, J.S. & García, M.S. (2017) *Teoría de registros de representaciones semiótica.* Universidad Autónoma de Guerrero. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/315814323

León, O.L. y Calderón, D.I. (s/f) *Semiosis y lenguaje en la didáctica de las matemáticas*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/935/1/3Cursos.pdf

Lizarde, E. (2014) *Transposición y destransposición del saber matemático y didáctico: representaciones y prácticas en la formación inicial de docentes.* Tesis doctoral. Universidad de Huelva.

Malisani, E. (2009) *Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico.* Reviste IRICE. 13, 1-26. Recuperado de https://math.unipa.it/~grim/AlgebraMalisaniSp.pdf

Marshall, A. M., Castro, A. & Canty, R. S. (2010) *Discover strategies to engage young math students in competently using multiple representations*. The National Council of Teachers of Mathematics. 17(12010), 38-47. Recuperado de http://www.4j.lane.edu/wp-content/uploads/2014/11/

Martinez, C. y Lascano, M. (2001) A*cerca de dificultades para la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones.* Revista EMA. Bogota, Colombia. *6*(2), 159-179. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/1127/1/75

Martinez, M.C. y Meza, A. (2017) *Adición entre Fracciones como Parte de un Todo Utilizando El Juego Con Regletas A3.* Tesis. Universidad Autónoma de Manizales. Planeta Rica, Córdoba.

Mateos, T.G. (2008) *Una aproximación a las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. un punto de vista psicogenético.* Revista Ethos Educativo. 41, 194-208.

Ministerio de Educación (2015a) *Rutas del Aprendizaje. ¿Qué y cómo aprenden nuestros niños y niñas?* Matemática, 3.° y 4.° grados de Educación Primaria. Fascículo 1. Lima, Perú.

Ministerio de Educación (2015b) *Unidad didáctica y sesiones de aprendizaje.* 4.° grado de Primaria. Lima, Perú.

Ministerio de Educación (2016) *Programa Curricular de Educación Primaria.* Currículo Nacional de la Educación Básica. Lima, Perú.

Ministerio de Educación (2017) *El Perú en PISA 2015 Informe nacional de resultados.* UMC. Lima, Perú.

Ministerio de Educación (s/f) *¿Cuánto aprenden nuestros estudiantes? Resultados de la ECE 2016.* UMC. Lima, Perú.

Ministerio de Educación (2018) *Acompañamiento Pedagógico 2018.* Dirección de Formación Docente en Servicio. DIFODS. Lima, Perú.

Ministerio de Educación (2019a) *¿Qué aprendizajes logran nuestros estudiantes?* Nacional. Resultados de la ECE 2018, Resultados de la EM 2018. UMC. Lima, Perú.

Ministerio de Educación (2019b) *¿Qué aprendizajes logran nuestros estudiantes?* Huancavelica. Resultados de la ECE 2018. UMC. Lima, Perú.

Morales, Z. E. (2013) *Análisis de las transformaciones semióticas en el aprendizaje de la función logarítmica.* VII CIBEM. Montevideo, Uruguay. 1037-1044

Niño, A. y Raad, Y. (2018) *Interpretación de "la fracción como relación parte-todo" en contextos continuos y discretos, a partir de la implementación de una secuencia didáctica que privilegia la competencia comunicativa.* Tesis. Pontificia Universidad Javeriana. Bogotá, Colombia.

Oviedo, L.M., Kanashiro, A.M., Bnzaquen, M. & Gorrochategui, M. (2012) *Los registros semióticos de representación en matemática.* Revista Aula Universitaria. *13*(), 29-36. Recuperado de https://bibliotecavirtual.unl.edu.ar › AulaUniversitaria

Perera, P.B. & Valdemoros, M.E. (2009) *Enseñanza experimental de las fracciones en cuarto grado.* Revista Educación Matemática. *21* (1), 29-61. Recuperado de http://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v21n1/v21n1a3.pdf

Pruzzo, V. (2012) *Las fracciones: ¿problema de aprendizaje o problemas de la enseñanza?* Facultad de Ciencias Humanas - Universidad Nacional de La Pampa. Revista Pilquen • Sección Psicopedagogía. *14*(8). Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/4059230.pdf

Quispe, W. (2011) *La Comprensión de los Significados del Número Racional Positivo y su Relación con sus Operaciones Básicas y Propiedades Elementales.* Tesis. Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle. Lima-Perú.

Rico, R. (2007) *Estrategias para el aprendizaje de las fracciones con los alumnos del 5° grado*. Tesis. Universidad Pedagógica Nacional. Zamora, Mich.

Ríos, Y. (2011) *Concepciones sobre las fracciones en docentes en formación en el área de Matemática.* Revista Omnia. Universidad del Zulia. Venezuela. *17*(1), 11-13. Recuperado de https://www.redalyc.org/pdf/737/73718406002.pdf

Ríos, Y. (2007) *Una ingeniería didáctica aplicada sobre fracciones.* Revista Omnia. Universidad de Zulia, Venezuela. *13*(02), 120-157. Recuperado de https://www.redalyc.org/pdf/737/73713207.pdf

Ruiz, C. (2013) *La fracción como relación parte-todo y como cociente: Propuesta Didáctica para el Colegio Los Alpes IED.* Tesis. Universidad Nacional de Colombia. Bogota, Colombia.

Sanchez, H y Reyes, C. (1998) *Metodología y diseños en la investigación científica.* Editorial Mantaro. Huancayo, Perú.

Salazar, M.C., Martinic, S. & Maz, A. (2011) *Diseño de una investigación para identificar los significados de fracción que ponen de manifiesto los profesores de primaria en Chile.* CIAEM. Recuperado de http://www.uco.es/~ma1mamaa/publicaciones/Brasil_fr_2011.pdf

Tamayo, O. (2006) *Representaciones semióticas y evolución conceptual en la enseñanza de las ciencias y las matemáticas*. Revista Educación y Pedagogía, Medellín, Universidad de Antioquia, Facultad de Educación. *18*(45) 37-49. Recuperado de https://aprendeenlinea.udea.edu.co

Vicenc, F. (2000) *Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas.* Departamento de Didáctica de las CCEE y la Matemática de la Universidad de Barcelona. Recuperado de http://socialsciences.exeter.ac.uk/education/research/centres/stem

Vieyra, M.I. (2010) *Comunicación matemática en las primeras edades: representación de problemas aritméticos.* Tesis. Universidad Autónoma de Barcelona.

Estrategias para resolver problemas relacionados con fracciones (parte-todo) Módulo 4. Recuperado de https://es.scribd.com/document/364160601/7-MODULO-matematica-fracciones-pdf

ANEXO

ANEXO 1

MATRIZ CONSISTENCIAL DEL PROYECTO DE INVESTIGACIÓN EDUCATIVA

<table>
<tr><td colspan="5">TÍTULO: FORMAS DE REPRESENTACIÓN MATEMÁTICA EN EL APRENDIZAJE DE FRACCIONES DE LOS ESTUDIANTES DEL CUARTO GRADO DE PRIMARIA</td></tr>
<tr><td>TIPO</td><td>PROBLEMA</td><td>OBJETIVOS</td><td>HIPÓTESIS Y VARIABLES</td><td>TIPO, NIVEL Y DISEÑO DE INVESTIGACIÓN</td></tr>
<tr>
<td>A
P
L
I
C
A
T
I
V
O

E
X
P
L
I
C
A
T
I
V
O</td>
<td>GENERAL:
¿Cómo influye la aplicación de las formas de representación matemática en el aprendizaje de las fracciones en el cuarto grado de la I.E. N° 36005 “Juan Vergara Villafuerte” de Ascensión?

ESPECÍFICOS:
1. ¿Cómo influye las formas de representación matemática en el aprendizaje de las fracciones parte–todo con cantidades continuas en el cuarto grado de la I.E. N° 36005 “JVV” de Ascensión?

2. ¿Cómo influye las formas de representación matemática en el aprendizaje de las fracciones parte–todo con cantidades discretas en el cuarto grado de la I.E. N° 36005 “JVV” de Ascensión?</td>
<td>GENERAL:
Determinar la influencia de la aplicación de las formas de representación matemática en el aprendizaje de las fracciones en el cuarto grado de la I.E. N° 36005 “Juan Vergara Villafuerte” de Ascensión.

ESPECÍFICOS:
1. Determinar la influencia de las formas de representación matemática en el aprendizaje de las fracciones parte–todo con cantidades continuas en el cuarto grado de la I.E. N° 36005 “JVV” de Ascensión.

2. Determinar la influencia de las formas de representación matemática en el aprendizaje de las fracciones parte–todo con cantidades discretas en el cuarto grado de la I.E. N° 36005 “JVV” de Ascensión.</td>
<td>HIPÓTESIS GENERAL:
La aplicación de las formas de representación matemática influyen positivamente en el aprendizaje de las fracciones en el cuarto grado de la I.E. N° 36005 “Juan Vergara Villafuerte” de Ascensión.

HIPÓTESIS ESPECÍFICAS:
1. La aplicación de las formas de representación matemática influyen positivamente en el aprendizaje de las fracciones parte–todo con cantidades continuas en el cuarto grado de la I.E. N° 36005 “JVV” de Ascensión.

2. La aplicación de las formas de representación matemática influyen positivamente en el aprendizaje de las fracciones parte–todo con cantidades discretas en el cuarto grado de la I.E. N° 36005 “JVV” de Ascensión.

VARIABLES:
Vi : Aplicación de las formas de representación matemática.
Vd : Aprendizaje de las fracciones.</td>
<td>TIPO:
Aplicativo.

NIVEL:
Explicativo

DISEÑO:
1. Pre experimental:
De un solo grupo con medición pre test y post test

Esquema:
GE = O1_____x______O2

GE = Representa el grupo de estudiantes con quienes se aplicará los niveles de representación matemática.
X = Representa la aplicación de la variable independiente, los niveles de representación matemática.
O1 = Representa la prueba de entrada que se aplicará al grupo.
O2 = Representa la prueba de salida que se aplicará al grupo.</td>
</tr>
</table>

POBLACIÓN Y MUESTRA	TÉCNICAS E INSTRUMENTO DE RECOLECCIÓN DE DATOS	TÉCNICAS DE TRATAMIENTO DE LOS DATOS	PROCEDIMIENTOS DE INVESTIGACIÓN
Población: Estará conformado por 61 estudiantes que conforman el cuarto grado de la I. E. N° 36005 "JVV" de Ascensión. **Muestra:** Estará conformado por los 21 estudiantes de la sección A. **Técnica de muestreo:** El muestreo es intencional.	**Técnicas:** 1) Evaluación educativa, para determinar el nivel de aprendizaje de las fracciones. **Instrumentos:** 1) Prueba escrita (Ad hoc) **Validez:** 1) Validez de contenido.	**Cualitativa:** Teniendo en cuenta que la variable formas de representación matemática y el aprendizaje de las fracciones son variables cualitativas. Se aplicará la prueba de hipótesis no paramétrica de Wilcoxon, para establecer la comparación de una prueba de entrada y una prueba de salida, luego de la manipulación de la variable experimental.	1° Elaboración y validación de la prueba objetiva. 2° Selección y determinación de la muestra. 3° Aplicación del instrumento de recolección de datos. 4° Realizar el procesamiento y análisis de datos: - Cuantificación de los datos obtenidos con el instrumento. - Elaboración de una base de datos. - Procesamiento de datos con el programa SPSS - Procesamiento estadístico. - Interpretar los datos obtenidos. - Establecer la influencia en el grupo experimental

ANEXO 2

OPERACIONALIZACIÓN DE VARIABLES

VARIABLES	DIMENSIONES	INDICADORES	ÍTEMS	ESCALA VALORATIVA	INSTRUMENTO
Formas de representación Se operacionaliza para el marco teórico	Vivencial	Representa con el cuerpo.	Se visualiza en el desarrollo de las sesiones de aprendizaje, pero no en el instrumento de investigación.		
	Concreta	Representa haciendo uso de materiales concretos.	Se visualiza en el desarrollo de las sesiones de aprendizaje, pero no en el instrumento de investigación.		
	Gráfica	Representa haciendo uso de tablas, cuadros, gráficos de barras.	• ¿En cuál de los gráficos, la parte sombreada representa 3/7? • Un albañil está cubriendo el piso con losetas a colores, tal como se muestra en el diseño: Si juntamos las dos partes amarillas y las dos partes rojas del diseño, ¿qué fracción del total se obtiene? • Observa. La niña Ángela está ordenando sus juguetes. ¿Qué parte del total de juguetes son pelotas? *Puedes utilizar los recuadros de al lado para representarlos.* • Si doce tazas representan 2/3 de las que hay en la cocina. ¿Cuántas tazas hay en la cocina? *Resuelve el problema utilizando un gráfico, dibujo, diagrama o la forma que desees.*		
	Pictórica	Representa haciendo uso de dibujos e íconos.	• Miguel y sus dos hijos se reparten una botella de un litro de jugo en cantidades iguales. Sabiendo que cada vaso contiene ¼ de litro, ¿cuántos litros de jugo bebieron en total? • Si doce tazas representan 2/3 de las que hay en la cocina. ¿Cuántas tazas hay en la cocina? *Resuelve el problema utilizando un gráfico, dibujo, diagrama o la forma que desees.*		
	Simbólica	Representa haciendo uso de símbolos y expresiones matemáticas.	• Miguel y sus dos hijos se reparten una botella de un litro de jugo en cantidades iguales. Sabiendo que cada vaso contiene ¼ de litro, ¿cuántos litros de jugo bebieron en total? • En el siguiente conjunto de canicas (daños) ¿qué parte representa el rectángulo? • Si doce tazas representan 2/3 de las que hay en la cocina. ¿Cuántas tazas hay en la cocina? *Resuelve el problema utilizando un gráfico, dibujo, diagrama o la forma que desees.*		
	Palabras	Expresiones verbales o escritas	• Raúl y María tienen la siguiente proporción de papeles para hacer un arreglo. Ambos utilizarán 1/3 del papel que tienen. ¿Cuál de las expresiones es correcta? • Observa la siguiente imagen. ¿Cuál sería la expresión más adecuada?		
Aprendizaje de fracciones Esta se medirá	Como parte – todo con cantidades continuas	Resuelve problemas o situaciones con cantidades continuas Es infinito de valores, se miden. Una ración de pastel, monedas, arroz, miel, el tiempo, la altura, kilómetros, estatura, etc. No son contables son medibles. Tienen partes. Las partes no están separadas. Se puede calcular matemáticamente. Requieren unidad de medición.	1. ¿En cuál de los gráficos, la parte sombreada representa 3/7? 2. Un albañil está cubriendo el piso con losetas a colores, tal como se muestra en el diseño: Si juntamos las dos partes amarillas y las dos partes rojas del diseño, ¿qué fracción del total se obtiene? 3. Raúl y María tienen la siguiente proporción de papeles para hacer un arreglo. Ambos utilizarán 1/3 del papel que tienen. ¿Cuál de las expresiones es correcta? 4. Miguel y sus dos hijos se reparten una botella de un litro de jugo en cantidades iguales. Sabiendo que cada vaso contiene ¼ de litro, ¿cuántos litros de jugo bebieron en total? *Explica tu respuesta.*	Politómica	Prueba escrita (Cuestionario)

	Como parte – todo con cantidades discretas	Resuelve problemas o situaciones con cantidades discretas. Es numérica, se cuentan y usan números naturales. Es finita. Cuatro tazas, una flor, dos carros, dos libros, etc. Son contables. Tienen elementos. Partes separadas.	5. En el siguiente conjunto de canicas (daños) ¿qué parte representa el rectángulo? 6. Observa. La niña Ángela está ordenando sus juguetes. ¿Qué parte del total de juguetes son pelotas? *Puedes utilizar los recuadros de al lado para representarlos.* 7. Observa la siguiente imagen. ¿Cuál sería la expresión más adecuada? 8. Si doce tazas representan 2/3 de las que hay en la cocina. ¿Cuántas tazas hay en la cocina? *Resuelve el problema utilizando un gráfico, dibujo, diagrama o la forma que desees.*		

ANEXO 3

Tabla 3

Resultados de la prueba de entrada.

N° ORDEN	CÓDIGO DEL ESTUDIANTE	ITEM 1	ITEM 2	ITEM 3	ITEM 4	ITEM 5	ITEM 6	ITEM 7	ITEM 8	TOTAL PUNTOS	NIVEL DE PROGRESO	VALORES SPSS
1	E-64	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**	**P**	0
2	E-58	2	0	2	0	0	0	0	0	**4**	**C**	1
3	E-01	2	2	0	0	0	0	0	0	**4**	**C**	1
4	E-07	2	0	0	0	0	2	0	0	**4**	**C**	1
5	E-76	2	0	0	0	0	0	0	0	**2**	**C**	1
6	E-49	0	0	2	0	0	2	2	0	**6**	**C**	1
7	E-08	2	0	2	0	2	0	0	0	**6**	**C**	1
8	E-45	2	2	2	0	0	0	2	0	**8**	**C**	1
9	E-64	0	0	0	0	0	2	0	0	**2**	**C**	1
10	E-48	2	2	0	0	0	2	0	0	**6**	**C**	1
11	E-70	2	0	2	0	0	0	0	0	**4**	**C**	1
12	E-35	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**	**P**	0
13	E-04	2	2	2	0	0	0	2	0	**8**	**C**	1
14	E-91	2	0	0	0	0	0	0	0	**2**	**C**	1
15	E-58	2	0	0	0	0	0	2	0	**4**	**C**	1
16	E-24	2	0	0	0	0	2	0	0	**4**	**C**	1
17	E-15	2	0	2	0	0	0	0	0	**4**	**C**	1
18	E-86	2	2	2	0	0	0	0	0	**6**	**C**	1
19	E-17	2	2	2	0	0	0	0	0	**6**	**C**	1
20	E-86	2	0	0	0	0	2	0	0	**4**	**C**	1
21	E-52	2	2	2	0	0	2	2	0	**10**	**B**	2

Nota. Elaboración propia, aplicativo estadístico.

Tabla 6

Resultados de la prueba de salida.

N° ORDEN	CÓDIGO DEL ESTUDIANTE	ITEM 1	ITEM 2	ITEM 3	ITEM 4	ITEM 5	ITEM 6	ITEM 7	ITEM 8	TOTAL PUNTOS	NIVEL DE PROGRESO	VALORES
1	E-64	2	2	2	2	2	2	2	0	**14**	**A**	3
2	E-58	2	2	0	2	2	2	2	0	**12**	**B**	2
3	E-01	2	2	2	2	2	2	2	2	**16**	**A**	3
4	E-07	2	2	2	2	2	2	2	2	**16**	**A**	3
5	E-76	2	2	2	2	2	2	2	2	**16**	**A**	3
6	E-49	0	2	2	2	2	2	2	2	**14**	**A**	3
7	E-08	2	0	2	2	0	2	0	2	**10**	**B**	2
8	E-45	2	2	2	0	0	2	2	0	**10**	**B**	2
9	E-64	0	2	2	0	2	2	2	0	**10**	**B**	2
10	E-48	2	2	2	2	2	2	2	2	**16**	**A**	3
11	E-70	2	2	2	2	2	2	2	2	**16**	**A**	3
12	E-35	2	0	0	0	2	2	2	2	**10**	**B**	2
13	E-04	2	2	2	2	0	2	2	2	**14**	**A**	3
14	E-91	2	0	0	0	2	2	2	0	**8**	**C**	1
15	E-58	2	0	2	2	2	2	2	0	**12**	**B**	2
16	E-24	2	2	0	2	2	2	2	2	**14**	**A**	3
17	E-15	2	2	2	0	2	0	2	0	**10**	**B**	2
18	E-86	2	2	2	2	0	2	2	0	**12**	**B**	2
19	E-17	2	2	2	0	2	0	0	2	**10**	**B**	2
20	E-86	2	2	2	2	2	2	2	2	**16**	**A**	3
21	E-52	2	0	2	0	2	2	2	1	**11**	**B**	2

Nota. Elaboración propia, programa estadístico.

ANEXO 4

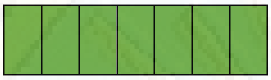
PRUEBA ESCRITA (Cuestionario)

FORMAS DE REPRESENTACIÓN MATEMÁTICA EN EL APRENDIZAJE DE FRACCIONES DE LOS ESTUDIANTES DEL CUARTO GRADO DE PRIMARIA

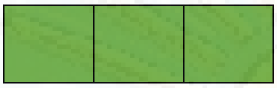
Código del estudiante: …………………… 4to Grado, Sección: ……… Fecha: …………………

INDICACIONES: Estimado niño y niña, ten un buen día. A continuación, te presentamos 8 actividades para que lo desarrolles siguiendo las indicaciones. Agradecemos tu colaboración.

1. ¿En cuál de los gráficos, la parte coloreada representa $\frac{3}{7}$?

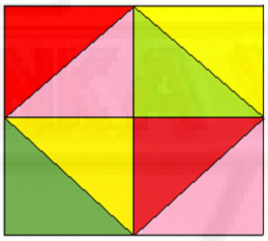
a) 

b) 

c) 

d) 

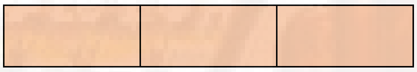
2. Un albañil está cubriendo el piso con losetas a colores, tal como se muestra en el diseño:

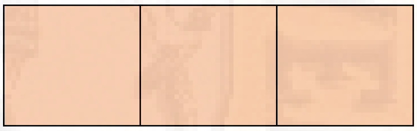


Si juntamos las dos partes amarillas y las dos partes rojas del diseño, ¿qué fracción del total se obtiene?

a) $\frac{2}{8}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{8}{8}$ d) $\frac{4}{8}$

3. Raúl y María tienen la siguiente proporción de papeles para hacer un arreglo. Ambos utilizarán 1/3 del papel que tienen.

¿Cuál de las siguientes expresiones es correcta?

a) Ambos utilizarán el mismo tamaño de papel, cada uno 1/3.
b) Raúl utilizará 2/3 de papel, mientras que Katy utilizará 1/3 de papel .
c) Raúl y María utilizarán un pedazo de papel.
d) Utilizarán diferentes tamaños de papel, a pesar de tener 1/3 cada uno.

4. Miguel y sus dos hijos se reparten una botella de un litro de jugo en cantidades iguales. Sabiendo que cada vaso contiene ¼ de litro, ¿cuántos litros de jugo bebieron en total? *Explica tu respuesta con un gráfico, dibujo, diagrama o la forma que desees.*

*Respuesta:*__________________

5. En el siguiente conjunto de canicas(daños), ¿qué parte representa el rectángulo?

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{5}{1}$ c) $\frac{1}{20}$ d) 5

6. Observa. La niña Ángela está ordenando sus juguetes. ¿Qué parte del total de juguetes son pelotas? *Puedes utilizar los recuadros de al lado para representarlos.*

a) 3

b) $\frac{7}{3}$

c) $\frac{10}{3}$

d) $\frac{3}{10}$

7. Observa la siguiente imagen. ¿Cuál sería la expresión más adecuada?

a) Cada parte representa un entero.
b) Las cuatro partes representan ¼ del total.
c) Las dos partes representan 2/6 del total.
d) Cada parte representa 1/3 del total.

8. Si doce tazas representan 2/3 de las que hay en la cocina. ¿Cuántas tazas hay en la cocina? *Resuelve el problema utilizando un gráfico, dibujo, diagrama o la forma que desees.*

*Respuesta:*__________________

ANEXO 5

FICHA DE VALIDEZ DE INSTRUMENTO

ANEXO Nº 02

UNIVERSIDAD NACIONAL DE HUANCAVELICA

(CREADO POR LA LEY N°25265)

ESCUELA DE POSGRADO
UNIDAD DE POSGRADO DE LA FACULTAD DE EDUCACIÓN
VALIDACIÓN DEL INSTRUMENTO DE INVESTIGACIÓN POR CRITERIO DE JUECES

I.DATOS GENERALES

1.1 Apellido y nombre del Juez : Ubaldo Cayllahua Yarasca
1.2 Cargo e institución donde labora Docente de la FED
1.3 Nombre del instrumento evaluado: Prueba Escrita
1.4 Autor del instrumento : Miguel Angel Caldeón Castañeda

II.ASPECTO DE LA VALIDACIÓN

INDICADORES	CRITERIOS	DEFICIENTE 1	BAJA 2	REGULAR 3	BUENA 4	MUY BUENA 5
1. CLARIDAD	Esta formulado con lenguaje apropiado y Comprensible.				X	
2. OBJETIVIDAD	Permite medir hechos observables					X
3. ACTUALIDAD	Adecuado al avance de la ciencia y tecnología				X	
4. ORGANIZACIÓN	Presentación ordenada				X	
5. SUFICIENCIA	Comprende aspectos de las variables en cantidad y calidad suficiente				X	
6. PERTINENCIA	Permite conseguir datos de acuerdo a los objetivos planteados				X	
7. CONSISTENCIA	Pretende conseguir datos basados en teorías o modelos teóricos			X		
8. COHERENCIA	Entre variables, indicadores y los items				X	
9. METODOLOGÍA	La estrategia responde al propósito de la investigación				X	
10. APLICACIÓN	Los datos permiten un tratamiento estadístico pertinente					X
CONTEO TOTAL DE MARCAS (Realice el conteo en cada una de las categorías de la escala)				1	7	2
		A	B	C	D	E

Coeficiente de validez = 1 x A + 2 x B + 3 x C+ 4 x D + 5 x E = $\frac{41}{50}$ = 0,82

III.CALIFICACIÓN GLOBAL (Ubique el coeficiencia de validez obtenido en el intervalo respectivo y marque con un aspa en el círculo asociado)

CATEGORÍA		INTERVALO
Desaprobado	◯	[0,00-0,60]
Observado	◯	<0,60-0,70]
Aprobado	X	<0,70-1.00]

IV.CALIFICACIÓN DE APLICABILIDAD

Procede su aplicación

LUGAR: Huancavelica 11 de 04 del 2019

FIRMA DEL JUEZ

ANEXO Nº 02

UNIVERSIDAD NACIONAL DE HUANCAVELICA

(CREADO POR LA LEY N°25265)

ESCUELA DE POSGRADO
UNIDAD DE POSGRADO DE LA FACULTAD DE EDUCACIÓN
VALIDACIÓN DEL INSTRUMENTO DE INVESTIGACIÓN POR CRITERIO DE JUECES

I.DATOS GENERALES

1.1 Apellido y nombre del Juez : Quilca Castro, Alejandro Rodrigo

1.2 Cargo e institución donde labora : UNH

1.3 Nombre del instrumento evaluado: Cuestionario

1.4 Autor del instrumento : Miguel Angel Calderon Castañeda

II.ASPECTO DE LA VALIDACIÓN

INDICADORES	CRITERIOS	DEFICIENTE 1	BAJA 2	REGULAR 3	BUENA 4	MUY BUENA 5
1. CLARIDAD	Esta formulado con lenguaje apropiado y Comprensible.					✓
2. OBJETIVIDAD	Permite medir hechos observables					✓
3. ACTUALIDAD	Adecuado al avance de la ciencia y tecnología				✓	
4. ORGANIZACIÓN	Presentación ordenada					✓
5. SUFICIENCIA	Comprende aspectos de las variables en cantidad y calidad suficiente					✓
6. PERTINENCIA	Permite conseguir datos de acuerdo a los objetivos planteados					✓
7. CONSISTENCIA	Pretende conseguir datos basados en teorías o modelos teóricos					✓
8. COHERENCIA	Entre variables, indicadores y los ítems					✓
9. METODOLOGÍA	La estrategia responde al propósito de la investigación					✓
10. APLICACIÓN	Los datos permiten un tratamiento estadístico pertinente					✓

CONTEO TOTAL DE MARCAS (Realice el conteo en cada una de las categorías de la escala)				4	45
	A	B	C	D	E

Coeficiente de validez = 1 x A + 2 x B + 3 x C+ 4 x D + 5 x E = $\frac{49}{50}$

III.**CALIFICACIÓN GLOBAL** (Ubique el coeficiencia de validez obtenido en el intervalo respectivo y marque con un aspa en el círculo asociado)

CATEGORÍA		INTERVALO
Desaprobado		[0,00-0,60]
Observado		<0,60-0,70]
Aprobado	X	<0,70-1.00]

IV.CALIFICACIÓN DE APLICABILIDAD

....

....

LUGAR: Huancavelica 11 de 04 del 2019.

FIRMA DEL JUEZ

ANEXO N° 02

UNIVERSIDAD NACIONAL DE HUANCAVELICA

(CREADO POR LA LEY N°25265)

ESCUELA DE POSGRADO
UNIDAD DE POSGRADO DE LA FACULTAD DE EDUCACIÓN
VALIDACIÓN DEL INSTRUMENTO DE INVESTIGACIÓN POR CRITERIO DE JUECES

I.DATOS GENERALES

1.1 Apellido y nombre del Juez : Max José Ramirez Avila

1.2 Cargo e institución donde labora : Docente U.N.H

1.3 Nombre del instrumento evaluado: Prueba Escrita

1.4 Autor del instrumento : Miguel Angel Calderon Castañeda

II.ASPECTO DE LA VALIDACIÓN

INDICADORES	CRITERIOS	DEFICIENTE 1	BAJA 2	REGULAR 3	BUENA 4	MUY BUENA 5
1. CLARIDAD	Esta formulado con lenguaje apropiado y Comprensible.					X
2. OBJETIVIDAD	Permite medir hechos observables				X	
3. ACTUALIDAD	Adecuado al avance de la ciencia y tecnología					X
4. ORGANIZACIÓN	Presentación ordenada					X
5. SUFICIENCIA	Comprende aspectos de las variables en cantidad y calidad suficiente				X	
6. PERTINENCIA	Permite conseguir datos de acuerdo a los objetivos planteados					X
7. CONSISTENCIA	Pretende conseguir datos basados en teorías o modelos teóricos				X	
8. COHERENCIA	Entre variables, indicadores y los ítems				X	
9. METODOLOGÍA	La estrategia responde al propósito de la investigación				X	
10. APLICACIÓN	Los datos permiten un tratamiento estadístico pertinente					X
CONTEO TOTAL DE MARCAS (Realice el conteo en cada una de las categorías de la escala)					20	25
		A	B	C	D	E

Coeficiente de validez = 1 x A + 2 x B + 3 x C+ 4 x D + 5 x E = $\frac{45}{50}$

III.**CALIFICACIÓN GLOBAL** (Ubique el coeficiencia de validez obtenido en el intervalo respectivo y marque con un aspa en el círculo asociado)

CATEGORÍA		INTERVALO
Desaprobado		[0,00-0,60]
Observado		<0,60-0,70]
Aprobado	X	<0,70-1.00]

IV.CALIFICACIÓN DE APLICABILIDAD

Procede su aplicación

LUGAR: Huancavelica.17 de..04...del 2019

FIRMA DEL JUEZ

ANEXO Nº 02

UNIVERSIDAD NACIONAL DE HUANCAVELICA

(CREADO POR LA LEY N°25265)

ESCUELA DE POSGRADO
UNIDAD DE POSGRADO DE LA FACULTAD DE EDUCACIÓN
VALIDACIÓN DEL INSTRUMENTO DE INVESTIGACIÓN POR CRITERIO DE JUECES

I.DATOS GENERALES

1.1 Apellido y nombre del Juez : ANTEZANA IPARRAGUIRRE, RÉGULO
1.2 Cargo e institución donde labora : UNH
1.3 Nombre del instrumento evaluado: Cuestionario
1.4 Autor del instrumento : Miguel Calderon Castañeda

II.ASPECTO DE LA VALIDACIÓN

INDICADORES	CRITERIOS	DEFICIENTE 1	BAJA 2	REGULAR 3	BUENA 4	MUY BUENA 5
1. CLARIDAD	Esta formulado con lenguaje apropiado y Comprensible.				X	
2. OBJETIVIDAD	Permite medir hechos observables			X		
3. ACTUALIDAD	Adecuado al avance de la ciencia y tecnología				X	
4. ORGANIZACIÓN	Presentación ordenada				X	
5. SUFICIENCIA	Comprende aspectos de las variables en cantidad y calidad suficiente				X	
6. PERTINENCIA	Permite conseguir datos de acuerdo a los objetivos planteados				X	
7. CONSISTENCIA	Pretende conseguir datos basados en teorías o modelos teóricos				X	
8. COHERENCIA	Entre variables, indicadores y los ítems			X		
9. METODOLOGÍA	La estrategia responde al propósito de la investigación				X	
10. APLICACIÓN	Los datos permiten un tratamiento estadístico pertinente			X		
CONTEO TOTAL DE MARCAS (Realice el conteo en cada una de las categorías de la escala)		A	B	C 3	D 7	E

Coeficiente de validez = 1 x A + 2 x B + 3 x C+ 4 x D + 5 x E = $\frac{37}{50} = 0,74$

III.**CALIFICACIÓN GLOBAL** (Ubique el coeficiencia de validez obtenido en el intervalo respectivo y marque con un aspa en el círculo asociado)

CATEGORÍA		INTERVALO
Desaprobado	○	[0,00-0,60]
Observado	○	<0,60-0,70]
Aprobado	X	<0,70-1.00]

IV.CALIFICACIÓN DE APLICABILIDAD

Pasar por una prueba piloto luego pase a su ejecución

LUGAR: Huancavelica 25 de 04 del 2019

ESPECIALIDAD MATEMÁTICA - FÍSICA
Dr. Régulo Antezana Iparraguirre
DOCENTE
FIRMA DEL JUEZ

ANEXO 6

AUTORIZACIÓN PARA LA EJECUCIÓN DE LA PARTE EXPERIMENTAL

"Año de la lucha contra la Corrupción y la Impunidad"

SOLICITA: **Aplicación de la Parte Práctica de Trabajo de Investigación.**

SEÑORA DIRECTORA DE LA I. E. Nº 36005 –"JVV", DISTRITO DE ASCENSIÓN Y PROVINCIA DE HUANCAVELICA
S.D.

Yo, **Miguel Angel CALDERON CASTAÑEDA**, identificado con D. N. I. N° 23271304, con domicilio legal en Jr. Mariano Cataño N° 286, San Cristóbal, Huancavelica, ex alumno de la Unidad de Posgrado de la Universidad Nacional de Huancavelica, ante Ud. con el debido respeto me presento y expongo:

Que, habiendo presentado el Proyecto de Investigación a la Escuela de Posgrado, Facultad de Educación de la Universidad Nacional de Huancavelica, con el título: FORMAS DE REPRESENTACIÓN MATEMÁTICA EN EL APRENDIZAJE DE FRACCIONES DE LOS ESTUDIANTES DEL CUARTO GRADO DE PRIMARIA, la misma que ha sido aprobado formalmente.

Que, por la naturaleza de la misma, principalmente por el diseño de investigación: **Cuasi experimental, con dos grupos no equivalentes, con pre test y post test**, requiere la aplicación de una prueba de entrada y salida, así como la aplicación de una variable experimental a través de sesiones de aprendizaje en el grupo experimental, es decir, el 4° "A". Según la programación y cronogramación establecida en el Plan de Parte Práctica adjunto al presente.

Por lo expuesto,

Solicito a su digno despacho tenga a bien de brindarme las facilidades del caso para ejecutar la parte práctica del trabajo de investigación, acción que redundará en beneficio de los estudiantes.

Esperando su aceptación por ser de justicia.

Huancavelica, 10 de abril del 2019

Miguel Angel CALDERON CASTAÑEDA
23271304

UNIDAD GESTION EDUCATIVA LOCAL
I.E.I.N° 36005 - ASCENSION
DIRECCION
HUANCAVELICA

Prof. Marisol Martinez Curipaca
C.M. 1023269355
DIRECTORA(A)

11 ABR. 2019

ANEXO 7

UGEL HUANCAVELICA

"Año de la Lucha contra la Impunidad y la Corrupción"

LA QUE SUSCRIBE DIRECTORA DE LA I. E. N° 36005 "JUAN VERGARA VILLAFUERTE" DEL DISTRITO DE ASCENSIÓN, PROVINCIA Y REGIÓN HUANCAVELICA, deja:

CONSTANCIA

Que, el profesor **MIGUEL ANGEL CALDERON CASTAÑEDA** ha cumplido con desarrollar las actividades de experimentación de su trabajo de investigación titulado: **"FORMAS DE REPRESENTACIÓN MATEMÁTICA EN EL APRENDIZAJE DE FRACCIONES DE LOS ESTUDIANTES DEL CUARTO GRADO DE PRIMARIA"**, que consistió en la aplicación de la prueba de entrada, ejecución de sesiones de aprendizaje y la aplicación de la prueba de salida en el Cuarto Grado "A", la misma que se realizó durante los meses de mayo, junio y julio de 2019, en cumplimiento del Plan de Trabajo presentado en el mes de abril.

Se expide la presente constancia a solicitud del interesado para los fines que estime por conveniente.

Ascensión, 2 de setiembre de 2019

UNIDAD GESTIÓN EDUCATIVA LOCAL
I.E.N° 36005 - ASCENSIÓN
DIRECCIÓN
HUANCAVELICA

Prof. Marisol Martinez Curipaco
C.M. 1023269355
DIRECTORA (A)

ANEXO 8

INSTRUMENTOS APLICADOS

CUESTIONARIO (EVALUACIÓN ESCRITA)

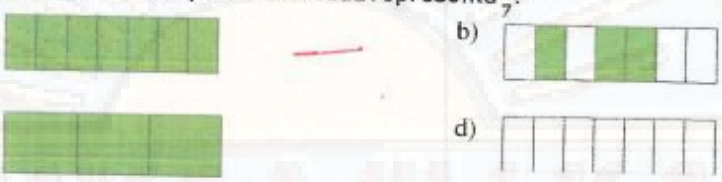
FORMAS DE REPRESENTACIÓN MATEMÁTICA EN EL APRENDIZAJE DE FRACCIONES DE LOS ESTUDIANTES DEL CUARTO GRADO DE PRIMARIA

Código del estudiante: 60091764 4to Grado, Sección: A Fecha: 08 MAYO 2019

INDICACIONES: Estimado niño y niña, ten un buen día. A continuación, te presentamos 8 actividades para que lo desarrolles siguiendo las indicaciones. Agradecemos tu colaboración.

1. ¿En cuál de los gráficos, la parte coloreada representa $\frac{3}{7}$?

~~a)~~ b) c) d)

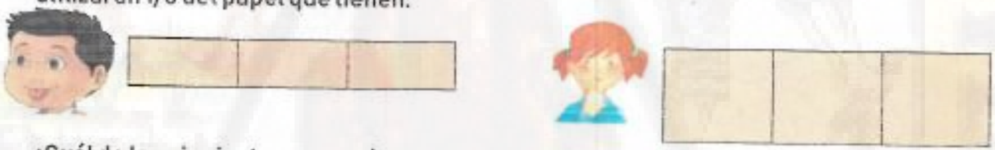


2. Un albañil está cubriendo el piso con losetas a colores, tal como se muestra en el diseño:

Si juntamos las dos partes amarillas y las dos partes rojas del diseño, ¿qué fracción del total se obtiene?

a) $\frac{2}{8}$ ~~b)~~ $\frac{1}{4}$ c) $\frac{8}{8}$ d) $\frac{4}{8}$

3. Raúl y María tienen la siguiente proporción de papeles para hacer un arreglo. Ambos utilizarán 1/3 del papel que tienen.



¿Cuál de las siguientes expresiones es correcta?

~~a)~~ Ambos utilizarán el mismo tamaño de papel, cada uno 1/3.
b) Raúl utilizará 2/3 de papel, mientras que Katy utilizará 1/3 de papel
c) Raúl y María utilizarán un pedazo de papel.
d) Utilizarán diferentes tamaños de papel, a pesar de tener 1/3 cada uno.

4. Miguel y sus dos hijos se reparten una botella de un litro de jugo en cantidades iguales. Sabiendo que cada vaso contiene ¼ de litro, ¿cuántos litros de jugo bebieron en total? *Explica tu respuesta con un gráfico, dibujo, diagrama o la forma que desees.*

Respuesta: 3

5. **En el siguiente conjunto de canicas(daños). ¿qué parte representa el rectángulo?**

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{5}{1}$ c) $\frac{1}{20}$ d) 5

6. **Observa. La niña Ángela está ordenando sus juguetes. ¿Qué parte del total de juguetes son pelotas?** *Puedes utilizar los recuadros de al lado para representarlos.*

a) 3

b) $\frac{7}{3}$

c) $\frac{10}{3}$

d) $\frac{3}{10}$

7. **Observa la siguiente imagen. ¿Cuál sería la expresión más adecuada?**

a) Cada parte representa un entero.
b) Las cuatro partes representan ¼ del total.
c) Las dos partes representan 2/6 del total.
d) Cada parte representa 1/3 del total.

8. **Si doce tazas representan 2/3 de las que hay en la cocina. ¿Cuántas tazas hay en la cocina?** *Resuelve el problema utilizando un gráfico, dibujo, diagrama o la forma que desees.*

Respuesta: 6

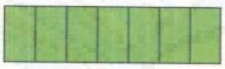
CUESTIONARIO (EVALUACIÓN ESCRITA DE SALIDA)

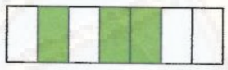
FORMAS DE REPRESENTACIÓN MATEMÁTICA EN EL APRENDIZAJE DE FRACCIONES DE LOS ESTUDIANTES DEL CUARTO GRADO DE PRIMARIA

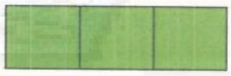
Código del estudiante: 73847676 4to Grado, Sección: "A" Fecha: 24 JUL. 2019

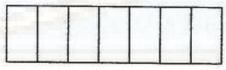
INDICACIONES: Estimado niño y niña, ten un buen día. A continuación, te presentamos 8 actividades para que lo desarrolles siguiendo las indicaciones. Agradecemos tu colaboración.

1. **¿En cuál de los gráficos, la parte coloreada representa $\frac{3}{7}$?**

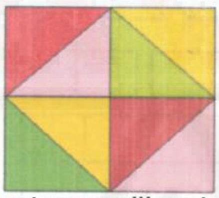
a) 

~~b)~~  $=\frac{3}{7}$ ✓

c) 

d) 

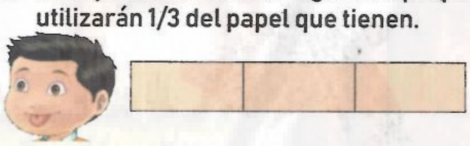
2. **Un albañil está cubriendo el piso con losetas a colores, tal como se muestra en el diseño:**

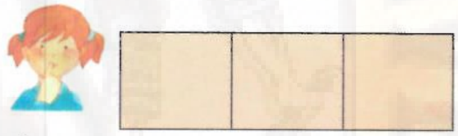


Si juntamos las dos partes amarillas y las dos partes rojas del diseño, ¿qué fracción del total se obtiene?

a) $\frac{2}{8}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{8}{8}$ ~~d)~~ $\frac{4}{8}$ ✓

3. **Raúl y María tienen la siguiente proporción de papeles para hacer un arreglo. Ambos utilizarán 1/3 del papel que tienen.**

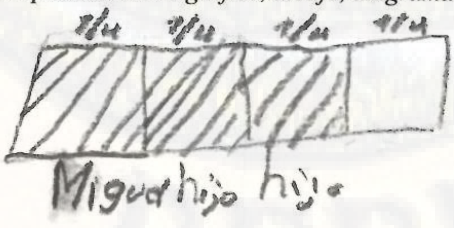




¿Cuál de las siguientes expresiones es correcta?

a) Ambos utilizarán el mismo tamaño de papel, cada uno 1/3.
b) Raúl utilizará 2/3 de papel, mientras que Katy utilizará 1/3 de papel
c) Raúl y María utilizarán un pedazo de papel.
~~d)~~ Utilizarán diferentes tamaños de papel, a pesar de tener 1/3 cada uno. ✓

4. **Miguel y sus dos hijos se reparten una botella de un litro de jugo en cantidades iguales. Sabiendo que cada vaso contiene ¼ de litro, ¿cuántos litros de jugo bebieron en total?**
Explica tu respuesta con un gráfico, dibujo, diagrama o la forma que desees.



✓

Respuesta: bebieron 3 cuartos de litro

CCAM-19-1

5. **En el siguiente conjunto de canicas(daños), ¿qué parte representa el rectángulo?**

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{5}{1}$ c) $\frac{1}{20}$ d) 5

6. **Observa. La niña Ángela está ordenando sus juguetes. ¿Qué parte del total de juguetes son pelotas?** *Puedes utilizar los recuadros de al lado para representarlos.*

a) 3

b) $\frac{7}{3}$

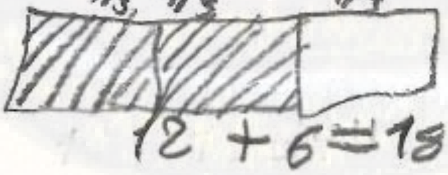
c) $\frac{10}{3}$

d) $\frac{3}{10}$

7. **Observa la siguiente imagen. ¿Cuál sería la expresión más adecuada?**

a) Cada parte representa un entero.
b) Las cuatro partes representan ¼ del total.
c) Las dos partes representan 2/6 del total.
d) Cada parte representa 1/3 del total.

8. **Si doce tazas representan 2/3 de las que hay en la cocina. ¿Cuántas tazas hay en la cocina?** *Resuelve el problema utilizando un gráfico, dibujo, diagrama o la forma que desees.*



12 + 6 = 18

Respuesta: hay 18 tazas

25 min

CUESTIONARIO (EVALUACIÓN ESCRITA)

FORMAS DE REPRESENTACIÓN MATEMÁTICA EN EL APRENDIZAJE DE FRACCIONES DE LOS ESTUDIANTES DEL CUARTO GRADO DE PRIMARIA

Código del estudiante: ....61686449.... 4to Grado, Sección: ..."A"... Fecha: ....08 MAYO 2019

INDICACIONES: Estimado niño y niña, ten un buen día. A continuación, te presentamos 8 actividades para que lo desarrolles siguiendo las indicaciones. Agradecemos tu colaboración.

1. ¿En cuál de los gráficos, la parte coloreada representa $\frac{3}{7}$?

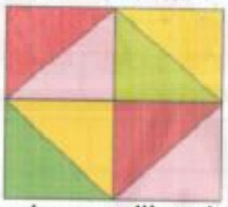
a) 

b) 

c) 

d) 

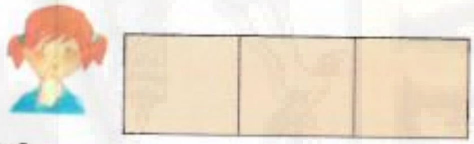
2. Un albañil está cubriendo el piso con losetas a colores, tal como se muestra en el diseño:



Si juntamos las dos partes amarillas y las dos partes rojas del diseño, ¿qué fracción del total se obtiene?

a) $\frac{2}{8}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{8}{8}$ d) $\frac{4}{8}$

3. Raúl y María tienen la siguiente proporción de papeles para hacer un arreglo. Ambos utilizarán 1/3 del papel que tienen.



¿Cuál de las siguientes expresiones es correcta?

a) Ambos utilizarán el mismo tamaño de papel, cada uno 1/3.
b) Raúl utilizará 2/3 de papel, mientras que Katy utilizará 1/3 de papel
c) Raúl y María utilizarán un pedazo de papel.
d) Utilizarán diferentes tamaños de papel, a pesar de tener 1/3 cada uno.

4. Miguel y sus dos hijos se reparten una botella de un litro de jugo en cantidades iguales. Sabiendo que cada vaso contiene ¼ de litro, ¿cuántos litros de jugo bebieron en total?
Explica tu respuesta con un gráfico, dibujo, diagrama o la forma que desees.

1/4 +
1/4
2/8

Respuesta: 2/8

5. **En el siguiente conjunto de canicas(daños), ¿qué parte representa el rectángulo?**

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{5}{1}$ c) $\frac{1}{20}$ d) 5

6. **Observa. La niña Ángela está ordenando sus juguetes. ¿Qué parte del total de juguetes son pelotas?** *Puedes utilizar los recuadros de al lado para representarlos.*

a) 3

b) $\frac{7}{3}$

c) $\frac{10}{3}$

d) $\frac{3}{10}$

7. **Observa la siguiente imagen. ¿Cuál sería la expresión más adecuada?**

a) Cada parte representa un entero.
b) Las cuatro partes representan ¼ del total.
c) Las dos partes representan 2/6 del total.
d) Cada parte representa 1/3 del total.

8. **Si doce tazas representan 2/3 de las que hay en la cocina. ¿Cuántas tazas hay en la cocina?** *Resuelve el problema utilizando un gráfico, dibujo, diagrama o la forma que desees.*

Respuesta: 4/3

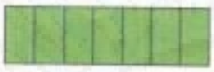
CUESTIONARIO (EVALUACIÓN ESCRITA DE SALIDA)

FORMAS DE REPRESENTACIÓN MATEMÁTICA EN EL APRENDIZAJE DE FRACCIONES DE LOS ESTUDIANTES DEL CUARTO GRADO DE PRIMARIA

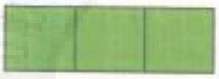
Código del estudiante: 61686449 4to Grado, Sección: "A" Fecha: 24 JUL 2019

INDICACIONES: Estimado niño y niña, ten un buen día. A continuación, te presentamos 8 actividades para que lo desarrolles siguiendo las indicaciones. Agradecemos tu colaboración.

1. ¿En cuál de los gráficos, la parte coloreada representa $\frac{3}{7}$?

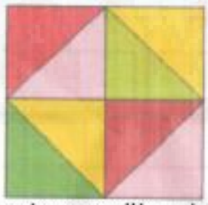
a) 

~~b)~~ 

c) 

d) 

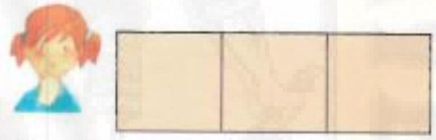
2. Un albañil está cubriendo el piso con losetas a colores, tal como se muestra en el diseño:



Si juntamos las dos partes amarillas y las dos partes rojas del diseño, ¿qué fracción del total se obtiene?

a) $\frac{2}{8}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{8}{8}$ ~~d)~~ $\frac{4}{8}$

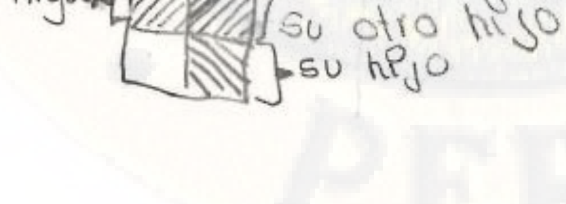
3. Raúl y María tienen la siguiente proporción de papeles para hacer un arreglo. Ambos utilizarán 1/3 del papel que tienen.



¿Cuál de las siguientes expresiones es correcta?

a) Ambos utilizarán el mismo tamaño de papel, cada uno 1/3.
b) Raúl utilizará 2/3 de papel, mientras que Katy utilizará 1/3 de papel
c) Raúl y María utilizarán un pedazo de papel.
~~d)~~ Utilizarán diferentes tamaños de papel, a pesar de tener 1/3 cada uno.

4. Miguel y sus dos hijos se reparten una botella de un litro de jugo en cantidades iguales. Sabiendo que cada vaso contiene ¼ de litro, ¿cuántos litros de jugo bebieron en total?
Explica tu respuesta con un gráfico, dibujo, diagrama o la forma que desees.



Respuesta: 3/4

5. **En el siguiente conjunto de canicas(daños), ¿qué parte representa el rectángulo?**

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{5}{1}$ c) $\frac{1}{20}$ d) 5

6. **Observa. La niña Ángela está ordenando sus juguetes. ¿Qué parte del total de juguetes son pelotas?** *Puedes utilizar los recuadros de al lado para representarlos.*

a) 3

b) $\frac{7}{3}$

c) $\frac{10}{3}$

d) $\frac{3}{10}$

7. **Observa la siguiente imagen. ¿Cuál sería la expresión más adecuada?**

a) Cada parte representa un entero.
b) Las cuatro partes representan ¼ del total.
c) Las dos partes representan 2/6 del total.
d) Cada parte representa 1/3 del total.

8. **Si doce tazas representan 2/3 de las que hay en la cocina. ¿Cuántas tazas hay en la cocina?** *Resuelve el problema utilizando un gráfico, dibujo, diagrama o la forma que desees.*

6 6 6

$\frac{2}{3}$

12 tazos

Respuesta: 18 tazas

PLAN DE SESIÓN DE APRENDIZAJE N° 01*

I. DATOS INFORMATIVOS

INSTITUCIÓN EDUCATIVA	N° 36005 - "JVV" - ASCENSIÓN
TIPO	POLIDOCENTE

GRADO	SECCIÓN	Nº DE ALUMNOS	DURACIÓN	FECHA DE EJECUCIÓN		
4°	A	21	3 h.p.	15	05	2019

PROFESOR DE AULA	Sixto MAYHUA PARI
DIRECTORA	Marisol MARTINEZ CURIPACO
INVESTIGADOR/EJECUTOR	Miguel Angel CALDERON CASTAÑEDA

TÍTULO DE LA SESIÓN	**Conocemos las fracciones como partes de un todo con cantidades continuas**

II. PROPÓSITO DE APRENDIZAJE

COMPETENCIA	Resuelve problemas de cantidad.
CAPACIDAD	• Traduce cantidades a expresiones numéricas. • Comunica su comprensión sobre los números y las operaciones. • **Usa estrategias y procedimientos de estimación y cálculo.** • Argumenta afirmaciones sobre las relaciones numéricas y las operaciones.
DESEMPEÑO	Expresa con diversas representaciones y lenguaje numérico (números, signos y expresiones verbales) su comprensión de: - La fracción como parte-todo (cantidad discreta o continua), así como equivalencias y operaciones de adición y sustracción entre fracciones usuales usando fracciones equivalentes.
ENFOQUE TRANSVERSAL	**Enfoque Orientación al bien común** - Los estudiantes comparten siempre los bienes disponibles para ellos en los espacios educativos (recursos, materiales, instalaciones, tiempo, actividades, conocimientos) con sentido de equidad y justicia.
EVIDENCIA DE APRENDIZAJE	Resuelven problemas utilizando diversas formas de representación, vivencial, concreto, gráfico, pictórico o simbólico.

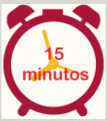
III. PREPARACIÓN PARA LA SESIÓN

MATERIALES Y RECURSOS	Hojas de colores, tijeras, goma, lápices, colores y regla, papelotes, plumones, cuadernos de trabajo, receta de cocina.
INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN	Lista de cotejo
ANTES DE LA SESIÓN	Tener listo los papelotes con los problemas. Elaborar el cuadro de consolidación. Prever los materiales y recursos. Revisar las páginas 63 al 76 del cuaderno de trabajo Matemática 4 Elaborar la lista de cotejo.

IV. DESARROLLO DE LA SESIÓN

MOMENTOS	PROCESOS DIDÁCTICOS - SECUENCIA DE ESTRATEGIAS

INICIO



- Recogemos los **saberes previos** de los estudiantes mostrándoles una lámina o imagen en la que se vea el uso de las fracciones. En este caso:

Receta para galletas

- ½ taza de azúcar
- 2 ½ de harina
- 1/8 de kg de mantequilla
- ¼ kg manjar blanco
- 1 cucharadita de esencia de vainilla

- Pedimos a los estudiantes que pongan atención en la información que se les ha presentado. Preguntamos: ¿qué observan? Acompañamos a los estudiantes en la lectura rápida de la información.
- Planteamos las siguientes interrogantes: ¿cómo leen la expresión ½ taza y qué significa?, ¿qué significa 1/4 de kilo de manjar blanco? Orientamos las participaciones de los estudiantes a que se den cuenta de que son partes de una unidad. Pregunta: ¿cuál sería la unidad en cada uno de los casos expuestos?, ¿cómo son esas partes?
- Comunicamos el **propósito de la sesión**: hoy identificaremos y representaremos fracciones como partes de un todo con cantidades continuas. Para ello, utilizaremos las expresiones de medios y cuartos.
- Acordamos con los niños y niñas las normas de convivencia. Incidiremos que el trabajo solidario con nuestros compañeros será muy importante, así como compartir los materiales. Además, que todos escuchemos con atención las indicaciones y opiniones de los demás.

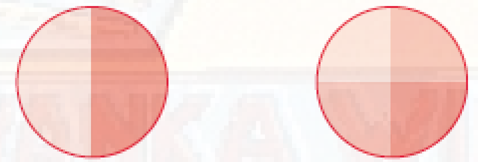
DESARROLLO

- Planteamos el siguiente problema:

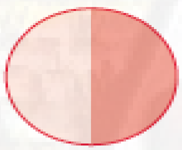
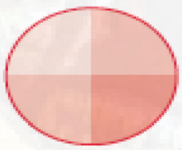
  Ricardo y Micaela son estudiantes de pastelería. Cada uno de ellos ha preparado un rico pastel del mismo tamaño, el cual fue dividido en porciones iguales. Ricardo lo dividió en 2 partes y Micaela en 4 partes, luego separaron una porción para realizar una degustación. ¿Qué cantidad de pastel ha separado Ricardo?, ¿qué parte ha separado Micaela?

- Aseguramos la **familiarización con el problema.** Preguntamos: ¿de qué trata el problema?, ¿qué deben averiguar?, ¿qué forma tienen los pasteles?, ¿qué pastel tiene más pedazos?, ¿quién tiene pedazos más grandes y pequeños respectivamente? Anotamos las respuestas más convenientes en la pizarra.
- Orientamos a los estudiantes para que **planifiquen una solución del problema**. Mencionamos que realizar la **simulación** del problema puede ayudar a solucionarlo. Preguntamos: ¿qué deben hacer?, ¿hay que simular una torta?, ¿de qué forma la representarán: ¿cuadrada, rectangular o circular? Motivamos a los estudiantes a que hagan diferentes **representaciones** para enriquecer la socialización.

- Formulamos las siguientes interrogantes: ¿cómo deben ser ambos pasteles?, ¿cómo deben ser las porciones? Si es necesario, realizamos una nueva lectura del problema.
- Orientamos a la **búsqueda y ejecución de estrategias** para realizar la representación. Para ello, preguntamos: ¿cómo pueden asegurarse de que cada porción sea de la misma forma y tamaño? Recoge los aportes de cada grupo. Algunos sugerirán el plegado del papel, poniendo en práctica sus conocimientos previos de simetría. Puede que otros se orienten por una representación cuadrangular ayudándose de la regla o el papelote cuadriculado.
- Formamos grupos de trabajo e indicamos al responsable de materiales que reparta hojas de colores, tijeras, goma, regla, compás, pabilo, papelotes y plumones.
- Brindamos un tiempo adecuado para que realicen sus representaciones de las tortas divididas de acuerdo con la información que brinda el problema.



- Preguntamos: ¿en cuántas partes dividió Ricardo su pastel?, ¿y Micaela?, ¿cuántas partes separó cada uno para la degustación? Píntalas de otro color o de un tono más fuerte.
- Llenamos el cuadro con la información obtenida.

	Número de partes iguales en que se dividió la torta	Partes que se separaron o cogieron	Fracción que representa cada parte	Se lee:
 Torta de Ricardo	2	1	$\frac{1}{2}$	Un medio de torta o la mitad de la torta
 Torta de Micaela	4	1	$\frac{1}{4}$	Un cuarto de la torta o la cuarta parte de la torta

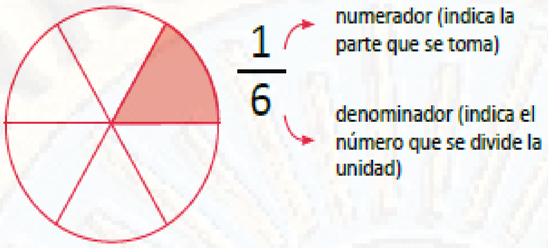
- Pedimos a los estudiantes que **socialicen sus representaciones** e identifiquen en ellas la unidad, las partes en que se dividió esta y la parte que se tomó para la degustación.
- Establecemos un orden para las participaciones.
- Orientamos también para que describan las diferentes estrategias aplicadas.
- **Formalizamos** el tema, reflexionando y concluyendo con los estudiantes, lo siguiente:

a. Completen los siguientes enunciados:

Al dividir una unidad en 2 partes iguales, cada una representa $\frac{\square}{\square}$ *de la unidad.*

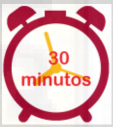
Al dividir una unidad en 4 partes iguales, cada una representa $\frac{\square}{\square}$ de la unidad.

b. Una fracción tiene dos términos llamados *numerador* y *denominador*.



Es importante recordar que una fracción representa una o varias partes de una unidad dividida en partes congruentes (todo continuo) o un grupo de una colección dividida en agrupaciones con la misma cantidad de elementos (todo discreto).

CIERRE



- Con participación directa de los estudiantes, desarrollamos la página 63 del Cuaderno de trabajo 4.
- Apoyamos a los estudiantes a resolver el problema utilizando diferentes formas de representación.
- Solicitamos a los estudiantes a expresar de forma escrita y verbal las fracciones que conocieron, completando el siguiente cuadro:

EXPRESIÓN SIMBÓLICA	EXPRESIÓN ESCRITA

- Reflexionamos con los estudiantes acerca de lo que aprendieron: ¿cómo se sintieron?, ¿tuvieron alguna dificultad?, ¿será importante o útil lo que aprendieron?, ¿por qué? También preguntamos si todos pusieron en práctica las normas de convivencia que se establecieron al inicio de la clase: ¿cómo esto les ayudó a trabajar en equipo?
- Los felicitamos por su participación y les brindamos palabras de afecto y agradecimiento.
- Pedimos a los estudiantes, que, como extensión, desarrollen individualmente la página 64 del Cuaderno de trabajo 4.

LISTA DE COTEJO

Nombres y apellidos	Expresa con diversas representaciones y lenguaje numérico (números, signos y expresiones verbales) su comprensión de: La fracción como parte-todo (**cantidad** discreta o **continua**), así como equivalencias y operaciones de adición y sustracción entre fracciones usuales usando fracciones equivalentes.			
	Identifica datos en problemas que impliquen repartir una cantidad en forma equitativa, expresándolos en un modelo de solución con fracciones usuales.	Expresa, de forma oral o escrita, el uso de las fracciones usuales en diversos contextos de la vida diaria (recetas, medidas de longitud, tiempo, etc.).	Elabora representaciones concretas, pictóricas, gráficas y simbólicas de las fracciones como parte de un todo.	Elabora representaciones concretas, pictóricas, gráficas y simbólicas de las fracciones como parte de un todo, fracciones homogéneas y heterogéneas, fracciones usuales equivalentes.
Maricielo Nelly				
Yeser				
Chen Tonia				
Jhoel Stiven				
Gerzim Snaider				
Emmily Alondra				
Kenyi Abdiel				
Samir Adair				
Elmer				
Yesser				
Genesy				
Maribel				
Felix Dante				
Paul Anderson				
Jose Gabriel				
Oscar Diego				
Ayelen Keyla				
Cielo Lizeth				
Yozermil Favio				
Briams Esmid				
Stefano Yamil				

✓ Logrado ✗ No logrado

		UNIDAD DE GESTION EDUCATIVA LOCAL HUANCAVELICA I.E.N° 36005 - ASCENSION DIRECCION Prof. Marisol Martínez Curipaco C.M. 1023269355 DIRECTORA (A)
Profesor de aula	Investigador	Directora

* Adaptación de Ministerio de Educación (2015b; pp. 269-276)

PLAN DE SESIÓN DE APRENDIZAJE N° 02*

I. DATOS INFORMATIVOS

INSTITUCIÓN EDUCATIVA	N° 36005 - "JVV" - ASCENSIÓN
TIPO	POLIDOCENTE

GRADO	SECCIÓN	N° DE ALUMNOS	DURACIÓN	FECHA DE EJECUCIÓN		
4°	A	21	2 h.p.	22	05	19

PROFESOR DE AULA	Sixto MAYHUA PARI
DIRECTORA	Marisol MARTINEZ CURIPACO
INVESTIGADOR/EJECUTOR	Miguel Angel CALDERON CASTAÑEDA

TÍTULO DE LA SESIÓN	**Resolvemos problemas de fracciones mediante representaciones gráficas de manera creativa.**

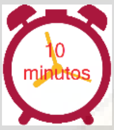
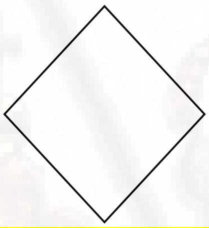
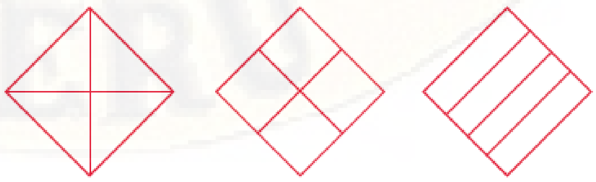
II. PROPÓSITO DE APRENDIZAJE

COMPETENCIA	Resuelve problemas de cantidad.
CAPACIDAD	• **Traduce cantidades a expresiones numéricas.** • **Comunica su comprensión sobre los números y las operaciones.** • **Usa estrategias y procedimientos de estimación y cálculo.** • Argumenta afirmaciones sobre las relaciones numéricas y las operaciones.
DESEMPEÑO	Expresa con diversas representaciones y lenguaje numérico (números, signos y expresiones verbales) su comprensión de: - La fracción como parte-todo (cantidad discreta o continua), así como equivalencias y operaciones de adición y sustracción entre fracciones usuales usando fracciones equivalentes.
ENFOQUE TRANSVERSAL	**Enfoque Orientación al bien común** Los docentes identifican, valoran y destacan continuamente actos espontáneos de los estudiantes en beneficio de otros, dirigidos a procurar o restaurar su bienestar en situaciones que lo requieran. **Enfoque Búsqueda de la Excelencia** Docentes y estudiantes comparan, adquieren y emplean estrategias útiles para aumentar la eficacia de sus esfuerzos en el logro de los objetivos que se proponen.
EVIDENCIA DE APRENDIZAJE	Resuelven problemas utilizando diversas formas de representación, vivencial, concreto, gráfico, pictórico o simbólico.

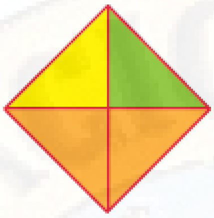
III. PREPARACIÓN PARA LA SESIÓN

MATERIALES Y RECURSOS	Papelotes y plumones, hojas bond A4, ficha de actividades para cada estudiantes "Aplicando lo aprendido"
INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN	Lista de cotejo
ANTES DE LA SESIÓN	Elaborar un cuadrado de papel de 21 cm x 21 cm (base de la cometa). Redactar los problemas en un papelote.

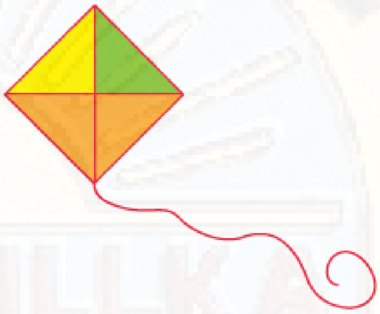
IV. DESARROLLO DE LA SESIÓN

MOMENTOS	PROCESOS DIDÁCTICOS - SECUENCIA DE ESTRATEGIAS
 INICIO	- Pedimos a los niños y a las niñas que coloquen en la mesa todos sus materiales de escritorio: colores, plumones, reglas, lápices. - Recogemos los saberes previos de los estudiantes, conversando con ellos sobre algunos gustos personales: ¿cuál es tu juguete favorito?, ¿cuál es tu color favorito?, ¿cuál la figura geométrica que más te gusta?, ¿te gustaría diseñar un juguete?, ¿qué necesitaríamos? Indica que para diseñar cosas se necesita usar varios materiales, aplicar nociones matemáticas como contar y medir, y, sobre todo, nuestra creatividad. - Comunicamos el **propósito de la sesión**: Hoy resolveremos de fracciones problemas mediante representaciones gráficas de manera creativa. - Acordamos con los niños y las niñas algunas normas de convivencia que los ayudarán a trabajar y a aprender mejor en equipo: Trabajar en equipo compartiendo los materiales, respetar los tiempos.
 DESARROLLO	- Planteamos el siguiente problema: Rosa está diseñando una cometa y quisiera que la ayudes con tu creatividad. Ella solo tiene la base y quiere que los diseños que se hagan en su interior tengan el mismo tamaño y que por lo menos una de las piezas sea de color verde. ¿La podrías ayudar?  Cuando tengas el diseño realizado responde: ¿qué parte de toda la base de la cometa representa la pieza de color verde? **Familiarización con el problema** - Para asegurar la comprensión del problema, realizamos algunas preguntas: ¿qué quiere elaborar Rosa?, ¿qué materiales tiene?, ¿qué condición debe tener su juguete?, ¿qué preferencias personales le colocarías? - Motivamos a los estudiantes para que piensen en un plan a fin de responder las preguntas, les entregamos hojas bond para que elaboren el diseño de la cometa. **Búsqueda y ejecución de estrategias** - Luego promovemos en los estudiantes la **búsqueda de estrategias** para responder cada interrogante. Les ayudamos planteando estas preguntas: ¿qué diseño prefieren?, ¿qué figura geométrica usarán? Inducimos a que digan triángulos, cuadrados, rectángulos. 

- Preguntamos: ¿cuántas figuras podemos usar? Luego que hayan culminado, pide que pinten sus diseños usando mínimamente dos colores diferentes, siendo uno de ellos el verde. Por ejemplo:



- Pedimos que peguen sus diseños en la pizarra, elige cualquier modelo representado y realiza la siguiente pregunta: ¿qué parte de toda la base de la cometa representa el color verde en ca



Socialización de representaciones

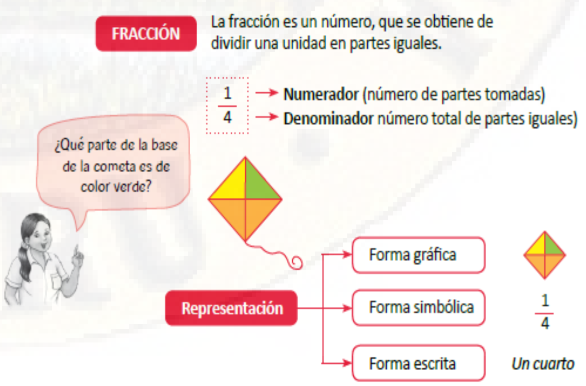
- En base al ejemplo, dialogamos con los estudiantes que el color verde representa 1 de 4, es decir, la cometa se ha dividido en 4 partes y una parte es de color verde: una parte de cuatro partes es verde.

  Preguntamos: ¿cómo se puede representar con números que lo verde es una parte de un total de cuatro partes iguales? Escucha sus respuestas y escribe lo que comenten, indica que también se puede usar las fracciones y que la situación propuesta se representaría de la siguiente manera:

  1 → Una parte de color verde.
  4 → El total de partes en que se dividió la cometa.

Reflexión y formalización

- Con ayuda de los estudiantes indicamos que:
  - La cantidad de partes que se toma es el numerador.
  - El total de partes en que se divide la unidad recibe el nombre de denominador.
  - Formalizan en su cuaderno tomando nota del problema y completan con ayuda del docente el organizador gráfico:



	- Precisamos que las fracciones sirven para representar cantidades que se toman de una unidad dividida en partes iguales, como el caso de la base de la cometa de Rosa. - **Reflexiona** con los estudiantes: ¿para qué nos sirven las fracciones?, ¿cómo se representan? **Planteamiento de otros problemas.** - Formamos 4 grupos. - Indicamos a los responsables de repartir los materiales que entreguen a cada grupo papelotes y plumones. A continuación, presentamos el siguiente problema: Rossana va a diseñar la pared de su cuarto, usando rectángulos y cuadrados.  ¿Qué fracción de la pared representan los cuadrados? ¿Qué fracción de la pared representan los rectángulos claros? ¿Qué fracción de la pared representan los rectángulos oscuros? - Preguntamos al grupo: ¿las figuras utilizadas en el diseño de la pared son iguales?, ¿para hallar la fracción de la pared necesitamos que las figuras sean iguales?, ¿qué hacemos? Esperamos que propongan en grupo que se debe dividir la pared (unidad) en puros cuadrados para responder la primera pregunta. Para responder la segunda y tercera pregunta, decimos al grupo: ¿cómo consigo puros rectángulos en el muro? Dirigimos para que el grupo proponga que se deben considerar dos cuadrados pequeños como un rectángulo. - Pedimos a cada grupo que presente sus conclusiones y ubique su producción en un lugar del aula visible para todos.
 CIERRE	- Dialogamos con los estudiantes sobre la sesión de hoy y planteamos las siguientes interrogantes: ¿qué aprendimos?; ¿qué nueva estrategia aprendimos?, ¿en qué consiste?, ¿por qué es importante usarla? - Revisamos con los niños y las niñas si se cumplieron las normas de convivencia que debían tener presentes y, si fuera el caso, conversen sobre qué podrían hacer para mejorar. - Tarea para la casa: Pedimos a los estudiantes que desarrollen la actividad "Aplicando lo aprendido" - Reflexionamos con los estudiantes acerca de lo que aprendieron: ¿cómo se sintieron?, ¿tuvieron alguna dificultad?, ¿será importante o útil lo que aprendieron?, ¿por qué?, ¿para qué?

LISTA DE COTEJO

Nombres y apellidos	Expresa con diversas representaciones y lenguaje numérico (números, signos y expresiones verbales) su comprensión de: La fracción como parte-todo (**cantidad** discreta o **continua**), así como equivalencias y operaciones de adición y sustracción entre fracciones usuales usando fracciones equivalentes.	
	Elabora representaciones concreta, pictórica, gráfica y simbólica de las fracciones propias, impropias, números mixtos y fracción de una cantidad continua.	Explica a través de ejemplos las diferentes formas de representar fracciones equivalentes.
Maricielo Nelly		
Yeser		
Chen Tonia		
Jhoel Stiven		
Gerzim Snaider		
Emmily Alondra		
Kenyi Abdiel		
Samir Adair		
Elmer		
Yesser		
Genesy		
Maribel		
Felix Dante		
Paul Anderson		
Jose Gabriel		
Oscar Diego		
Ayelen Keyla		
Cielo Lizeth		
Yozermil Favio		
Briams Esmid		
Stefano Yamil		

✓ Logrado ✗ No logrado

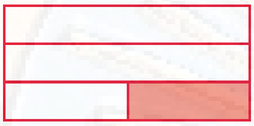
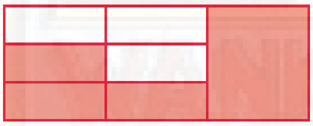
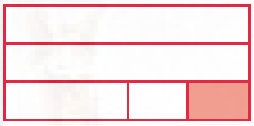
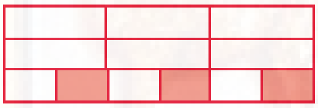
		UNIDAD DE GESTION EDUCATIVA LOCAL HUANCAVELICA I.E.N° 36005 - ASCENSION DIRECCION Prof. Marisol Martinez Curipaca C.M. 1023269355 DIRECTORA(A)
Profesor de aula	Investigador	Directora

INSTITUCIÓN EDUCATIVA Nº 36005 – ASCENSIÓN

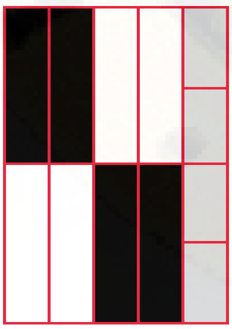
APLICANDO LO APRENDIDO

NOMBRES: ………………………………………………………… Grado y sección: ……………………

1. Completa la tabla según la parte sombreada. Realiza los trazos que consideres

Forma gráfica	Forma simbólica	Forma escrita
		
		
		
		
		

2. Representa cada color usando fracciones. Completa la tabla.



Color	Simbólica	Escrita
Negro		
Plomo		
Blanco		

* Adaptación de Ministerio de Educación (2015b; pp. 334-341)

PLAN DE SESIÓN DE APRENDIZAJE N° 03*

I. DATOS INFORMATIVOS

INSTITUCIÓN EDUCATIVA	N° 36005 - "JVV" - ASCENSIÓN
TIPO	POLIDOCENTE

GRADO	SECCIÓN	N° DE ALUMNOS	DURACIÓN	FECHA DE EJECUCIÓN		
4°	A	21	3 h.p.	29	05	19

PROFESOR DE AULA	Sixto MAYHUA PARI
DIRECTORA	MARISOL MARTINEZ CURIPACO
INVESTIGADOR/EJECUTOR	Miguel Angel CALDERON CASTAÑEDA

TÍTULO DE LA SESIÓN	**Resolvemos problemas de fracciones con cantidades continuas utilizando diversas representaciones.**

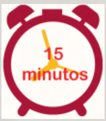
II. PROPÓSITO DE APRENDIZAJE

COMPETENCIA	Resuelve problemas de cantidad.
CAPACIDAD	• Traduce cantidades a expresiones numéricas. • Comunica su comprensión sobre los números y las operaciones. • **Usa estrategias y procedimientos de estimación y cálculo.** • Argumenta afirmaciones sobre las relaciones numéricas y las operaciones.
DESEMPEÑO	Expresa con diversas representaciones y lenguaje numérico (números, signos y expresiones verbales) su comprensión de: - La fracción como parte-todo (cantidad discreta o continua), así como equivalencias y operaciones de adición y sustracción entre fracciones usuales usando fracciones equivalentes.
ENFOQUE TRANSVERSAL	**Enfoque Orientación al bien común** - Los estudiantes comparten siempre los bienes disponibles para ellos en los espacios educativos (recursos, materiales, instalaciones, tiempo, actividades, conocimientos) con sentido de equidad y justicia.
EVIDENCIA DE APRENDIZAJE	Resuelven problemas de fracciones utilizando diversas formas de representación, vivencial, concreto, gráfico, pictórico o simbólico.

III. PREPARACIÓN PARA LA SESIÓN

MATERIALES Y RECURSOS	Botellas descartables, empaques de fideos, de galletas, hojas de colores, tijeras, regla, papelotes, plumones, cuadernos de trabajo.
INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN	Lista de cotejo
ANTES DE LA SESIÓN	Tener las botellas y empaques de los productos a presentarse, así como los papelotes con los problemas. Prever los materiales y recursos. Revisar las páginas 63 al 76 del cuaderno de trabajo Matemática 4 Elaborar la lista de cotejo.

IV. DESARROLLO DE LA SESIÓN

<table>
<tr><th>MOMENTOS</th><th>PROCESOS DIDÁCTICOS - SECUENCIA DE ESTRATEGIAS</th></tr>
<tr><td>

INICIO</td><td>

- Presentamos material concreto: botellas de gaseosa, empaques de fideos, bolsitas de arroz, botellas de yogur y empaques de galletas.

- Recogemos los **saberes previos** de los estudiantes dialogando: ¿conocen estos productos?, ¿para qué sirven?, ¿cómo los piden?, ¿cómo los compran?
- Pedimos a los estudiantes que pongan atención a la información que ofrecen los contenedores de los productos, ¿será la unidad?, ¿será el total?, ¿será una parte? Acompañamos a los estudiantes a revisar la información contenida. Orientamos las participaciones de los estudiantes a que se den cuenta de que son partes de una unidad. Pregunta: **¿cuál sería la unidad en cada uno de los casos expuestos?, ¿cómo son esas partes?**
- Comunicamos el **propósito de la sesión**: **hoy representaremos de diversas formas las fracciones como partes de un todo con cantidades continuas.**
- Acordamos con los niños y niñas las normas de convivencia. Incidiremos en el trabajo solidario entre compañeros para realizar los trabajos en equipo, así como compartir los materiales. Además, que todos escuchemos con atención las indicaciones y opiniones de los demás.

</td></tr>
<tr><td>

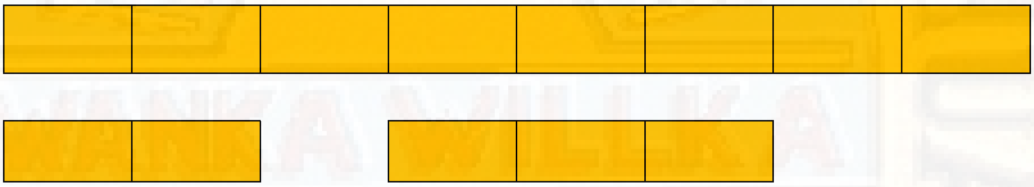
DESARROLLO</td><td>

- Planteamos el siguiente problema:
  Tania tenía un pliego de cartulina y lo dividió en ocho pedazos del mismo tamaño. Con dos pedazos hizo un carrito y con otros tres construyó un trencito. ¿Qué parte del pliego de cartulina utilizó Tania en total?, ¿qué parte de la cartulina sobró?
- Aseguramos la **familiarización con el problema,** preguntando: ¿de qué trata el problema?, ¿qué nos piden averiguar?, ¿el carrito o trencito requirió más pedazos de cartulina?, ¿sobrará algún pedazo de cartulina? Anotamos las respuestas de los estudiantes en la pizarra.
- Orientamos a los estudiantes para que **busquen una solución del problema**. Motivamos a los estudiantes a que hagan diferentes **representaciones** para

</td></tr>
</table>

resolver el problema, preguntando: ¿qué podemos hacer?, ¿podemos vivenciar el problema?, ¿de qué otra forma lo representarían? Mencionamos que realizar la **representación** del problema puede ayudar a solucionarlo de manera correcta.

- Orientamos a la **búsqueda y ejecución de estrategias** para realizar la representación. Para ello, preguntamos: ¿qué podemos utilizar para vivenciar el problema tal como se presenta?, ¿cómo nos aseguramos de que cada porción sea de la misma forma y tamaño?
- Entregamos a cada estudiante papeles de colores, reglas y tijeras, les pedimos que hagan la representación del problema, orientamos la vivenciación con las siguientes preguntas: ¿se trata de dos cartulinas diferentes?, ¿requerimos dos papeles diferentes?, ¿se trata de un todo?, ¿se trata de sus partes?, ¿cómo lo representamos en el papel?, ¿necesitamos medirlo? Brindamos un tiempo adecuado para que realicen sus representaciones de acuerdo con la información que brinda el problema.



Carrito **Trencito**

- Preguntamos: ¿cuántas cartulinas tenía?, ¿en cuántas partes dividió?, ¿cuánto utilizó para el carrito?, ¿cuánto utilizó para el trencito?, ¿en total cuánto utilizó?, ¿cuánto de cartulina le sobró?, ¿podemos cortar las partes para vivenciar el problema? podemos dibujarlo, podemos simbolizarlo.
- Pedimos a algunos estudiantes que **socialicen sus representaciones** e identifiquen en ellas la unidad, las partes en que se dividió esta y la parte que sobro en respuesta al problema. Responden a las preguntas.
- **Reflexionamos y formalizamos** el tema, concluyendo con los estudiantes, lo siguiente:

a. Completen los siguientes enunciados:

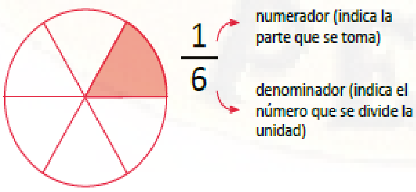
Al dividir una unidad en 8 partes iguales, cada una representa $\frac{\square}{\square}$ *de la unidad.*

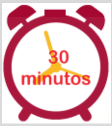
Si tomamos 2 partes de las 8 partes iguales, representa $\frac{\square}{\square}$ de la unidad.

Si tomamos 3 partes de las 8 partes iguales, representa $\frac{\square}{\square}$ de la unidad.

Si juntamos las 2 y 3 partes de las 8 partes iguales, representa $\frac{\square}{\square}$ de la unidad.

b. Una fracción tiene dos términos llamados *numerador* y *denominador*.



 CIERRE	- Formamos 4 grupos mediante siluetas con fracciones - Planteamos dos problemas, con la consigna de que, resuelvan los problemas utilizando los mismos papeles recortados en la representación anterior. Juan tomó ¼ de litro de gaseosa, María 2/4 de litro, ¿cuánto de gaseosa sobró, si la botella era de un litro? La mamá de Rebeca desea cocinar un tallarín para 12 personas, si ¼ de kilo de fideos alcanza para dos personas, ¿cuántos kilos utilizará para las doce personas? - Solicitamos a los estudiantes a representarlo de manera gráfica y simbólica en los papelotes. - Socializan sus trabajos, destacando que cualquiera sea la unidad, expresados, en litros, kilos, horas, etc. Pueden ser representados de distinta forma. - Reflexionamos con los estudiantes acerca de lo que aprendieron: ¿cómo lo aprendieron?, ¿qué hicieron?, ¿tuvieron alguna dificultad?, ¿será importante o útil lo que aprendieron?, ¿por qué? - También preguntamos si todos pusieron en práctica las normas de convivencia que se establecieron al inicio de la clase: ¿cómo esto les ayudó a trabajar en equipo? - Los felicitamos por su participación y les brindamos palabras de afecto y agradecimiento. - Pedimos a los estudiantes, que, como extensión, desarrollen individualmente la página 64 del Cuaderno de trabajo 4.

LISTA DE COTEJO

Nombres y apellidos	Expresa con diversas representaciones y lenguaje numérico (números, signos y expresiones verbales) su comprensión de: La fracción como parte-todo (**cantidad** discreta o **continua**), así como equivalencias y operaciones de adición y sustracción entre fracciones usuales usando fracciones equivalentes.			
	Identifica datos en problemas que impliquen repartir una cantidad en forma equitativa, expresándolos en un modelo de solución con fracciones usuales.	Expresa, de forma oral o escrita, el uso de las fracciones usuales en diversos contextos de la vida diaria (recetas, medidas de longitud, tiempo, etc.).	Elabora representaciones concretas, pictóricas, gráficas y simbólicas de las fracciones como parte de un todo.	Elabora representaciones concretas, pictóricas, gráficas y simbólicas de las fracciones como parte de un todo, fracciones homogéneas y heterogéneas, fracciones usuales equivalentes.
Maricielo Nelly				
Yeser				
Chen Tonia				
Jhoel Stiven				
Gerzim Snaider				
Emmily Alondra				
Kenyi Abdiel				
Samir Adair				
Elmer				
Yesser				
Genesy				
Maribel				
Felix Dante				
Paul Anderson				
Jose Gabriel				
Oscar Diego				
Ayelen Keyla				
Cielo Lizeth				
Yozermil Favio				
Briams Esmid				
Stefano Yamil				
David				

✓ Logrado ✗ No logrado

		UNIDAD DE GESTIÓN EDUCATIVA LOCAL · I.E.T. N° 36005 - ASCENSIÓN · DIRECCIÓN · HUANCAVELICA Prof. Marisol Martínez Curipaco C.M. 1023269355 DIRECTOR(A)
Profesor de aula	Investigador	Directora

* Adaptación de Ministerio de Educación (2015b)

PLAN DE SESIÓN DE APRENDIZAJE Nº 04*

I. DATOS INFORMATIVOS

INSTITUCIÓN EDUCATIVA	Nº 36005 – "JJV" – ASCENSIÓN
TIPO	POLIDOCENTE

GRADO	SECCIÓN	Nº DE ALUMNOS	DURACIÓN	FECHA DE EJECUCIÓN		
4°	A	21	3 h.p.	05	06	19

PROFESOR DE AULA	Sixto MAYHUA PARI
DIRECTORA	Marisol MARTINEZ CURIPACO
INVESTIGADOR/EJECUTOR	Miguel Angel CALDERON CASTAÑEDA

TÍTULO DE LA SESIÓN	**Representamos con fracciones la misma parte de un terreno.**

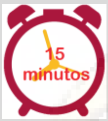
II. PROPÓSITOS DE APRENDIZAJE

COMPETENCIA	Resuelve problemas de cantidad.
CAPACIDAD	• **Traduce cantidades a expresiones numéricas.** • **Comunica su comprensión sobre los números y las operaciones.** • **Usa estrategias y procedimientos de estimación y cálculo.** • Argumenta afirmaciones sobre las relaciones numéricas y las operaciones.
DESEMPEÑO	Expresa con diversas representaciones y lenguaje numérico (números, signos y expresiones verbales) su comprensión de: - La fracción como parte-todo (cantidad discreta o continua), así como equivalencias y operaciones de adición y sustracción entre fracciones usuales usando fracciones equivalentes.
ENFOQUE TRANSVERSAL	**Enfoque Orientación al bien común** Los docentes identifican, valoran y destacan continuamente actos espontáneos de los estudiantes en beneficio de otros, dirigidos a procurar o restaurar su bienestar en situaciones que lo requieran. **Enfoque Búsqueda de la Excelencia** Docentes y estudiantes comparan, adquieren y emplean estrategias útiles para aumentar la eficacia de sus esfuerzos en el logro de los objetivos que se proponen.
EVIDENCIA DE APRENDIZAJE	Resuelven problemas utilizando diversas formas de representación, vivencial, concreto, gráfico, pictórico o simbólico.

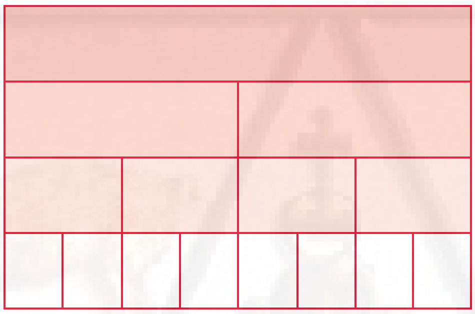
III. PREPARACIÓN PARA LA SESIÓN

MATERIALES Y RECURSOS	Regletas de colores, tiras de fracciones, cuaderno de trabajo, lista de cotejo.
INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN	Lista de cotejo
ANTES DE LA SESIÓN	Tener listo el material concreto (regletas) y las tiras fraccionarias de cartón. Elaborar la lista de cotejo. Revisar las páginas 63 al 72 del cuaderno de trabajo de Matemática 4

IV. DESARROLLO DE LA SESIÓN

MOMENTOS	SECUENCIA DE ESTRATEGIAS
 INICIO	- Recogemos los **saberes previos** de los niños y las niñas conversando con ellos sobre situaciones en las que han tenido que partir, repartir o dividir algún alimento, objeto o lugar. Podemos repartir hojas de papel bond para que doblen o tracen líneas con el fin de que las partan por la mitad, o en 3, 4, 6 u 8 partes iguales. Pedimos que expresen verbalmente qué parte de la hoja representan aquellas que vayamos señalando. - Comunicamos el **propósito de la sesión**: **hoy aprenderán a expresar con fracciones la misma parte de un terreno.** - Recordamos a los niños y las niñas que para trabajar en un ambiente favorable todos tienen que colaborar cumpliendo las normas de convivencia.
 DESARROLLO	- Organizamos a los estudiantes en grupos (expresiones distintas de fracciones) y les presentamos la siguiente situación problemática: Al salón de cuarto grado, le ha tocado cultivar la cuarta parte del terreno de un huerto. La maestra ha visitado el terreno y ha encontrado que es de forma rectangular y está dividido en 8 partes iguales. ¿Cuántas de estas partes les toca?  **Familiarización con el problema** - Realizamos preguntas que ayuden a los estudiantes a comprender el problema que se ha presentado: ¿de qué trata el problema?, ¿qué forma tiene nuestro terreno?, ¿alguna vez han visto un terreno de esa forma?, ¿alguna vez han resuelto un problema similar o parecido? **Búsqueda y ejecución de estrategias** - Promovemos la **búsqueda de estrategias.** Podemos invitar a algún estudiante a dibujar el terreno en la pizarra o presentar el terreno dibujado en un papelote. Continuamos preguntando: ¿en cuántas partes está dividido el terreno?, ¿qué fracción nos toca cultivar? Si es necesario, permíteles volver a leer el problema en voz alta.

- Indicamos al encargado o encargada de materiales que entregue regletas de colores a cada grupo y pregúntales si estas les pueden ayudar a resolver el problema. Permite que revisen el material y, en voz alta, expliquen cómo lo harían. Ayudamos con preguntas para que decidan cómo van a usarlas: ¿en cuántas partes está dividido nuestro terreno?, ¿qué regleta puede representar nuestro terreno?
- Esperamos que los estudiantes elijan la regleta marrón, pues está dividida en 8 partes. Otros estudiantes pueden juntar más de una regleta y elegir 8 blancas, 2 rosadas o 4 rojas.
- Si no llegan a estas otras respuestas, podemos ayudar preguntando: ¿podemos representar nuestro terreno juntando varias regletas iguales?, ¿cómo? Nos aseguramos de que lleguen en los grupos a todas esas formas de representar
- Felicitamos a los niños y las niñas por sus trabajos y pedimos por cada representación distinta un voluntario que muestre sus regletas. Luego, mostramos las tiras de cartulina y permitimos que elijan cuál es la que corresponde a sus representaciones. Ordenamos las tiras como se muestran a continuación.
- Pedimos que peguen sus diseños en la pizarra, elige cualquier modelo representado y realiza la siguiente pregunta: ¿qué parte de toda la base de la cometa representa el color verde en cada modelo?



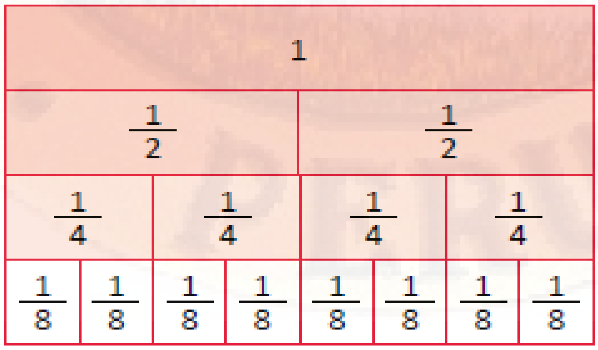
Socialización de representaciones

- Realiza preguntas a tus estudiantes para expresar la fracción de terreno que representa cada regleta y permite que algunos niños voluntarios escriban sobre las láminas de cartulina, la fracción que corresponde:

• ¿Cuántas regletas blancas hay en nuestro terreno? Entonces, ¿qué fracción representa cada regleta blanca?

• ¿Cuántas regletas rojas hay en nuestro terreno? ¿Qué fracción representa cada regleta roja?

• ¿Qué fracción representa cada regleta rosada?



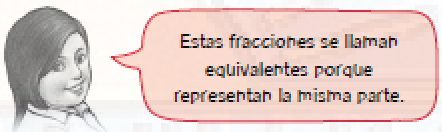
- Entregamos a los estudiantes las tiras de fracciones para que elaboren su propia representación gráfica.
- Pedimos observar la representación gráfica y los guiamos para que representen un cuarto del terreno usando estas fracciones. Indicamos que señalen un cuarto del terreno, seguramente señalarán la tira de ¼, entonces replicamos "Pero nuestro terreno está dividido en 8 partes iguales" , ¿qué pintamos? Se espera que señalen las dos tiras blancas de 1/8.
- Preguntamos: ¿dos regletas blancas a qué fracción representan? Escribimos en la pizarra las respuestas y repreguntamos: entonces, ¿¼ es lo mismo que 2/8?, ¿por qué?

Reflexión y formalización

- Formalizamos el concepto de fracciones equivalentes y escribe en la pizarra así:

Fracciones equivalentes

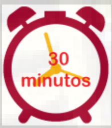
$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$$



- Continuamos buscando fracciones equivalentes para representar la mitad del terreno y el terreno total, y que escriban las equivalencias.
- Promovemos la reflexión del proceso de resolución, preguntando: ¿cuál fue nuestro problema inicial?, ¿qué hicimos primero?, ¿qué hicimos después?, ¿de cuántas maneras representamos nuestro terreno?, ¿encontramos varias fracciones que representaban lo mismo?, ¿cómo se llaman estas fracciones?, ¿cómo las encontramos?

Planteamos otros problemas

- Invita a tus estudiantes a resolver las actividades de la página 69 del Cuaderno de trabajo.



CIERRE

- Preguntamos a los estudiantes: ¿qué han aprendido hoy?, ¿cómo aprendieron?, ¿para qué sirve lo que han aprendido?, ¿qué fue lo más interesante?, ¿cuáles fueron las dificultades que encontraron?, ¿qué variaciones harían al juego?
- Revisamos con los niños y las niñas si se cumplieron las normas de convivencia que debían tener presentes y, si fuera el caso, conversen sobre qué podrían hacer para mejorar.
- Tarea para la casa: Indicamos a los niños y las niñas que con las tiras de fracciones recortadas, en casa respondan las siguientes preguntas: ¿cómo haríamos si nuestro terreno estuviera dividido en 6 partes iguales?, ¿y si fuera en diez partes iguales?, así mismo puedan desarrollar los problema de la página 107 de su Cuaderno de trabajo

LISTA DE COTEJO

Nombres y apellidos	Expresa con diversas representaciones y lenguaje numérico (números, signos y expresiones verbales) su comprensión de: La fracción como parte-todo (**cantidad** discreta o **continua**), así como equivalencias y operaciones de adición y sustracción entre fracciones usuales usando fracciones equivalentes.		
	Expresa, de forma oral o escrita, el uso de las fracciones usuales en diversos contextos de la vida diaria (empaques, botellas, recetas, etc.).	Elabora representaciones concretas, pictóricas, gráficas y simbólicas de las fracciones como parte de un todo.	Elabora representaciones concretas, pictóricas, gráficas y simbólicas de las fracciones como parte de un todo, fracciones homogéneas y heterogéneas, fracciones usuales equivalentes.
Maricielo Nelly			
Yeser			
Chen Tonia			
Jhoel Stiven			
Gerzim Snaider			
Emmily Alondra			
Kenyi Abdiel			
Samir Adair			
Elmer			
Yesser			
Genesy			
Maribel			
Felix Dante			
Paul Anderson			
Jose Gabriel			
Oscar Diego			
Ayelen Keyla			
Cielo Lizeth			
Yozermil Favio			
Briams Esmid			
Stefano Yamil			

✓ Logrado   ✕ No logrado

		UNIDAD DE GESTION EDUCATIVA LOCAL I.E.I. N° 36005 - ASCENSION DIRECCION HUANCAVELICA Prof. Marisol Martinez Curipaco C.M. 1023269355 DIRECTORA (A)
Profesor de aula	Investigador	Directora

* Adaptación de Ministerio de Educación (2015b, pp. 277-281)

PLAN DE SESIÓN DE APRENDIZAJE N° 05*

I. DATOS INFORMATIVOS

INSTITUCIÓN EDUCATIVA	Nº 36005 - "JVV" - ASCENSIÓN
TIPO	POLIDOCENTE

GRADO	SECCIÓN	Nº DE ALUMNOS	DURACIÓN	FECHA DE EJECUCIÓN		
4°	A	21	3 h.p.	12	06	19

PROFESOR DE AULA	Sixto MAYHUA PARI
DIRECTORA	Marisol MARTINEZ CURIPACO
INVESTIGADOR/EJECUTOR	Miguel Angel CALDERON CASTAÑEDA

TÍTULO DE LA SESIÓN	**Conocemos las fracciones como partes de un todo con cantidades discretas**

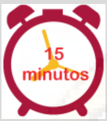
II. PROPÓSITO DE APRENDIZAJE

COMPETENCIA	Resuelve problemas de cantidad.
CAPACIDAD	• Traduce cantidades a expresiones numéricas. • Comunica su comprensión sobre los números y las operaciones. • **Usa estrategias y procedimientos de estimación y cálculo.** • Argumenta afirmaciones sobre las relaciones numéricas y las operaciones.
DESEMPEÑO	Expresa con diversas representaciones y lenguaje numérico (números, signos y expresiones verbales) su comprensión de: - La fracción como parte-todo (**cantidad discreta** o continua), así como equivalencias y operaciones de adición y sustracción entre fracciones usuales usando fracciones equivalentes.
ENFOQUE TRANSVERSAL	**Enfoque Orientación al bien común** - Los estudiantes comparten siempre los bienes disponibles para ellos en los espacios educativos (recursos, materiales, instalaciones, tiempo, actividades, conocimientos) con sentido de equidad y justicia.
EVIDENCIA DE APRENDIZAJE	Resuelven problemas utilizando diversas formas de representación, vivencial, concreto, gráfico, pictórico o simbólico.

III. PREPARACIÓN PARA LA SESIÓN

MATERIALES Y RECURSOS	Siluetas de ovejas, hojas bond y de colores, chapas, palitos, regla, papelotes y plumones
INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN	Lista de cotejo
ANTES DE LA SESIÓN	Tener listo los papelotes con los problemas. Elaborar el cuadro de consolidación. Prever los materiales y recursos. Elaborar la lista de cotejo.

IV. DESARROLLO DE LA SESIÓN

MOMENTOS	PROCESOS DIDÁCTICOS - SECUENCIA DE ESTRATEGIAS
 INICIO	- Recogemos los **saberes previos** de los estudiantes mostrándoles una lámina en la que se vea el uso de las fracciones en cantidades discretas. En este caso:  - Pedimos a los estudiantes que pongan atención en los textos e imágenes. Preguntamos: ¿qué observan?, ¿qué dice? - Planteamos las siguientes interrogantes: ¿qué significa un cuarto?, ¿un cuarto de qué?, entonces ¿qué significará ¼ de cuadernos?, ¿cuál será el total? Orientamos las participaciones de los estudiantes a que se den cuenta de que son partes de una unidad. Pregunta: ¿cuál sería la unidad o el total en los cuadernos?, ¿cómo y cuáles son sus partes? - Comunicamos el **propósito de la sesión: hoy identificaremos y representaremos fracciones como partes de un todo con cantidades discretas. Utilizando diversos materiales.** - Establecemos con los niños y niñas los acuerdos de convivencia, incidiendo en el trabajo solidario, así como en la compartición de materiales y que todos escuchemos con atención las indicaciones y opiniones de los demás.
 DESARROLLO	- Planteamos el siguiente problema: Roberto es un ganadero y quiere dejar como herencia sus 24 ovejas. Pero con la siguiente condición: para Juan, el hijo menor, la mitad; para el mayor, Germán, la tercera parte, y las ovejas que sobran para su esposa ¿Qué cantidad de ovejas serán para Juan?, ¿qué parte será para Germán? - Aseguramos la **familiarización con el problema.** Preguntamos: ¿de qué trata el problema?, ¿de quiénes trata el problema?, ¿qué debemos averiguar?, ¿cómo podríamos separar las ovejas para cada hijo?, ¿qué hacemos para resolver el problema?, ¿quién tendrá más ovejas? ¿cuántas ovejas serán para la mamá? Anotamos las respuestas en la pizarra. - Formamos grupos de trabajo e indicamos al responsable de materiales que reparta siluetas, hojas bond y de colores, chapas, palitos, regla, papelotes y plumones. - Orientamos a los estudiantes para que **planifiquen una solución del problema**. Mencionamos que pueden realizar la **vivenciación** para comprender y solucionarlo. Preguntamos: ¿qué podemos hacer?, ¿cómo podríamos representar las ovejas y las

personas?, ¿de qué forma lo representarían: con pictogramas, gráficos o signos? Motivamos a los estudiantes para que hagan diferentes **representaciones** para resolver el problema.

- Formulamos las siguientes interrogantes: ¿las ovejas a repartirse serán del total de ovejas?, ¿las ovejas se separarán en orden de acuerdo a si es menor o mayor? De ser necesario se realizará una nueva lectura del problema.
- Orientamos a la **búsqueda y ejecución de estrategias** para realizar la representación. Para ello, preguntamos: ¿cómo pueden asegurarse de que cada hijo reciba lo que le corresponde? ¿cuál sería la representación más adecuada? Brindamos retroalimentación en cada equipo.
- Brindamos un tiempo adecuado para que realicen sus representaciones de acuerdo con la información que brinda el problema.

- Preguntamos: ¿en cuántas partes dividimos para Juan?, ¿y para Rosa?, ¿cuántas ovejas quedan? Les indicamos que pueden pintarlo, encerrarlo en un corralito, o separarlo por unidades, etc.
- Llenamos el cuadro con la información obtenida.

	Número de partes iguales en qué se dividió las ovejas	Partes que se cogieron o separaron	Fracción que le correspon de a cada hijo	Expresión literal
Ovejas de Juan	2	1	$\frac{1}{2}$	Un medio /mitad
Ovejas de Germán	3	1	$\frac{1}{3}$	Un tercio
Ovejas de esposa	(lo que sobra)	---	---	cuatro

- Pedimos a los estudiantes que **socialicen sus representaciones** e identifiquen en ellas la unidad, las partes en que se dividió para cada hijo y cuánto sobra para la esposa.
- Establecemos un orden para las participaciones.
- Orientamos también para que describan las diferentes estrategias aplicadas.
- **Formalizamos** el tema, reflexionando y concluyendo con los estudiantes, lo siguiente:

a. Completen los siguientes enunciados:

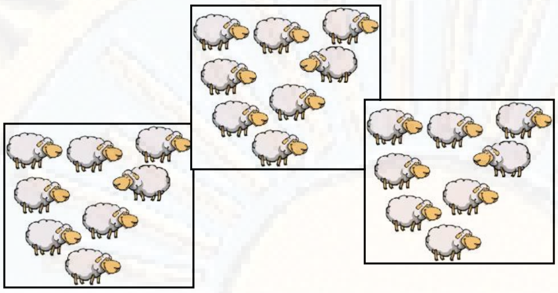
Al dividir un todo en 2 partes iguales, cada una representa $\frac{\square}{\square}$ *de la unidad.*

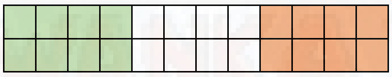
Sin embargo, cada parte está formado por ……….. elementos.

Al dividir una unidad en 3 partes iguales, cada una representa $\frac{\square}{\square}$ de la unidad.

Sin embargo, cada parte está formado por ……….. elementos.

b. Una fracción tiene dos términos llamados *numerador* y *denominador*.

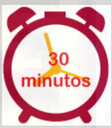




1 Numerador (indica la parte que se toma)
3 Denominador (indica el número de partes en que se divide el total)

Es importante recordar que una fracción representa una o varias partes de una unidad dividida en partes congruentes (todo continuo) o un grupo de una colección dividida en agrupaciones con la misma cantidad de elementos (todo discreto).

CIERRE



- **Planteamos otro problema:**
  En un salón de 20 estudiantes, a causa de la corrida de toros, 1/5 de los alumnos faltaron el día martes y el miércoles faltaron 2/5. ¿Qué cantidad de alumnos faltaron el día martes?, ¿qué cantidad faltaron el miércoles?, ¿qué día faltaron más estudiantes?
- Apoyamos a los estudiantes a resolver el problema utilizando diferentes formas de representación.
- Solicitamos a los estudiantes a expresar de forma escrita y verbal las fracciones que conocieron, completando el siguiente cuadro:

EXPRESIÓN SIMBÓLICA	EXPRESIÓN ESCRITA
½	
1/3	
1/5	
2/5	

- Reflexionamos con los estudiantes acerca de lo que aprendieron: ¿cómo se sintieron?, ¿tuvieron alguna dificultad?, ¿será importante o útil lo que aprendieron?, ¿por qué? También preguntamos si todos pusieron en práctica las normas de convivencia que se establecieron al inicio de la clase: ¿cómo esto les ayudó a trabajar en equipo?
- Los felicitamos por su participación y les brindamos palabras de afecto y agradecimiento.

LISTA DE COTEJO

Nombres y apellidos	Expresa con diversas representaciones y lenguaje numérico (números, signos y expresiones verbales) su comprensión de: La fracción como parte-todo (**cantidad discreta** o continua), así como equivalencias y operaciones de adición y sustracción entre fracciones usuales usando fracciones equivalentes.			
	Identifica datos en problemas que impliquen repartir una cantidad en forma equitativa, expresándolos en un modelo de solución con fracciones usuales.	Expresa, de forma oral o escrita, el uso de las fracciones usuales en diversos contextos de la vida diaria (cuadernos, panes, manzanas, tiempo, etc.).	Elabora representaciones concretas, pictóricas, gráficas y simbólicas de las fracciones como parte de un todo.	Elabora representaciones concretas, pictóricas, gráficas y simbólicas de las fracciones como parte de un todo.
Maricielo Nelly				
Yeser				
Chen Tonia				
Jhoel Stiven				
Gerzim Snaider				
Emmily Alondra				
Kenyi Abdiel				
Samir Adair				
Elmer				
Yesser				
Genesy				
Maribel				
Felix Dante				
Paul Anderson				
Jose Gabriel				
Oscar Diego				
Ayelen Keyla				
Cielo Lizeth				
Yozermil Favio				
Briams Esmid				
Stefano Yamil				
David				

✓ Logrado   ✗ No logrado

		UNIDAD DE GESTION EDUCATIVA LOCAL HUANCAVELICA I.E.T.N° 36005 - ASCENSION DIRECCION Prof. Marisol Martinez Curipaco C.M. 1023269355 DIRECTORA (A)
Profesor de aula	Investigador	Directora

* Elaboración: Prof. Miguel A. CALDERON CASTAÑEDA

PLAN DE SESIÓN DE APRENDIZAJE N° 06*

I. DATOS INFORMATIVOS

INSTITUCIÓN EDUCATIVA	N° 36005 - "JVV" - ASCENSIÓN
TIPO	POLIDOCENTE

GRADO	SECCIÓN	N° DE ALUMNOS	DURACIÓN	FECHA DE EJECUCIÓN		
4°	A	21	3 h.p.	19	06	19

PROFESOR DE AULA	Sixto MAYHUA PARI
DIRECTORA	Marisol MARTINEZ CURIPACO
INVESTIGADOR	Miguel Angel CALDERON CASTAÑEDA

TÍTULO DE LA SESIÓN	**Conocemos como funciona una librería**

II. PROPÓSITOS DE APRENDIZAJE

COMPETENCIA	Resuelve problemas de cantidad.
CAPACIDAD	• Traduce cantidades a expresiones numéricas. • Comunica su comprensión sobre los números y las operaciones. • **Usa estrategias y procedimientos de estimación y cálculo.** • Argumenta afirmaciones sobre las relaciones numéricas y las operaciones.
DESEMPEÑO	Expresa con diversas representaciones y lenguaje numérico (números, signos y expresiones verbales) su comprensión de: - La fracción como parte-todo (**cantidad discreta** o continua), así como equivalencias y operaciones de adición y sustracción entre fracciones usuales usando fracciones equivalentes.
ENFOQUE TRANSVERSAL	**Enfoque Búsqueda de la excelencia** - Docentes y estudiantes comparan, adquieren y emplean estrategias para organizarse como equipos e implementar un negocio sencillo.
EVIDENCIA DE APRENDIZAJE	Elabora un reporte que contiene una lista de precios de algunos productos, así como las formas de venta (docena, media docena, cuarto de ciento, etc.)

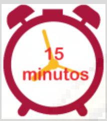
III. PREPARACIÓN PARA LA SESIÓN

MATERIALES Y RECURSOS	Tapas, semillas, material Base diez, masking tape, papelotes y plumones
INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN	Escala de valoración
ANTES DE LA SESIÓN	Preparar material concreto, como tapas o semillas, o las unidades del material Base diez. Conseguir algunas imágenes de productos con las cantidades visibles en sus empaques. Elaborar el instrumento de evaluación.

IV. DESARROLLO DE LA SESIÓN

MOMENTOS	PROCESOS DIDÁCTICOS - SECUENCIA DE ESTRATEGIAS

INICIO



- Saludamos a los estudiantes y dialogamos sobre el reto que resolverán. Les comentamos que enfrentarse a retos es importante porque les permite aprender cada vez más y perfeccionarse en lo que ya saben, y esto es importante para lograr la excelencia en el trabajo en equipo y en la búsqueda de la participación de todos.
- Mencionamos que resolverán un reto. Les escribimos en un lugar visible para toda el aula: ¿cómo funciona un puesto de librería?, ¿qué situaciones de compra y venta suelen presentarse en una librería?, ¿cómo las podemos resolver?
- Anotamos en la pizarra las ideas que vayan surgiendo como respuestas a las interrogantes. Podemos volver a formular preguntas, por ejemplo: para saber cómo funciona una librería, ¿debemos conocer qué productos se venden?, ¿debemos conocer algunos precios?, ¿será importante elaborar carteles de anuncio o de propaganda?, ¿deberíamos resolver algunas situaciones de compra y venta?, ¿nos interesa saber cuánto podemos vender durante un mes en un puesto de librería?, etc.
- Les comunicamos que iniciarán esta sesión conociendo cómo es un puesto de librería y que para ello resolverán el siguiente problema:

En el puesto de librería del mercado se venden productos al por mayor y al por menor. Para tener listos los paquetes y atender rápido a los clientes, se requiere prepararlos con diferentes cantidades de productos, según su forma de venta: por cajas, docenas, cientos, millares, etc.; así como fracciones de estas: media docena, medio millar. ¿En qué consistirá cada paquete?, ¿cuántos objetos contiene cada paquete y cuántos cada fracción de estos?

- **Familiarización con el problema**
- Pedimos a los estudiantes que lean el problema de forma individual y luego solicitamos que uno de ellos lo lea a la clase.
- Planteamos preguntas que ayuden a comprender de qué trata el problema y en qué consiste el reto que se les propone: ¿cuáles son los productos que se venden en una librería? Anotamos sus respuestas en la pizarra. Conversamos con ellos sobre las ventas al por mayor y al por menor, para que le encuentren sentido a la preparación de los paquetes. Pregunta al respecto: ¿cómo determinaremos cuántos productos ponemos en cada paquete?, ¿cómo usaremos las fracciones para esto?
- Compartimos con ellos el **propósito de la sesión: "Hoy determinaremos a cuántos productos equivalen las fracciones de una cantidad"**
- Les indicamos que observarán con atención sus representaciones y las afirmaciones que formulen sobre las fracciones.
- Rápidamente, recordamos con ellos las normas de convivencia, las cuales deben tener presentes en esta sesión.

DESARROLLO

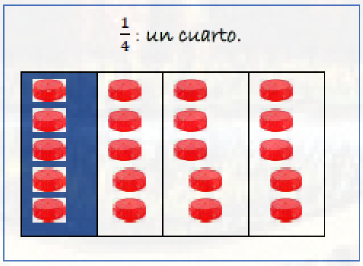
- Retomamos la lista de productos que escribieron en la pizarra y juntos completamos el siguiente cuadro, el cual nos permitirá determinar sus formas de venta. Los orientamos en esta tarea, ya que es posible que carezcan de conocimientos previos sobre el tema.

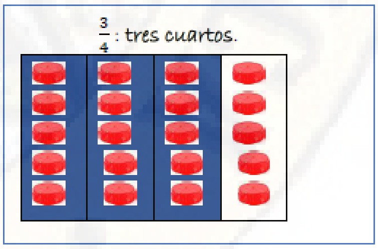
Producto	Formas de venta
Papel bond	- Por ciento - Por millar
Micas	- Paquete de 10
Plumones	- Por docena
Lápices	- Por cajas de 12 unidades
Gomas en barra	- Por docena
Borradores blancos	- Cajas de 20
Hojas de colores	- Paquetes de 100

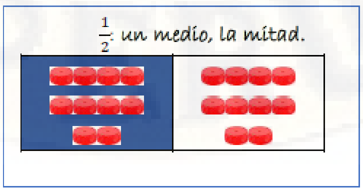
- Retornamos al problema y dialogamos con los estudiantes sobre la intención de elaborar los paquetes. Para esto, formulamos algunas preguntas: si ya sabemos que los lápices se venden por docena, ¿podemos venderlos por media docena?, ¿por un cuarto de docena?, ¿cómo sabremos si se puede o no?
- Los organizamos por equipos mediante cantidades continuas y discretas. Cada equipo se encargará de 2 productos y averiguará sus formas de venta en fracciones.
- Entregamos a los equipos materiales concretos: tapas, semillas, palitos, botones. Les preguntamos: ¿cómo pueden representar los productos con el material concreto y cómo pueden representar las fracciones?, ¿si las gomas se venden por docena, se pueden vender por media docena, y por un cuarto de docena?, ¿qué significa 1/4?, ¿cuántas gomas tiene un cuarto de docena?, ¿cómo lo saben?
- Recordamos con los estudiantes qué significa una fracción y cómo se puede representar. Escribimos esto en la pizarra con la participación de ellos.

$\frac{1}{4}$  Se parte o divide en cuatro partes iguales y se toma una parte.

- Volvemos a preguntar al respecto: ¿qué significa 1/4 de docena?, ¿en cuántas partes tendríamos que dividir la docena?, ¿cuántas partes tomaremos?
- Acompañamos a los equipos para que logren efectuar el proceso de dividir la docena en cuatro partes y tomar una de estas (un cuarto) o tres de estas (tres cuartos), según sea el caso. Algunas representaciones concretas o gráficas de los grupos pueden ser así:







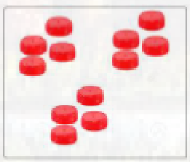
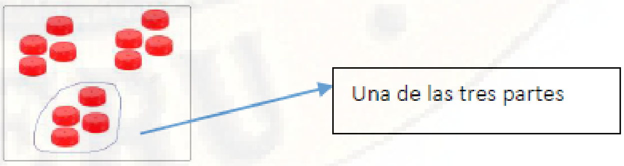
Las representaciones de los estudiantes se pueden dar de diversas formas, no solo pintando la parte correspondiente, sino también señalando o separando las partes del todo.

- Recordamos con ellos el problema que se está resolviendo: se requiere saber cuántas unidades se pondrá en cada paquete o medio paquete o cuarto de paquete. Invítalos a responder, en el caso de los borradores, las formas de venta y así completar el cuadro. Por ejemplo:

Producto	Forma de venta	Otras formas
Borradores blancos	Cajas de 20	½ caja = 10 borradores ¼ caja = 5 borradores ¾ caja = 15 borradores

- **Socialización de representaciones**
- Entregamos a cada equipo un papelote para que expresen sus representaciones y las socialicen con la clase.
- Durante la socialización, prestamos atención a la forma en que han dividido sus productos en partes iguales y al significado de la fracción. Planteamos algunas preguntas que destaquen este proceso, v.gr. ¿qué es el denominador de una fracción?, ¿en cuántas partes han dividido la cantidad de productos?, ¿cuántas han tomado de estas partes?
- Puede ser que algún equipo haya intentado vender las micas por cuartos de paquete cuando solo había 10 micas. Aprovechamos esta oportunidad valiosa para destacar el hecho de que cuando se trabaja con fracciones, no podemos dividir los objetos en cualquier número de partes iguales; tampoco podemos partir los productos, es decir, no se puede vender medio borrador, ni medio lápiz.
- **Reflexión y formalización**
- Tomamos alguna representación elaborada por los estudiantes y reflexionamos con ellos sobre el proceso que han seguido para determinar cuántos productos (borradores, lápices, micas, hojas, etc.) corresponden a cada forma de venta. Para esto, podemos formular preguntas como la siguiente: si queremos determinar un tercio de docena, ¿qué debemos hacer?
- Establecemos con los estudiantes que, según el significado de la fracción, se ha procedido de la siguiente manera:

FRACCIÓN DE UN CONJUNTO

$\frac{1}{3}$ de docena	Paso 1: divide en partes iguales, según el denominador. 
	Paso 2: toma las partes iguales según indica el numerador. 
Entonces: $\frac{1}{3}$ de docena es igual a 4.	

- Pedimos a los estudiantes que tomen nota en sus cuadernos y que repitan el mismo proceso para todas las formas de venta de los diferentes productos de la lista. Así darán respuesta al problema.

PRODUCTO	FORMA DE VENTA	OTRAS FORMAS
Hojas bond	Cientos	1/4 de ciento es igual a 25 hojas.
Borradores blancos	Cajas de 20	1/2 de caja es igual a 10 borradores. 1/4 de caja es igual a 5 borradores. 3/4 de caja es igual a 15 borradores.
Gomas en barra	Docena	3/4 de docena es igual a 9.

CIERRE

- Dialogamos con los estudiantes sobre lo desarrollado en la sesión. Les pedimos que, con sus propias palabras, expliquen qué han aprendido y cómo lo han llevado a cabo. Preguntamos a continuación: ¿para qué les sirve conocer las fracciones de un conjunto de objetos?, ¿será importante?
- Revisamos juntos si se cumplió el propósito de la sesión y si consideran que hay algún tema que deben profundizar, si han tenido dificultades o no han comprendido bien. Les decimos que en la siguiente sesión tendrán la oportunidad de seguir aprendiendo al respecto.
- Para trabajar en casa. Les pedimos a los estudiantes que resuelvan las páginas 62 y 117 de su Cuaderno de Trabajo.
- Reflexionamos sobre el aprendizaje: ¿qué avances tuvieron los estudiantes?, ¿qué dificultades tuvieron los estudiantes?, ¿qué aprendizajes debo reforzar en la siguiente sesión?, ¿qué actividades, estrategias y materiales funcionaron, y cuáles no?

ESCALA DE ESTIMACIÓN

Nombres y apellidos	Expresa con diversas representaciones y lenguaje numérico (números, signos y expresiones verbales) su comprensión de: La fracción como parte-todo (**cantidad discreta** o continua), así como equivalencias y operaciones de adición y sustracción entre fracciones usuales usando fracciones equivalentes.		
	Establece relaciones entre datos y acciones de dividir una cantidad en partes iguales, y las transforma en expresiones numéricas de fracciones.	Expresa con diversas representaciones y lenguaje numérico (números, signos y expresiones verbales) su comprensión de la fracción como parte de una cantidad discreta (cantidad de objetos).	Realiza afirmaciones sobre fracciones, las cuales justifica con varios ejemplos y sus conocimientos matemáticos.
Maricielo Nelly			
Yeser			
Chen Tonia			
Jhoel Stiven			
Gerzim Snaider			
Emmily Alondra			
Kenyi Abdiel			
Samir Adair			
Elmer			
Yesser			
Genesy			
Maribel			
Felix Dante			
Paul Anderson			
Jose Gabriel			
Oscar Diego			
Ayelen Keyla			
Cielo Lizeth			
Yozermil Favio			
Briams Esmid			
Stefano Yamil			
David			

No lo hace	-
Lo hace con ayuda	±
Lo hace solo	+

		UNIDAD GESTIÓN EDUCATIVA LOCAL I.E.I. N° 36005 - ASCENSIÓN DIRECCION HUANCAVELICA Prof. Marisol Martinez Curipaco C.M. 1023269355 DIRECTORA (A)
Profesor de aula	Investigador	Directora

* Adaptación de Ministerio de Educación (2015b)

PLAN DE SESIÓN DE APRENDIZAJE N° 07*

I. DATOS INFORMATIVOS

INSTITUCIÓN EDUCATIVA	N° 36005 - "JVV" - ASCENSIÓN
TIPO	POLIDOCENTE

GRADO	SECCIÓN	Nº DE ALUMNOS	DURACIÓN	FECHA DE EJECUCIÓN		
4°	A	21	3 h.p.	26	06	19

PROFESOR DE AULA	Sixto MAYHUA PARI
DIRECTORA	Marisol MARTINEZ CURIPACO
INVESTIGADOR	Miguel Angel CALDERON CASTAÑEDA

TÍTULO DE LA SESIÓN	**Resolvemos problemas de fracciones como partes de un todo con cantidades discretas**

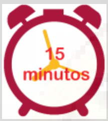
II. PROPÓSITO DE APRENDIZAJE

COMPETENCIA	Resuelve problemas de cantidad.
CAPACIDAD	• Traduce cantidades a expresiones numéricas. • Comunica su comprensión sobre los números y las operaciones. • **Usa estrategias y procedimientos de estimación y cálculo.** • Argumenta afirmaciones sobre las relaciones numéricas y las operaciones.
DESEMPEÑO	Expresa con diversas representaciones y lenguaje numérico (números, signos y expresiones verbales) su comprensión de: - La fracción como parte-todo (**cantidad discreta** o continua), así como equivalencias y operaciones de adición y sustracción entre fracciones usuales usando fracciones equivalentes.
ENFOQUE TRANSVERSAL	**Enfoque Orientación al bien común** - Los estudiantes comparten siempre los bienes disponibles para ellos en los espacios educativos (recursos, materiales, instalaciones, tiempo, actividades, conocimientos) con sentido de equidad y justicia.
EVIDENCIA DE APRENDIZAJE	Resuelve problemas de fracciones haciendo uso de diferentes tipos de representaciones matemáticas: con palabras, concreto, gráfico, pictórico y simbólico.

III. PREPARACIÓN PARA LA SESIÓN

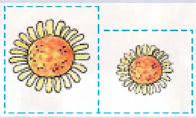
MATERIALES Y RECURSOS	Siluetas de flores, hojas bond y de colores, papelotes y plumones
INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN	Lista de cotejo
ANTES DE LA SESIÓN	Tener listo los papelotes con los problemas. Elaborar el cuadro de consolidación. Prever los materiales y recursos. Elaborar la lista de cotejo.

IV. DESARROLLO DE LA SESIÓN

MOMENTOS	PROCESO DIDÁCTICO - SECUENCIA DE ESTRATEGIAS
 INICIO	- Planteamos el siguiente problema: En la familia de Raúl cada uno tiene su plato de comida, pero en un accidente se rompieron un tercio de ellos, ahora solo tiene 10. ¿Cuántos platos tenían en total?, ¿cuántos son los miembros de su familia?  - Pedimos a los estudiantes que pongan atención en el texto e imágenes. Indicamos que lean en silencio e individualmente, y luego leen en coro. - Planteamos las siguientes interrogantes: ¿de qué trata el problema?, ¿qué es lo que sucedió?, ¿qué nos pide averiguar?, ¿qué datos nos pueden ayudar a resolver el problema?, ¿cómo lo representaríamos para resolverlo?, ¿cuál sería la unidad o el total?, ¿cómo y cuáles serán sus partes? Lo resolvemos con participación de los estudiantes. - Comunicamos el **propósito de la sesión: Resolveremos problemas de fracciones como partes de un todo con cantidades discretas.** - Establecemos con los niños y niñas los acuerdos de convivencia, incidiendo en el trabajo solidario, así como en la compartición de materiales y que todos escuchemos con atención las indicaciones y opiniones de los demás.
 DESARROLLO	- Planteamos el reto: Recortar la siguiente lámina.  - Les pedimos que recorten las figuras, observen y busquen similitudes, le asignen sus nombres. - Aseguramos la **familiarización con el problema.** Preguntamos: ¿cuántas flores hay?, ¿todas las flores son iguales?, ¿en qué se diferencian?, ¿pueden partir una flor roja?, ¿cómo lo harían?, ¿pueden formar pequeños grupos?, ¿con qué criterio? - Les entregamos hojas bond a cada estudiante. En ellas, pegando las flores, realizan enunciados en base a las 12 flores y criterios que asumirán. Cada estudiante **plantea y ejecuta sus estrategias**, ¿cómo formarías los grupos con todos los elementos de

la colección?, ¿qué podrías tener en cuenta?, ¿cómo lo enunciarías?, ¿cómo lo representarías?, ¿cómo se escribiría?

- Los niños voluntariamente **socializan sus representaciones** escritas de manera verbal. Los compañeros validan o refuerzan lo expresado. Preguntamos: ¿qué grupo o grupos has formado?, dirán: "He formado dos grupos, un grupo de flores grandes y otro de flores pequeñas" Repreguntamos: ¿qué parte de la colección representa las flores grandes y las flores pequeñas?
- **Reflexionamos y formalizamos** planteando las siguientes interrogantes para todo el grupo: ¿todas las flores son azules?, ¿es cierto que la mitad de las flores son amarillas?, ¿qué hay más: flores azules o flores grandes?, ¿por qué?, ¿cómo sabremos que los dos girasoles son un sexto de las flores?, etc.
- Con ayuda de los estudiantes completamos el siguiente cuadro con la información obtenida.

	Número total de la colección de flores	Partes o grupos en que se dividieron	Fracción que le correspon de a cada grupo	Expresión literal
 **"Flores rojas"**	12	3	$\frac{1}{3}$	Un tercio
 **"Flores pequeñas"**	12	2	$\frac{1}{2}$	Un medio
 **"Girasoles"**	12	6	$\frac{1}{6}$	Un sexto

- Concluimos lo siguiente:

a. Completen los siguientes enunciados:

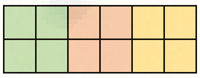
Al dividir una colección de 12 elementos en 2 partes iguales, cada una representa $\frac{\square}{\square}$ *de la unidad.*

Sin embargo, cada parte está formado por .... elementos.

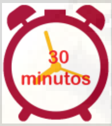
Al dividir una colección en 3 grupos iguales, cada una representa $\frac{\square}{\square}$ de la unidad.

Sin embargo, cada parte o grupo está formado por .... elementos.

b. Una fracción tiene dos términos llamados *numerador* y *denominador*.



1 Numerador (indica la parte que se toma)
3 Denominador (indica el número de partes en que se divide el total)

	Los niños y las niñas deben darse cuenta de que el "todo" es una colección porque se trata de cantidades que pueden contar (cantidades discretas) y, como colección, es divisible en un número finito de veces con igual cantidad de elementos. Sin embargo, como unidad, es decir, una persona, un animal o una cosa —en este caso una flor— no es divisible; o sea, no se puede dividir a un niño por la mitad, a un perro en tres partes, una moto en cinco partes o una flor en cuatro partes "iguales", respectivamente.
 CIERRE	- **Planteamos otro problema:** Un sexto de los miembros de una familia son 3 personas. ¿Cuántos son los miembros de la familia? - Apoyamos a los estudiantes a resolver el problema utilizando diferentes formas de representación. - Reflexionamos con los estudiantes acerca de lo que aprendieron: ¿cómo se sintieron?, ¿tuvieron alguna dificultad?, ¿será importante o útil lo que aprendieron?, ¿por qué? - También preguntamos si todos pusieron en práctica las normas de convivencia que se establecieron al inicio de la clase: ¿cómo esto les ayudó a trabajar en equipo? - Los felicitamos por su participación y les brindamos palabras de afecto y agradecimiento.

LISTA DE COTEJO

Nombres y apellidos	Expresa con diversas representaciones y lenguaje numérico (números, signos y expresiones verbales) su comprensión de: La fracción como parte-todo (**cantidad discreta** o continua), así como equivalencias y operaciones de adición y sustracción entre fracciones usuales usando fracciones equivalentes.		
	Expresa, de forma oral o escrita, el uso de las fracciones usuales en diversos contextos de la vida diaria (platos, cuadernos, etc.)	Elabora representaciones concretas, pictóricas, gráficas y simbólicas de las fracciones como parte de un todo.	Elabora representaciones concretas, pictóricas, gráficas y simbólicas de las fracciones como parte de un todo.
Maricielo Nelly			
Yeser			
Chen Tonia			
Jhoel Stiven			
Gerzim Snaider			
Emmily Alondra			
Kenyi Abdiel			
Samir Adair			
Elmer			
Yesser			
Genesy			
Maribel			
Felix Dante			
Paul Anderson			
Jose Gabriel			
Oscar Diego			
Ayelen Keyla			
Cielo Lizeth			
Yozermil Favio			
Briams Esmid			
Stefano Yamil			
David			

✓ Logrado ✕ No logrado

Profesor de aula	Investigador	Directora

UNIDAD DE GESTIÓN EDUCATIVA LOCAL I.E.T.N° 36005 - ASCENSIÓN DIRECCIÓN HUANCAVELICA

Prof. Marisol Martinez Curipaco
C.M. 1023269355
DIRECTORA (A)

* *Elaboración: Prof. Miguel A. CALDERON CASTAÑEDA*

PLAN DE SESIÓN DE APRENDIZAJE N° 08*

I. DATOS INFORMATIVOS

INSTITUCIÓN EDUCATIVA	N° 36005 - "JVV" - ASCENSIÓN
TIPO	POLIDOCENTE

GRADO	SECCIÓN	Nº DE ALUMNOS	DURACIÓN	FECHA DE EJECUCIÓN		
4°	A	21	3 h.p.	03	07	19

PROFESOR DE AULA	Sixto MAYHUA PARI
DIRECTORA	Marisol MARTINEZ CURIPACO
INVESTIGADOR	Miguel Angel CALDERON CASTAÑEDA

TÍTULO DE LA SESIÓN	**Representamos y hallamos fracciones equivalentes**

II. PROPÓSITO DE APRENDIZAJE

COMPETENCIA	Resuelve problemas de cantidad.
CAPACIDAD	• **Traduce cantidades a expresiones numéricas.** • **Comunica su comprensión sobre los números y las operaciones.** • **Usa estrategias y procedimientos de estimación y cálculo.** • **Argumenta afirmaciones sobre las relaciones numéricas y las operaciones.**
DESEMPEÑO	Expresa con diversas representaciones y lenguaje numérico (números, signos y expresiones verbales) su comprensión de: - La fracción como parte-todo (cantidad discreta o continua), así como equivalencias y operaciones de adición y sustracción entre fracciones usuales usando fracciones equivalentes.
ENFOQUE TRANSVERSAL	**Enfoque Orientación al bien común** - Los estudiantes comparten siempre los bienes disponibles para ellos en los espacios educativos (recursos, materiales, instalaciones, tiempo, actividades, conocimientos) con sentido de equidad y justicia.
EVIDENCIA DE APRENDIZAJE	Resolverán problemas de fracciones equivalentes utilizando tiras de fracciones. Enunciarán fracciones de manera verbal y escrita.

III. PREPARACIÓN PARA LA SESIÓN

MATERIALES O RECURSOS	Lápices, colores y regla, papelote o pizarra, plumones, goma, tiras de fracciones, cuaderno de trabajo y lista de cotejo.
INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN	Lista de cotejo
ANTES DE LA SESIÓN	Tener listo los materiales a utilizarse. Revisar las páginas 107 y 108 del cuaderno de trabajo Matemática 4 Elaborar la lista de cotejo

IV. DESARROLLO DE LA SESIÓN

MOMENTOS	PROCESO DIDÁCTICO - SECUENCIA DE ESTRATEGIAS

INICIO

- Recogemos los **saberes previos** de los estudiantes preguntando si recuerdan qué fracciones hemos representado en las sesiones anteriores. Realizamos anotaciones en la pizarra y reforzamos pidiendo ejemplos de fracciones con cantidades continuas y discretas.
- Comunicamos el **propósito de la sesión: hoy representaremos fracciones que tienen como denominadores usuales 3, 6, 5 y 10.**
- Revisamos con los estudiantes las normas de convivencia necesarias para trabajar en un ambiente favorable. Resaltando las que requieren mayor atención para el logro de objetivos.

DESARROLLO

- Planteamos el siguiente problema:

Adela es una señora que tiene un puesto en el mercado. Ella vende diversos productos, como botones, cierres cintas, entre otros. En su estante tiene hermosas cintas de un metro de longitud, las cuales ofrece al público. Una de sus clientas le ha hecho el siguiente pedido: "Adela, dame por favor un tercio de la cinta anaranjada, un sexto de la cinta celeste, un quinto de la amarilla y un décimo de la rosada. ¿Cómo puede hacer Adela para cumplir con el pedido?

Familiarización con el problema

- Planteamos preguntas para la comprensión del problema: ¿de qué trata el problema?, ¿qué debe hacer Adela?, ¿qué partes debe conseguir?, ¿cuál sería la unidad?

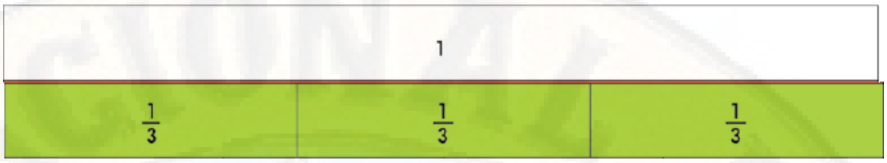
Búsqueda y ejecución de estrategias

- Orientamos a los estudiantes hacia la búsqueda de estrategias para resolver el problema. Por ejemplo, pregúntales: ¿qué material podríamos usar para simular el problema?, ¿cómo haremos para que las medidas de las partes sean iguales? Anotamos en la pizarra todas las sugerencias y los orientamos a utilizar las tiras de fracciones, teniendo en cuenta que este material es de fácil manipulación y permite optimizar el tiempo de trabajo.
- Formamos grupos de trabajo y les pedimos que observen las tiras de fracciones y seleccionen la que representa la unidad. Les preguntamos: ¿por qué esta regleta representa la unidad? Una posible respuesta será que es porque es la más grande o la que no está dividida en otras partes iguales.

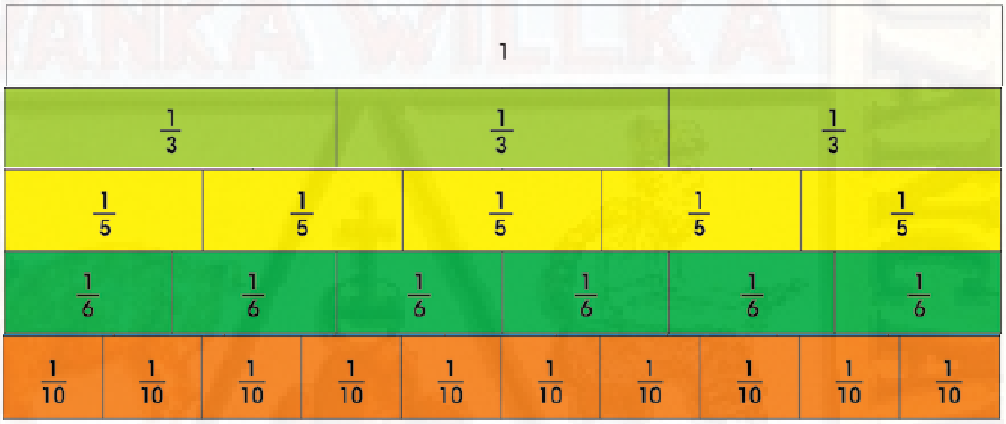
- Indicamos que tomaremos como referencia la tira blanca, que representa el total de la cinta.
- Empezaremos con el pedido de "un tercio de la cinta blanca" Preguntamos: ¿qué idea tienen de un tercio o tercera parte?, ¿qué debemos hacer para saber cuál es la tercera parte de esta tira?, ¿las tiras más pequeñas les ayudarán? Una

posible solución será buscar tres tiras iguales que juntas midan los mismo que la tira roja.

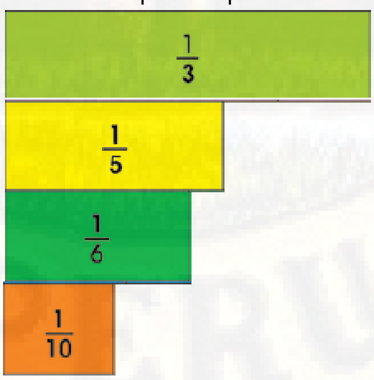
- Les pedimos que ubiquen la tira que han seleccionado debajo de la anterior.



- Formulamos preguntas como las siguientes: ¿cuántas partes conforman el entero?, ¿qué fracción de la tira representa la parte que venderá Adela?, ¿y la parte que no venderá?
- Indicamos a los estudiantes que, en grupos y por turnos, expliquen lo que significa un tercio o la tercera parte de una unidad.
- Orientamos a que de la misma forma busquen las tiras de fracciones que les ayudarán a obtener las medidas de las otras cintas.
- Les pedimos que las coloquen debajo de las anteriores. Brindamos un tiempo adecuado para la actividad.



- Hacemos que los estudiantes reflexionen sobre cada tira de fracciones. Preguntamos: ¿cuántas partes forman esta unidad?, ¿qué fracción representa cada parte?, ¿qué fracción de la cinta venderá Adela y qué fracción de la cinta le quedará en cada caso?
- Pedimos a los estudiantes que separen las tiras de fracciones que representan los pedazos de tela que Adela separará para su clienta.



- Preguntamos: ¿qué color de cinta será la de mayor tamaño?, ¿y la de menor tamaño?, ¿por qué la tira de un décimo es más pequeña que la tira de un tercio? Los niños y las niñas deben responder que, en el primer caso, la unidad ha sido dividida en más partes, por eso cada parte es más pequeña; en el segundo caso, la tira ha sido dividida en menos partes iguales, por eso cada parte es más grande.

Socialización de representaciones

- Pedimos a los estudiantes que observen la construcción que han hecho y pregunta: ¿qué tiras juntas equivalen a una tira verde clara? Los estudiantes deben indicar que dos tiras verdes oscuras de 1/6 equivalen a una tira verde clara de 1/3.
- Luego, formulamos la siguiente pregunta: entonces, ¿podemos decir que 1/3 es equivalente a 2/6?
- Los motivamos a que busquen otras fracciones equivalentes mediante la manipulación de las tiras y que escriban qué fracciones equivalentes han construido. Luego, pídeles que realicen las representaciones en sus cuadernos y escriban las equivalencias que han encontrado.

$\frac{2}{5}$ es equivalente a $\frac{4}{10}$

$\frac{1}{3}$ es equivalente a $\frac{2}{6}$

$\frac{1}{4}$ es equivalente a $\frac{2}{8}$

$\frac{3}{6}$ es equivalente a $\frac{4}{8}$

Reflexión y formalización

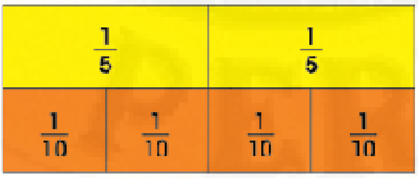
- Formalizamos con los estudiantes lo que han aprendido el día de hoy. Los orientamos a que completen las siguientes expresiones en sus cuadernos.

Para tomar _____ de la unidad, debo dividir la unidad en _______ partes iguales y tomar ______ parte.

Para tomar 2/5 de la unidad, debo dividir la unidad en _______ partes iguales y tomar _____ partes.

Para tomar _________ de la unidad, debo dividir la unidad en 8 partes iguales y tomar 3 partes.

- Indicamos también que el día de hoy han utilizado las tiras para formar fracciones, las cuales son representadas por aquellas, pero se escriben diferente.
- Indicamos también que para expresar la equivalencia pueden usar el símbolo < > que se lee "es equivalente a" . Ejemplo:



$\frac{2}{5}$ es equivalente a $\frac{4}{10}$

$\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$

- Reflexionamos con los niños y las niñas sobre la importancia de conocer las principales fracciones para realizar actividades cotidianas que impliquen dividir la

<table>
<tr><td></td><td>unidad en partes iguales. Les preguntamos cómo se sintieron y si les fue sencillo comprender la representación y la equivalencia de fracciones.</td></tr>
<tr><td>

CIERRE</td><td>Planteamiento de otros problemas
- Solicitamos a los estudiantes que, en parejas, resuelvan las páginas 107 y 108 del Cuaderno de trabajo.
- Dialogamos con los estudiantes sobre la estrategia utilizada: representar fracciones y hallar fracciones equivalentes. Pregunta si les gustó utilizar las tiras de fracciones y si estas les ayudaron a comprender lo estudiado. Solicita sugerencias para que cada grupo mejore su trabajo o reoriente la actividad.
- Reflexionamos con los estudiantes acerca de lo que aprendieron: ¿cómo se sintieron?, ¿tuvieron alguna dificultad? Preguntamos si todos cumplieron los acuerdos de convivencia que se establecieron al inicio de la clase: ¿cómo esto les ayudó a trabajar en equipo?
- Los felicitamos por su participación y les brindamos palabras de afecto y agradecimiento.</td></tr>
</table>

LISTA DE COTEJO

Nombres y apellidos	Expresa con diversas representaciones y lenguaje numérico (números, signos y expresiones verbales) su comprensión de: La fracción como parte-todo (cantidad discreta o continua), así como equivalencias y operaciones de adición y sustracción entre fracciones usuales usando fracciones equivalentes.			
	Identifica datos en problemas que impliquen repartir una cantidad en forma equitativa, expresándolos en un modelo de solución con fracciones usuales.	Expresa, de forma oral o escrita, el uso de las fracciones usuales en diversos contextos de la vida diaria (recetas, medidas de longitud, tiempo, etc.).	Elabora representaciones concretas, pictóricas, gráficas y simbólicas de las fracciones como parte de un todo.	Elabora representaciones concretas, pictóricas, gráficas y simbólicas de las fracciones como parte de un todo, fracciones homogéneas y heterogéneas, fracciones usuales equivalentes.
Maricielo Nelly				
Yeser				
Chen Tonia				
Jhoel Stiven				
Gerzim Snaider				
Emmily Alondra				
Kenyi Abdiel				
Samir Adair				
Elmer				
Yesser				
Genesy				
Maribel				
Felix Dante				
Paul Anderson				
Jose Gabriel				
Oscar Diego				
Ayelen Keyla				
Cielo Lizeth				
Yozermil Favio				
Briams Esmid				
Stefano Yamil				
David				

✓ Logrado ✗ No logrado

		Prof. Marisol Martinez Curipaca C.M. 1023269355 DIRECTORA (A)
Profesor de aula	Investigador	Directora

* Adaptación de Ministerio de Educación (2015b; pp.283-289)

PLAN DE SESIÓN DE APRENDIZAJE N° 09*

I. DATOS INFORMATIVOS

INSTITUCIÓN EDUCATIVA	N° 36005 - "JVV" - ASCENSIÓN
TIPO	POLIDOCENTE

GRADO	SECCIÓN	N° DE ALUMNOS	DURACIÓN	FECHA DE EJECUCIÓN		
4°	A	21	3 h.p.	10	07	19

PROFESOR DE AULA	Sixto MAYHUA PARI
DIRECTORA	Marisol MARTINEZ CURIPACO
INVESTIGADOR	Miguel Angel CALDERON CASTAÑEDA

TÍTULO DE LA SESIÓN	**Resolvemos problemas de fracciones como partes de un todo con cantidades continuas y discretas**

II. PROPÓSITOS DE APRENDIZAJE

COMPETENCIA	Resuelve problemas de cantidad.
CAPACIDAD	• Traduce cantidades a expresiones numéricas. • Comunica su comprensión sobre los números y las operaciones. • **Usa estrategias y procedimientos de estimación y cálculo.** • Argumenta afirmaciones sobre las relaciones numéricas y las operaciones.
DESEMPEÑO	Expresa con diversas representaciones y lenguaje numérico (números, signos y expresiones verbales) su comprensión de: - La fracción como parte-todo (**cantidad discreta o continua**), así como equivalencias y operaciones de adición y sustracción entre fracciones usuales usando fracciones equivalentes.
ENFOQUE TRANSVERSAL	**Enfoque Orientación al bien común** - Los estudiantes comparten siempre los bienes disponibles para ellos en los espacios educativos (recursos, materiales, instalaciones, tiempo, actividades, conocimientos) con sentido de equidad y justicia.
EVIDENCIA DE APRENDIZAJE	Resuelven problemas de fracciones realizando representaciones concretas, pictóricas, gráficas, simbólicas, verbales y escritas.

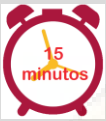
III. PREPARACIÓN PARA LA SESIÓN

MATERIALES Y RECURSOS	Hojas bond y de colores, papelotes, plumones, palitos, botones, Base diez, tapas, chapas, regletas de colores.
INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN	Lista de cotejo
ANTES DE LA SESIÓN	Tener listo los papelotes con los problemas. Elaborar el cuadro de consolidación. Prever los materiales y recursos. Elaborar la lista de cotejo.

IV. DESARROLLO DE LA SESIÓN

MOMENTOS	PROCESO DIDÁCTICO - SECUENCIA DE ESTRATEGIAS

INICIO

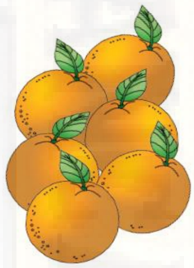


- Recogemos saberes previos, presentando imágenes de objetos, animales, etc. Planteamos preguntas: ¿qué será?, ¿se podrá dividir o se podrá contar sus elementos?, ¿representarán cantidades continuas o discretas?, ¿cómo son las fracciones con cantidades continuas y cómo son las fracciones con cantidades discretas?
- Dialogamos sobre los objetos o seres que se pueden dividir o contar y que encontramos en nuestra vida cotidiana.
- Comunicamos el **propósito de la sesión: Resolveremos problemas de fracciones como partes de un todo con cantidades continuas y discretas.**
- Establecemos con los niños y niñas los acuerdos de convivencia, incidiendo en el trabajo solidario, así como en la compartición de materiales y que todos escuchemos con atención las indicaciones y opiniones de los demás.
- Los organizamos en 4 equipos mediante láminas de objetos o seres divisibles o contables.

DESARROLLO

- Planteamos dos problemas, para que sean resueltos por cada dos grupos:

Sofía ha recogido 12 naranjas en una canasta y ha separado 1/3 de esas naranjas para regalarlas a su primo Nicolás. ¿Cómo encontraremos 1/3 de 12?



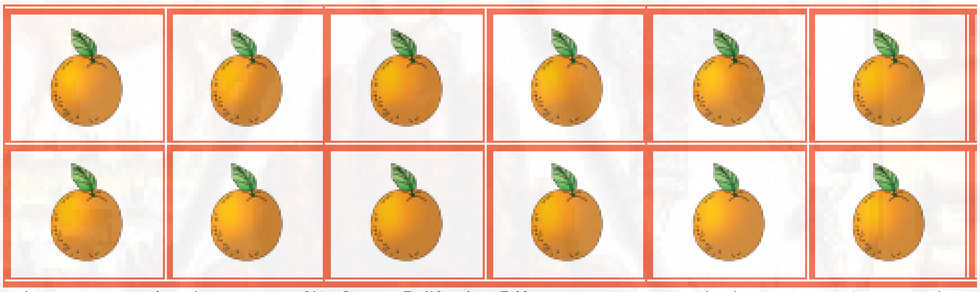
Julio es carpintero y trabaja haciendo marcos de cuadros, por eso, necesita cortar varillas de madera en trozos más pequeños. Él ha cortado una varilla de 1 m de largo en trozos de 20 centímetros. Cada cuadro requiere de cuatro trozos. ¿Cuántos trozos obtuvo Julio después de cortar toda la varilla?, ¿cuánta proporción de la varilla utiliza para hacer un cuadro?

- Pedimos a los estudiantes de cada equipo que pongan atención en el texto e imágenes. Indicamos que lean en silencio e individualmente, y luego, que un integrante del equipo lea para todos.

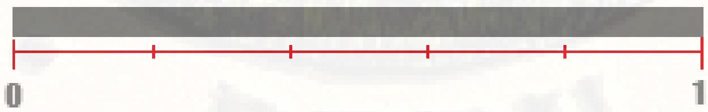
  Aseguramos la **familiarización con el problema.**
- Planteamos la siguientes preguntamos para el primer problema: ¿de qué trata el problema?, ¿cuál es la situación que se presenta?, ¿qué debemos averiguar?, ¿qué datos nos pueden ayudar a resolver el problema?, ¿qué material nos puede ayudar a resolverlo?, ¿cómo lo representaríamos para resolverlo?, ¿cuál sería la unidad o el total?, ¿cómo y cuáles serán sus partes?
- Para el segundo problema: ¿de quién trata el problema?, ¿qué hacía?, ¿qué nos pide averiguar?, ¿cuál es la unidad?, ¿en cuántas partes se dividirá?, ¿qué podemos

utilizar para representar el problema y resolverlo?, ¿cómo podemos representar la varilla?

- Les pedimos que resuelvan el problema utilizando diversos materiales que mejor representen la situación planteada.
- Les entregamos papelotes, hojas de colores, tijeras, chapas, palitos, botones, regletas de colores, Base diez, para que elijan lo necesario para resolver el problema.
- Cada equipo **planteará y ejecutará sus estrategias**, para ello, les orientamos con preguntas: ¿cuál sería la unidad o el total?, ¿cuáles serán las partes?, ¿cómo hallamos las partes?, ¿cómo formarías los grupos con todos los elementos de la colección?, ¿qué podrías tener en cuenta?, ¿cómo lo enunciaríamos?, ¿cómo lo representarías?, ¿cómo se escribiría?
- Brindamos retroalimentación para que los estudiantes logren resolver los problemas utilizando diversas representaciones y diversos materiales.
- Un representante del equipo realiza la **socialización de sus representaciones**. Los compañeros complementan lo expresado. Preguntamos: ¿qué tipo de representación han utilizado?, ¿cuál es una representación concreta, gráfica, pictórica, simbólica?, ¿cuál es la unidad?, ¿cuáles son las fracciones?, ¿qué fracciones han representado?
- **Reflexionamos y formalizamos.**
- Para el caso del problema de las naranjas, planteamos las siguientes interrogantes para el grupo total: ¿Cómo representaron 1/3?, ¿1/3 de cuánto? Escribimos en la pizarra: entonces 4 es 1/3 de 12.



- Luego replanteamos: Si 4 es 1/3 de 12 naranjas ¿cuántas naranjas serán "dos tercios de 12 naranjas" ? ¿y cuánto será los tres tercios de 12 naranjas?
- Para el caso del carpintero, planteamos las siguientes preguntas: ¿en cuántas partes dividieron la varilla?, ¿cuánto representaba cada trozo?, ¿cuántos trozos utilizaron para un cuadro?, ¿cuánto representan los trozos utilizados para hacer el cuadro? Escribimos en la pizarra: un parte representa 1/5 del total. 4 partes representan 4/5



- Luego planteamos: Si un cuadro requiere de 4/5 de madera, cuánto le sobra de una varilla. Y si quisiera hacer otro cuadro, ¿cuánto le faltaría?

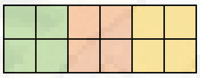
Concluimos:

a. Para concluir completamos los siguientes enunciados:

Con cantidades continuas, una unidad dividida en 5 partes, una de ellas representa, $\frac{\square}{\square}$ *de la unidad.*

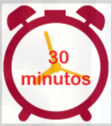
Con cantidades discretas, cada parte está formado por elementos que se cuentan. En una colección dividida en 3 partes, cada uno representa $\frac{\square}{\square}$ *de la unidad.*

b. Sin embargo, una fracción siempre tiene dos términos llamados *numerador* y *denominador*.



$\underline{1}$ Numerador (indica la parte que se toma)
3 Denominador (indica el número de partes en que se divide el total)

> Es importante recordar que una fracción representa una o varias partes de una unidad dividida en partes congruentes (todo continuo) o un grupo de una colección dividida en agrupaciones con la misma cantidad de elementos (todo discreto).



CIERRE

- **Planteamos otros problemas:**
  Dos cuartos del total de miembros de una familia son 6 personas. ¿Cuántos son los miembros de la familia?
  Una madre necesita distribuir 18 tunas entre sus 5 hijos y ella. ¿Cuántas tunas le tocará a cada uno?, ¿cuánto representa del total?
- Apoyamos a los estudiantes a resolver el problema utilizando diferentes formas de representación, resaltando la diferencia en la representación de fracciones cuando se trata de cantidades continuas y discretas.
- Reflexionamos con los estudiantes acerca de lo que aprendieron: ¿cómo se sintieron?, ¿tuvieron alguna dificultad?, ¿será importante o útil lo que aprendieron?, ¿por qué?
- También preguntamos si todos pusieron en práctica las normas de convivencia que se establecieron al inicio de la clase: ¿cómo esto les ayudó a trabajar en equipo?
- Los felicitamos por su participación y les brindamos palabras de afecto y agradecimiento.

LISTA DE COTEJO

Nombres y apellidos	Expresa con diversas representaciones y lenguaje numérico (números, signos y expresiones verbales) su comprensión de: La fracción como parte-todo (**cantidad** discreta o continua), así como equivalencias y operaciones de adición y sustracción entre fracciones usuales usando fracciones equivalentes.		
	Expresa, de forma oral o escrita, el uso de las fracciones usuales en diversos contextos de la vida diaria (platos, cuadernos, etc.)	Elabora representaciones concretas, pictóricas, gráficas y simbólicas de las fracciones como parte de un todo.	Elabora representaciones concretas, pictóricas, gráficas y simbólicas de las fracciones como parte de un todo.
Maricielo Nelly			
Yeser			
Chen Tonia			
Jhoel Stiven			
Gerzim Snaider			
Emmily Alondra			
Kenyi Abdiel			
Samir Adair			
Elmer			
Yesser			
Genesy			
Maribel			
Felix Dante			
Paul Anderson			
Jose Gabriel			
Oscar Diego			
Ayelen Keyla			
Cielo Lizeth			
Yozermil Favio			
Briams Esmid			
Stefano Yamil			
David			

✓ Logrado ✗ No logrado

		UNIDAD GESTION EDUCATIVA LOCAL I.E.I. N° 36005 - ASCENSION DIRECCION HUANCAVELICA Prof. Marisol Martinez Curipaco C.M. 1023269355 DIRECTORA (A)
Profesor de aula	Investigador	Directora

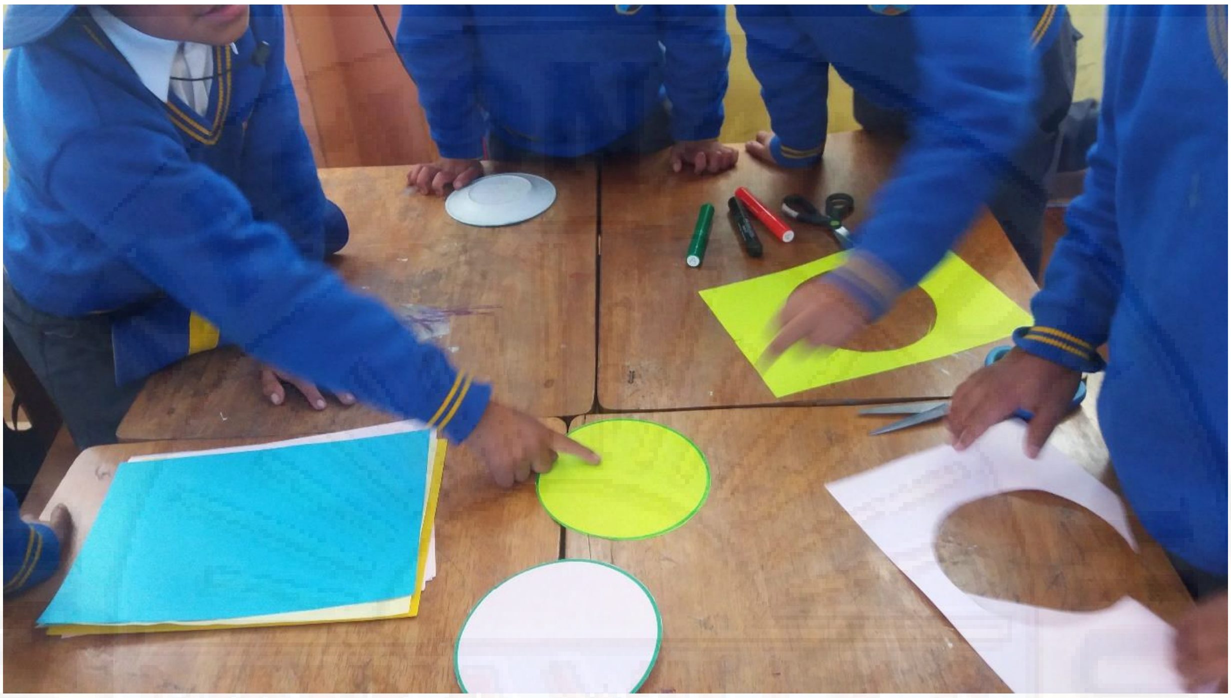
* *Elaboración: Prof. Miguel A. CALDERON CASTAÑEDA*

ANEXO 10

REGISTRO FOTOGRÁFICO

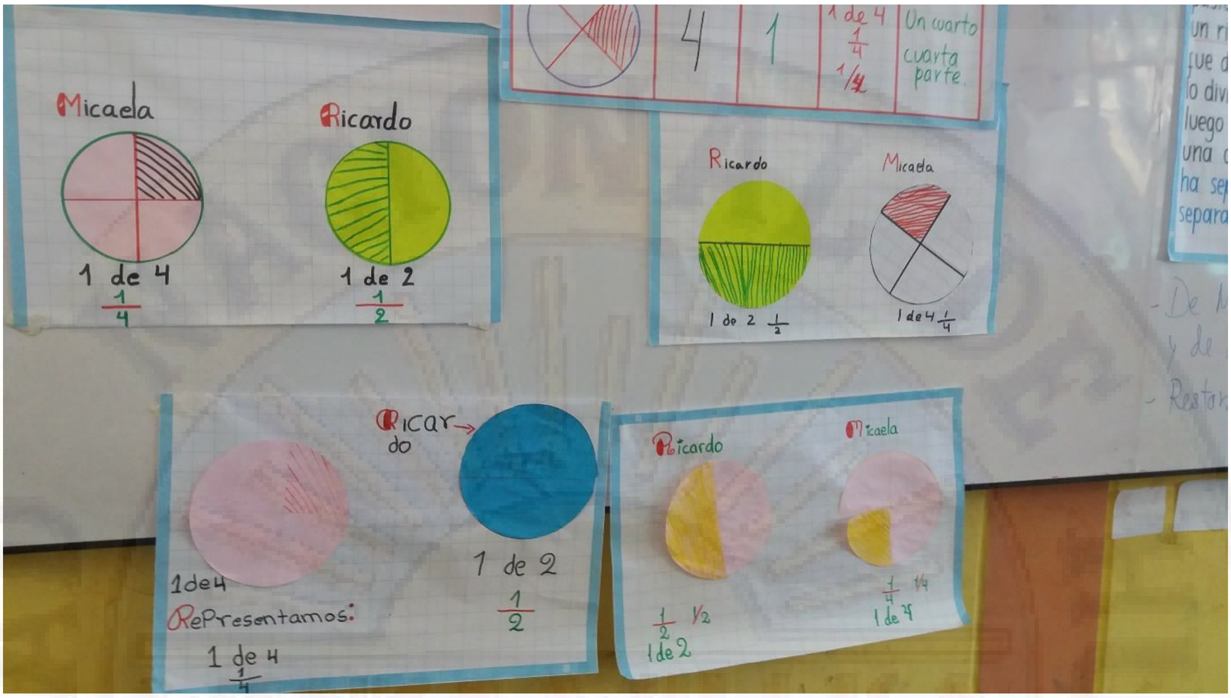
Estudiantes del cuarto grado de la I.E. N° 36005 “JVV” de Ascensión desarrollando la prueba escrita (instrumento de investigación)

Investigador brindando algunas indicaciones sobre el desarrollo de la prueba escrita a los estudiantes del cuarto grado “A” de la I.E. N° 36005 “JVV” de Ascensión



Estudiantes organizados por equipo elaborando una representación circular de una fracción, además compartiendo verbalmente en su lenguaje natural.

Estudiantes utilizando la representación circular de una fracción, para resolver el problema planteado, utilizando representación escrita.



Productos de la resolución del problema planteado por los 4 equipos de trabajo, utilizando representación gráfica, representación escrita y representación simbólica.

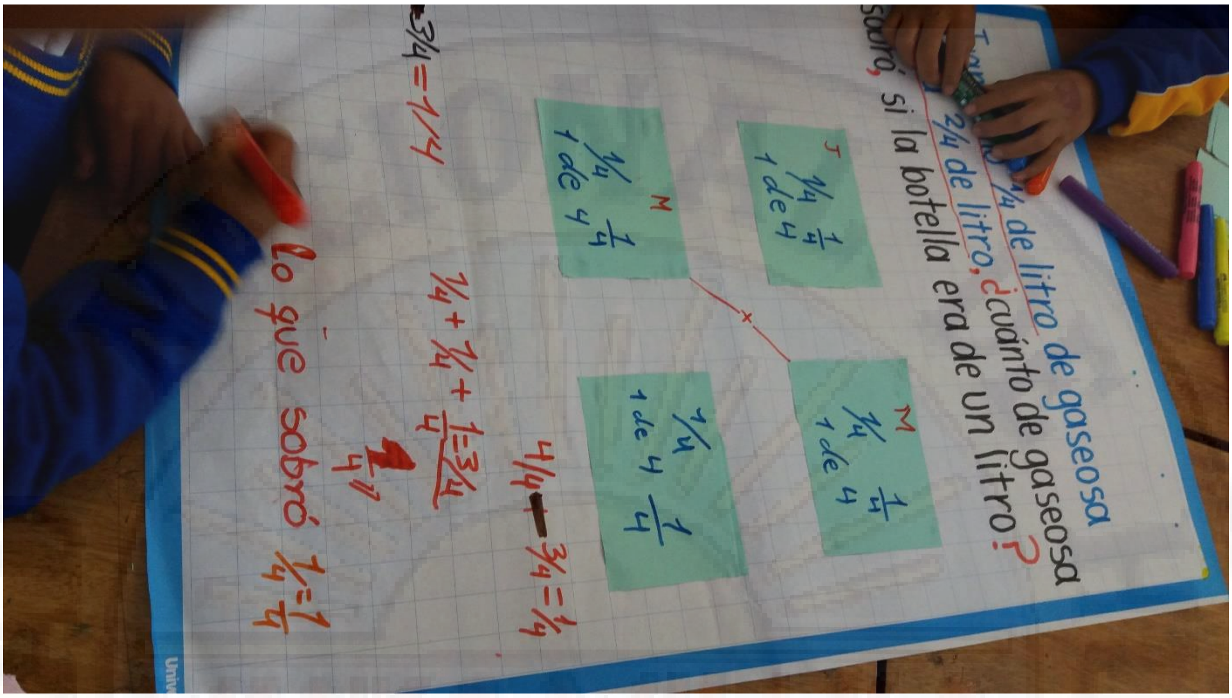
En esta ocasión los estudiantes elaboran de manera vivencial sus representaciones de fracciones en un modelo cuadrangular y dividido en triángulos, identificando porciones de una fracción.

Investigador brindando retroalimentación de manera oportuna para que los estudiantes elaboren su representación de una fracción.

Estudiantes elaborando representaciones escritas y simbólicas de una fracción, luego de haberlo representado vivencialmente.

Equipo de estudiantes resolviendo el problema. Expresando de forma escrita y simbólica las fracciones identificadas en el problema.

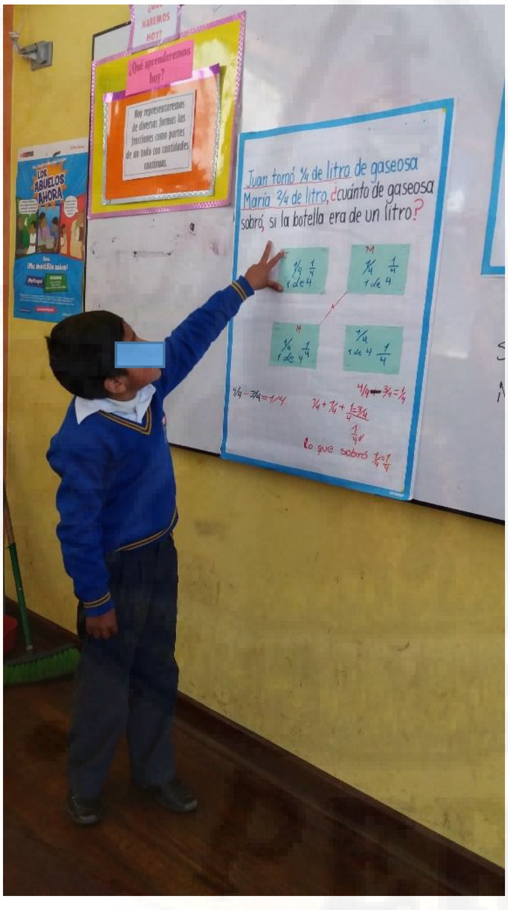
Productos de los estudiantes, en las que se visualiza las diferentes formas de representación que asumieron los equipos.



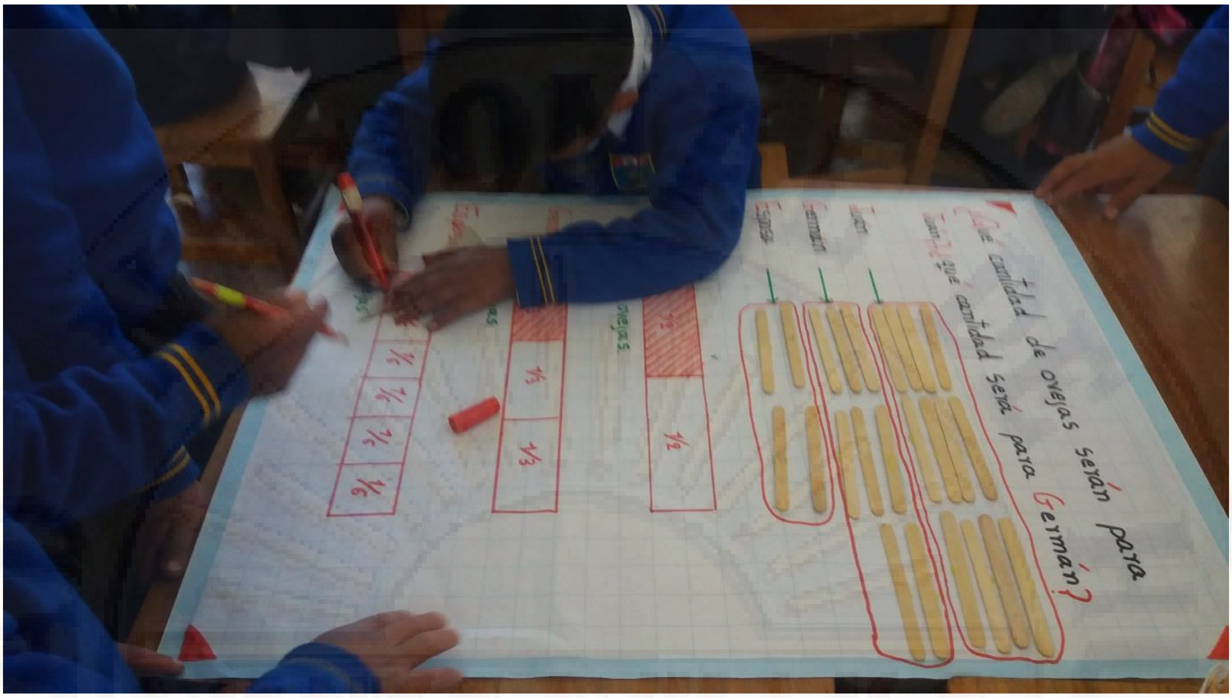
Los estudiantes resolviendo el problema, utilizando diversas formas de representación matemática.

Los estudiantes resolviendo el problema, utilizando diversas formas de representación matemática y realizando operaciones con fracciones.

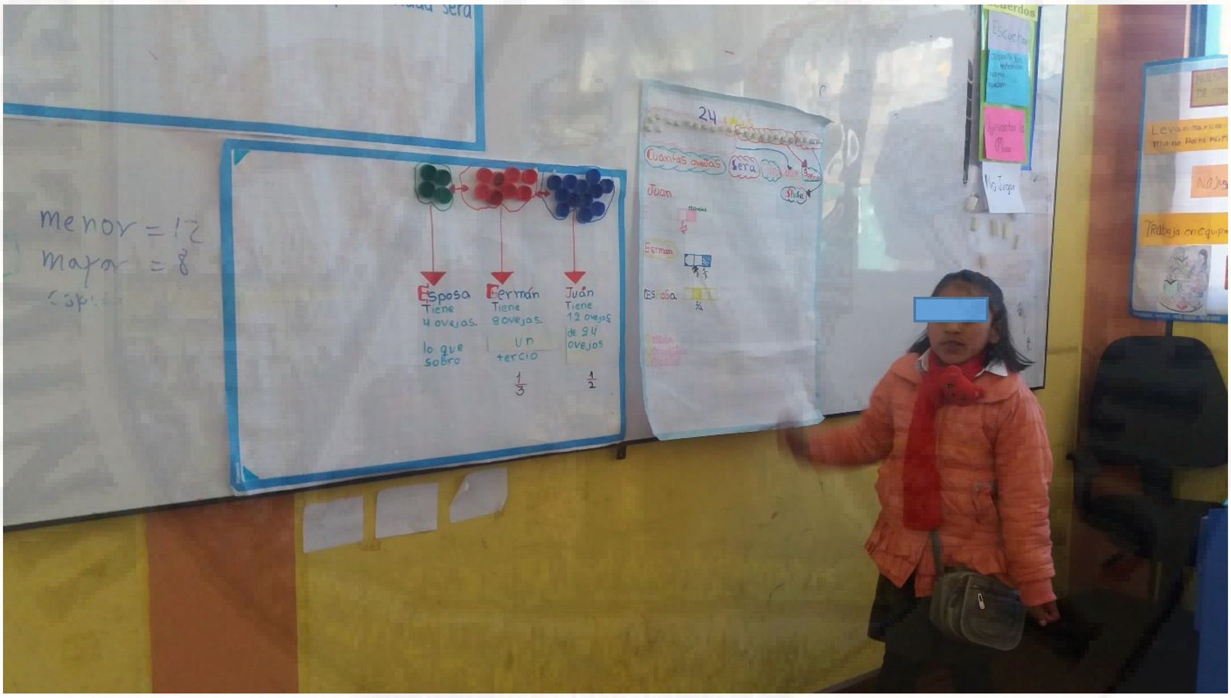
Investigador ayudando a sacar conclusiones sobre las diversas formas de representación matemática a partir de los trabajos de los estudiantes.



Estudiante explicando el proceso de resolución del problema y las representaciones utilizadas.



Estudiantes utilizando diferentes representaciones matemáticas para resolver el problema. El uso de materiales concretos ayuda en la comprensión del problema.



Estudiante socializando el proceso seguido para resolver el problema, así como el uso de las formas de representación que utilizaron.

Niña explicando la representación que formó con la colección de flores que recortó. La niña hizo una formación de 6 sub grupos.

Estudiantes socializando las diferentes representaciones que realizaron con la colección de flores que se les entregó.

Estudiantes representando fracciones con cantidades discretas utilizando material concreto.

Estudiantes socializando sus trabajos, utilizando las diferentes formas de representación matemática para resolver los problemas con cantidades discretas.