IX CONGRESO INTERNACIONAL SOBRE ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

LIBRO DE ACTAS CIEM 2018

Editores:

Cecilia Gaita
Jesús Flores
Francisco Ugarte
Cerapio Quintanilla

Del 19 al 21 de julio de 2018

Huancavelica, Perú
Facultad de Educación
Universidad Nacional de Huancavelica



INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN SOBRE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS



PUCP

IX CONGRESO INTERNACIONAL SOBRE ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

LIBRO DE ACTAS CIEM 2018

Julio 2018

Editores: Cecilia Gaita, Jesús Flores, Francisco Ugarte, Cerapio Quintanilla

Derechos reservados © 2018

Editado por:

© Universidad Nacional de Huancavelica
Jr. Victoria Garma 275, Huancavelica
E-mail: anquseqo@hotmail.com

© Pontificia Universidad Católica del Perú
Departamento de Ciencias, 2018
Av. Universitaria 1801, Lima
32626 2000 – anexo 4151
E-mail: irem@pucp.edu.pe

Libro digital disponible en:
(http://repositorio.unh.edu.pe/handle/UNH/1192)
(http://repositorio.pucp.edu.pe/handle/123456789/124151)

ISBN: 978-612-4161-22-3

Derechos reservados, prohibida la reproducción de este libro por cualquier medio, total o parcialmente, sin permiso expreso de los editores. El contenido de los artículos publicados en este libro es responsabilidad exclusiva de sus autores.

Diseño de carátula: Carmen Javier

Comité científico

Cerapio Quintanilla (Presidente). Universidad Nacional de Huancavelica, Perú.

Jesús Flores Salazar. Pontificia Universidad Católica del Perú; IREM-PUCP, Perú

Elizabeth Advíncula Clemente. Pontificia Universidad Católica del Perú; IREM-PUCP, Perú.

Ana Lourdes Acuña Zuñiga. Fundación Omar Dengo, Costa Rica.

Fernado Fraga Varela. Universidad Santiago de Compostela, España.

Miguel R. Wilhelmi. Universidad Pública de Navarra, España.

Enedina L. Rodríguez C. Universidad Nacional Abierta Centro Local Lara, Venezuela.

Saddo Ag Almouloud. Pontificia Universidad Católica de São Paulo, Brasil.

Maria José Ferreira da Silva. Pontificia Universidad Católica de São Paulo, Brasil.

Cileda De Queiroz e Silva Coutinho. Pontificia Universidad Católica de São Paulo, Brasil.

Comité organizador

Cerapio Quintanilla (Universidad Nacional de Huancavelica, Perú - Presidente del Comité Organizador)

Ubaldo Callahua (Universidad Nacional de Huancavelica, Perú)

Rodrigo Quilca Castro (Universidad Nacional de Huancavelica, Perú)

Daker Riveros Anccasi (Universidad Nacional de Huancavelica, Perú)

Humberto G. Garayar Tasayco (Universidad Nacional de Huancavelica, Perú)

Félix Canales Conce (Universidad Nacional de Huancavelica, Perú)

Francisco Ugarte Guerra (Pontificia Universidad Católica del Perú; IREM-PUCP, Perú)

Cecilia Gaita Iparraguirre (Pontificia Universidad Católica del Perú; IREM-PUCP, Perú)

Carlos López Rengifo (Universidad Nacional del Centro, Perú)

Arnulfo Ortega Mallqui (Universidad Nacional Ermilio Valdizán, Perú)

José Juarez Pulache (Universidad Nacional San Cristóbal de Huamanga)

Guillermo Gamarra Astuhuamán (Universidad Nacional Daniel Alcides Carrión)

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE GENERAL

I. PRESENTACIÓN XX

1. EJE TEMÁTICO: RESOLUCIÓN Y CREACIÓN DE PROBLEMAS 3

1.1. CONFERENCIA 3

1.1.1. La invención de juegos, en el marco de la creación de problemas de matemáticas (Conferencia plenaria inaugural) *3*

1.2. REPORTES DE INVESTIGACIÓN 10

1.2.1. Las habilidades cognitivas en la resolución de problemas matemáticos *10*

1.2.2. Actividades sobre gráficos estadísticos propuestas en libros de texto de Educación Primaria *19*

1.2.3. Resolución de problemas y desarrollo de competencias en estudiantes de educación secundaria *31*

1.2.4. Um modelo de atividade com radicais: possibilidade de explorar o raciocínio abdutivo e a criatividade nas aulas de matemática *39*

1.2.5. Modelo metodológico y didáctico para el desarrollo del razonamiento matemático .. *52*

1.3. SOCIALIZACIÓN DE EXPERIENCIAS 62

1.3.1. Proyecto IMAGINARY- Divulgación Matemática Libre *62*

1.3.2. Enfoque centrado en la resolución de problemas: una experiencia con la hoja de papel A4 ..... *67*

1.3.3. Libre Matemáticas con un enfoque químico biológico *77*

1.3.4. Guerra de los números enteros *86*

1.3.5. Máximos y mínimos con una restricción. Método multiplicadores de Lagrange *90*

1.3.6. El trabajo escolar de tipos de sucesos aleatorios a través de la vida cotidiana de los estudiantes *98*

1.4. TALLERES 105

1.4.1. Gestión de datos: estudio y resolución de problemas de control de calidad y eficiencia de procesos mediado por software minitab *105*

1.4.2. Argumentación en la resolución de problemas de geometría *121*

1.4.3. La formulación y resolución de problemas: herramientas utilizadas en el aula para el desarrollo *127*

1.4.4. El uso del ciclo PPDAC para la creación de problemas en la gestión de datos *133*

2. EJE TEMÁTICO: INFLUENCIA DE LA TECNOLOGÍA EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA. VISUALIZACIÓN EN LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS 143

2.1. CONFERENCIA 143

2.1.1. Una Mirada al Acto Pedagógico en Enseñanza de la Matemática en una Universidad Abierta-Venezuela (Conferencia penaria) *143*

2.2. REPORTES DE INVESTIGACIÓN 154

2.2.1. Sistema de ecuaciones lineales: resolución de problemas con el uso del software Geogebra *154*

2.2.2. Límites indeterminados: una experiencia mediada por tecnología digital con estudiantes universitarios *161*

2.3. SOCIALIZACIÓN DE EXPERIENCIAS 169

2.3.1. Diseño de medios didácticos para el aprendizaje activo en matemáticas *169*

2.3.2. Curso en línea como recurso didáctico en clases de matemáticas *178*

2.3.3. Uso de recursos interactivos para el desarrollo de habilidades de pensamiento en la modalidad virtual *187*

2.3.4. Estrategias didácticas con Cuadernia para elevar el rendimiento escolar en el área de matemática del primer grado de secundaria de una institución educativa pública en Lambayeque, Perú *198*

2.3.5. TIC en la educación universitaria: experiencias en la enseñanza de las matemáticas en la PUCP *209*

2.3.6. Modelación matemática del crecimiento de la sombra usando Excel *220*

2.3.7. Uso de mapas conceptuales y mapas mentales como una estrategia de aprendizaje para la enseñanza de la matemática *232*

2.3.8. Levantamiento bibliográfico: prueba y demostraciones en geometría espacial *244*

2.3.9. Uso del Moodle en el aprendizaje del cálculo en la Facultad de Educación *252*

2.3.10…Una experiencia de aprendizaje cooperativo con el uso de dispositivos móviles en la asignatura de Cálculo I para estudiantes de ingeniería *259*

2.3.11.…Construcción del concepto de estimación de parámetros a través de simulación con software R *265*

2.3.12.....Aplicación del software geogebra para el aprendizaje de la función cuadrática *277*

2.3.13.....Propuesta de una metodologia de adaptación de contenidos para e-learning de las matematicas en educación superior *285*

2.4. TALLERES 297

2.4.1. Análisis de dominio y rango de funciones con Geogebra *297*

2.4.2. La inversa de una función de variable real en un entorno de geometría dinámica *307*

2.4.3. Modelos de población en ecuaciones diferenciales *318*

2.4.4. El uso de Forms como instrumento de evaluación *334*

2.4.5. Geogebra: Una herramienta para transitar de la exposición a la interacción *339*

2.4.6. Uso de geogebra en la enseñanza y aprendizaje de las cónicas *345*

2.4.7. Uso de herramientas en geogebra para el diseño de recursos educativos digitales *356*

2.4.8. Resolución de problemas de ecuaciones diferenciales utilizando geometría dinámica *370*

2.4.9. Uso del Geogebra para teléfonos móviles en la enseñanza de la geometría *382*

3. EJE TEMÁTICO: DESARROLLO DE LA COMPETENCIA DIDÁCTICO MATEMÁTICO EN PROFESORES DE MATEMÁTICA 396

3.1. CONFERENCIAS 396

3.1.1. El Modelo del Conocimiento y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM) del profesor (Conferencia plenaria) ... *396*

3.1.2. Saber o no saber, esa no es la cuestión (Conferencia plenaria) ... *407*

3.2. REPORTES DE INVESTIGACIÓN ... 416

3.2.1. Estilos de aprendizaje en las estrategias didácticas grupales para el aprendizaje de la geometría en las instituciones educativas de la provincia de Huancayo ... *416*

3.2.2. Propuesta de nueva metodología cualitativa para el estudio de las teorías implícitas docentes ... *427*

3.2.3. Recursos Lúdicos para comprensión de patrones matemáticos ... *438*

3.2.4. Enfoque Didáctico para la elaboración de situaciones problemáticas que abordan la construcción e interpretación de las tablas de frecuencia ... *449*

3.2.5. Niveles de algebrización que alcanzan los estudiantes de primer grado de secundaria en la resolución de una tarea estructural de números racionales ... *461*

3.3. SOCIALIZACIÓN DE EXPERIENCIAS ... 467

3.3.1. Grupos de interaprendizaje dialógico en el aprendizaje de la matemática ... *467*

3.4. TALLERES ... 477

3.4.1. ¿Cómo construir el concepto de fracción a partir de sus significados? ... *477*

3.4.2. Juegos de mesa para la enseñanza de las fracciones ... *484*

4. EJE TEMÁTICO: EPISTEMOLOGÍA Y SECUENCIAS DIDÁCTICAS ... 501

4.1. CONFERENCIAS ... 501

4.1.1. A engenharia do percurso de estudos e pesquisa (Conferencia plenaria) ... *501*

4.1.2. Sistemas de Equações Lineares: organização matemática local (conferencia especial) ... *516*

4.1.3. El algoritmo de la división en la enseñanza de la aritmética elemental (conferencia especial) ... *529*

4.1.4. Cónicas en las geometrías del taxista y euclideana (Conferencia especial) ... *544*

4.2. REPORTES DE INVESTIGACIÓN ... 554

4.2.1. Una organización y modelización matemática aplicado en el caso de las sucesiones en un texto de primaria ... *554*

4.2.2. Los sistemas de ecuaciones lineales como instrumento de modelización en la secundaria ... *562*

4.2.3. Considerações merleau-pontyanas na educação matemática: os focos de investigação evidenciados entre 2013 e 2017 ... *573*

4.2.4. Análisis de gráficas de funciones y su incidencia en la interpretación del fenómeno en estudio ... *582*

4.2.5. Análisis de una situación didáctica para la enseñanza del valor absoluto en alumnos de educación secundaria ... *600*

4.2.6. La didáctica de la matemática y el álgebra lineal ... *606*

4.2.7. Dificultades presentes en la enseñanza y aprendizaje del teorema fundamental del cálculo: un estado del arte ... *616*

4.2.8. Características del modelo epistemológico dominante de la proporcionalidad en textos de educación secundaria *627*

4.3. SOCIALIZACIÓN DE EXPERIENCIAS 638

4.3.1. Una mirada a las competencias de modelación matemática de estudiantes universitarios de carreras de letras: el caso de artes escénicas *638*

4.3.2. Enseñanza de la topología mediante material didáctico concreto *652*

4.3.3. Estrategia didáctica en la enseñanza de la matemática estudiantes de ciencias empresariales *655*

4.3.4. Propuesta de diseño sociocultural en el aprendizaje de cálculo en estudiantes de ingeniería civil de las universidades de Huancayo *679*

4.3.6. La recta y el punto – un romance matemático *704*

4.4. TALLERES 711

4.4.1. Relações entre Geometria e Álgebra com ferramentas do software Geogebra *711*

4.4.2. Aritmética y álgebra: linealidad y reduccionismo *720*

4.4.3. ¿Qué hacer con un análisis histórico epistemológico? *727*

4.4.4. ¿Qué aprenden los alumnos en los libros de texto? *731*

5. EJE TEMÁTICO: LAS TIC Y ROBÓTICA EDUCATIVA EN LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA 739

5.1. CONFERENCIAS 739

5.1.1 Robótica educativa y pensamiento computacional (Conferencia plenaria de clausura) *739*

5.1.2 Las teorías APOS y construccionismo en el análisis de la comprensión del concepto de fracción (Conferencia especial) *755*

5.2. REPORTES DE INVESTIGACIÓN 771

5.2.1. La robótica educativa en el aprendizaje de la geometría en estudiantes de educación básica regular *771*

5.3. SOCIALIZACIÓN DE EXPERIENCIAS 781

5.3.1. POVIX: Una interfaz gráfica de usuario (GUI) en MatLab para calcular el Polinomio de Villarreal *781*

FOTOGRAFÍAS DEL IX CIEM 787

INDICE DE AUTORES

1. **Dr. Uldarico Víctor Malaspina Jurado**
   Pontificia Universidad Católica del Perú-IREM, Perú

2. Isabel Inca Maldonado
   Instituto Psicopedagógico EOS, Perú

3. **Miluska Osorio,** Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas, Perú
   Danilo Díaz-Levicoy, Universidad de Granada, España
   Claudia Vásquez, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile

4. **Judith Esther Gavidia Medrano**
   Arnulfo Ortega Mallqui
   Institución Educativa Industrial Hermilio Valdizán, Huánuco, Perú

5. **Ana Karine Dias Caires Brandão**
   Saddo Ag Almouloud
   Pontifícia Universidade Catolica de São Paulo, Brasil

6. **Flaviano Armando Zenteno Ruiz**
   Armando Isaías Carhuachin Marcelo
   Tito Armando Rivera Espinoza
   Guillermo Gamarra Astuhuaman
   Universidad Nacional Daniel Alcides Carrión, Pasco, Perú

7. **Alba Málaga Flaviano**
   Inria, équipo ALMAnaCH, Paris, Francia
   IMAGINARY gGmbH Mittenwalder, Berlin, Alemania

8. **Wilfredo Hernán Bizarro Flores**
   IES. Comercial 45 "ERP" Puno – Perú

9. **Pablo Flores Jacinto**
   María Catalina Cárdenas Ascención
   Enrique García Leal
   Facultad de Estudios Superiores Zaragoza, UNAM, México

10. **Héctor Manrique Velarde**
    I.E. José María Arguedas Lircay – Angaraes, Huancavelica, Perú

11. **Nélida Salomé Medina García**
    Pontificia Universidad Católica del Perú-IREM, Perú

12. **Angélica Giovanna Ramos Rosas**
    Augusta Osorio Gonzales
    Pontificia Universidad Católica del Perú, IREM, Perú

13. **Jesús Vilchez Guizado**
Julia Ángela Ramón O.
Universidad Nacional Hermilio Valdizán, Huánuco, Perú

14. **Ángel Homero Flores S,** Colegio de Ciencias y Humanidades-UNAM, México
Isabel Torres Céspedes, Universidad de Lima, Perú

15. **Percy Merino Rosario**
Olimpia Castro Mora
Tulio Ozejo Valencia
María Elena Marcos Nicho
Oficina de Medición de la Calidad de los Aprendizajes – MINEDU, Perú

16. **Augusta Osorio Gonzales**
Elizabeth Advíncula Clemente
Pontificia Universidad Católica del Perú, IREM, Perú

17. **Dra. Enedina Lady Rodríguez Cortez**
Universidad Nacional Abierta Centro Local Lara, Venezuela

18. **Rocío Figueroa Vera**
Flor Carrillo Lara Isabel Inca Maldonado
Pontificia Universidad Católica del Perú, IREM, Perú

19. **Cristian Julian Trujillo,** Universidad San Ignacio de Loyola, Lima, Perú
Flor Carrillo Lara, Universidad Nacional del Callao, Callao, Perú

20. **Camilo Andrés Ramírez Sánchez**
Institución Universitaria Politécnico Grancolombiano, Colombia

21. **Rafael Aguilar González**
Selina Rebeca del Carmen Ponce Castañeda
Universidad Politécnica de San Luis Potosí, México

22. **Camilo Andrés Ramírez Sánchez**
Sandra Milena Rojas Tolosa
Institución Universitaria Politécnico Grancolombiano, Colombia

23. **Rosa Yessenia Mimbela Sánchez**
Universidad Nacional de Tumbes, Tumbes, Perú

24. **Roy Will Sánchez Gutiérrez**
Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú

25. **Franklin Taipe Florez**, UGEL Canas, Cusco, Perú
Zoraida Taipe Florez, IE. Víctor Raúl Haya de la Torre, Cusco, Perú

26. **Daysi Julissa García-Cuéllar,** Pontificia Universidade Catolica de São Paulo, Brasil
Mihály Martínez-Miraval, Pontificia Universidad Católica del Perú-IREM, Perú

27. **Maritza Luna Valenzuela**
Saddo Ag Almouloud
Pontifícia Universidade Catolica de São Paulo, Brasil

28. **Marta Celinda Ríos Zea**
Universidad Nacional del Centro del Perú, Huancayo, Perú

29. **Marco Antonio Tamariz Milla**
Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas, Lima, Perú

30. **Félix Amadeo Canales Conce**
Ubaldo Cayllahua Yarasca
Universidad Nacional de Huancavelica, Huancavelica, Perú

31. **Franklin Surichaqui Gutiérrez**
Mercedes Surichaqui Gutiérrez
Universidad Nacional de Huancavelica, Huancavelica, Perú

32. **Walter Rubén Bernuy Blanco**
Universidad Nacional Agraria de la Selva, Tingo María, Perú

33. **Elizabeth Advíncula C.**
Elton Barrantes R.
María Iris Flores Q.
Nancy Saravia Molina
Marco Solórzano M.
Pontificia Universidad Católica del Perú-IREM, Perú

34. **Maritza Luna V.**
Elton John Barrantes R.
Edwin Villogas H.
Grupo de Investigación TecVEM-IREM PUCP, Perú

35. **Liliana Puchuri Medina**
Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú

36. **Juan Raúl Egoavil Vera**
Colegio María Alvarado, Perú

37. **Myrian Ricaldi Echevarria,** Colegio Peruano Británico, Lima, Perú
Isabel Torres Céspedes, Universidad de Lima, Perú

38. **Emilio Máximo Vera Namay**
Carlos Manuel Sabino Escobar
Universidad Nacional de Tumbes; IREM-UNTUMBES, Perú

39. **Diana Marcela Duarte Rojas**
Jessica Alejandra Guevara Estupiñan
William Alfredo Jiménez Gómez
Universidad Pedagógica Nacional, Colombia

40. **Maritza Luna Valenzuela**
Elton Jhon Barrantes Requejo
Edwin Villogas Hinostroza
Grupo de Investigación TecVEM-IREM PUCP, Perú

41. **Daysi García-Cuéllar,** Pontificia Universidad Católica de São Paulo, Brasil
Mihály Martínez Miraval, Pontificia Universidad Católica del Perú-IREM, Perú
Horacio Saúl Sostenes-González, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, México
Mónica Parra-Zapata, Universidad de Antioquia, Colombia

42. **Dr. Luis Pino-Fan**
Universidad de los Lagos, Chile

43. **Dr. Miguel R. Wilhelmi**
Universidad Pública de Navarra, España

44. **Rafael Marcelino Cantorin Curty**
Universidad Nacional del Centro, Huancayo, Perú

45. **Rodri Demus De La Cruz Rodríguez**
Ricardo Francisco Luengo González
Luis Manuel Casas García
Universidad de Extremadura, España

46. **Luz Marlene Mendoza Torren**
I.E. Simón Bolívar, Cusco, Perú
Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco, Cusco, Perú

47. **Augusta Osorio Gonzales**
Carina Juana Saire Huamani
Maestría en Enseñanza de las Matemáticas, Pontificia Universidad Católica del Perú-IREM, Perú

48. **Johana García**
Flor Carrillo
Maestría en Enseñanza de las Matemáticas, Pontificia Universidad Católica del Perú-IREM, Perú

49. **Raúl Sobrevilla Villa Johana García**
Unidad de Gestión Educativa Huaytará, Huancavelica, Per**ú**

50. **Olimpia Castro Mora**
Percy Merino Rosario
Rosa Lafosse Quintana
Felipe Asmad Falcón
Oficina de Medición de la Calidad de los Aprendizajes – MINEDU, Perú

51. **Luz Marlene Mendoza Torren**
I.E. Simón Bolívar
Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco, Perú

52. **Dr. Saddo Ag Almouloud.**
Pontificia Universidad Católica de São Paulo, Brasil

53. **Dra. Maria José Ferreira da Silva**
Pontificia Universidad Católica de São Paulo, Brasil

54. **Mg. Teodulo Isaias Verástegui Chuquillanqui**
Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú

55. **Mg. Nélida Salomé Medina García de Correa**
Pontificia Universidad Católica del Perú-IREM, Perú

56. **Elvis Bustamante Ramos**
Francisco Javier Ugarte Guerra
Pontificia Universidad Católica del Perú-IREM, Perú

57. **Magaly Ethel Campos Motta**
Rosa Cecilia Gaita Iparraguirre
Pontificia Universidad Católica del Perú-IREM, Perú

58. **Elton de Andrade Viana**
Ana Lucia Manrique
Pontificia Universidad Católica de São Paulo, Brasil

59. **Leonardo Damián Sandoval,** Universidad Nacional de Jaén, Jaén, Perú
Lenin Quiñones Huatangari, Universidad Nacional Toribio Rodríguez de Mendoza de Amazonas, Amazonas, Perú
Juan C. Damián Sandoval, Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo, Lambayeque, Perú.

60. **Sahara Doria Rodríguez**
Francisco Javier Ugarte Guerra
Pontificia Universidad Católica del Perú-IREM, Perú

61. **María Angelita Aredo Alvarado,** Universidad Nacional de Piura, Piura, Perú
Francisco Javier Ugarte Guerra, Pontificia Universidad Católica del Perú-IREM, Perú

62. **Brian Valenzuela Pagaza**
Katia Vigo Ingar
Maestría en Enseñanza de las Matemáticas, Pontificia Universidad Católica del Perú-IREM, Perú

63. **Luigi Najarro Alcócer**
Cintya Gonzales Hernández
Maestría en Enseñanza de las Matemáticas, Pontificia Universidad Católica del Perú-IREM, Perú

64. **Rosa Eulalia Cardoso Paredes,** Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú
Norma Rubio Goycochea, Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú
Maritza Luna Valenzuela, Pontificia Universidad Católica de São Paulo, Brasil
Ana Sofía Aparicio Pereda, Universidad São Paulo, Brasil

65. **Leonardo Wilson Cano Llacua**
Universidad Nacional del Centro del Perú, Perú

66. **Williams Coronado Farroñan**
Universidad César Vallejo –Filial Piura, Perú

67. **Nobel Remberto Leyva Gonzales**
Universidad Nacional del Centro del Perú, Perú

68. **Ubaldo Cayllahua Yarasca**
Félix Amadeo Canales Conce
Universidad Nacional de Huancavelica, Huancavelica, Perú

69. **Nilton César Rodríguez Ramírez**
Institución Educativa Privada Alfred Nobel, Ate, Lima, Perú

70. **María José Ferreira da Silva**
Saddo Ag Almouloud
Pontifícia Universidade Catolica de São Paulo, Brasil

71. **Miguel R. Wilhelmi**
Jaione Abaurrrea
Aitzol Lasa
Universidad Pública de Navarra, España

72. **Enedina L. Rodríguez Cortez**
Universidad Nacional Abierta. Centro local Lara, Venezuela

73. **Enedina L. Rodríguez Cortez**
Universidad Nacional Abierta. Centro local Lara, Venezuela

74. **Dra. Ana Lourdes Acuña Zúñiga**
Fundación Omar Dengo, Costa Rica

75. **Dr. Cerapio Quintanilla,** Universidad Nacional de Huancavelica, Perú
Adriana Dora Gewerc Barujel y Fernado Varela, Universidad Santiago de Compostela, España

76. **Guillermo David Morales Valencia**
Universidad Nacional de Huancavelica, Huancavelica, Perú

77. **Lenin Quiñones Huatangari,** Universidad Nacional Toribio Rodríguez de Mendoza de Amazonas, Perú 1
Manuel Emilio Milla Pino, Venenzuela

Presentación

PRESENTACIÓN

Gracias un trabajo conjunto de la Universidad Nacional de Huancavelica y del Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas (IREM-PUCP), con la colaboración de la Maestría en la Enseñanza de las Matemáticas y la iniciativa Matemáticas: de la PUCP al Perú (VI edición) se llevó a cabo el IX Congreso Internacional sobre Enseñanza de lasMatemáticas (IX CIEM) en la ciudad de Huancavelica del 19 al 21 de julio del 2018.

Como resultado de dicha actividad, alrededor de 400 investigadores, profesores y estudiantes de diversos países (Brasil, Colombia, Costa Rica, Chile, España, México, Francia, Perúy Venezuela), y de distintas localidades del Perú (Pasco, Huánuco, Puno, Huancavelica, Lima, Callao, Tumbres, Cusco, Piura, Huancayo, Jaén, Amazonas, Lambayeque), todos ellos interesados en el desarrollo e investigaciones actuales de la Didáctica de las Matemáticas, presentaron resultados de sus trabajos de investigación e innovación en Educación Matemática en los diversos niveles educativos .

Este libro reúne los extensos de las diversas ponencias realizadas: conferencias, reportes de investigación, socializacion de experiencias y talleres. Estas han sido organizadas según cinco ejes temáticos:

- Resolución y creación de problemas. Su relación con el desarrollo del pensamiento matemático y estadístico en la enseñanza y aprendizaje.
- Influencia de la tecnología en la Educación Matemática. Visualización en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
- Desarrollo de la competencia didáctico matemático en profesores de matemática.
- Epistemología y secuencias didácticas.
- TIC y Robótica educativa en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Todas estas propuestas tienen la finalidad de contribuir al fortalecimiento y crecimiento de una comunidad de profesores, comprometidos con una formación matemática de excelencia para sus estudiantes.

Cabe señalar que el éxito de esta actividad no habría sido posible sin el liderazgo y compromiso asumido por el presidente del comité organizador del IX CIEM, Dr. Cerapio Quintanilla Cóndor, Vicerrector Académico de la Universidad Nacional de Huancavelica, con quien venimos trabajando, en el marco de la iniciativa Matemáticas: de la PUCP al Perú, desde el año 2012.

Mi agradecimiento a todas aquellas personas e instituciones que hacen posible que los CIEM sigan creciendo y con él nuestra esperanza por un futuro mejor para la educación matemática de nuestras naciones.

Francisco Ugarte Guerra
Director del IREM-PUCP

Eje temático 1

Resolución y creación de problemas. Su relación con el desarrollo del pensamiento matemático y estadístico en la enseñanza y aprendizaje.

1. EJE TEMÁTICO: RESOLUCIÓN Y CREACIÓN DE PROBLEMAS

1.1. Conferencia

1.1.1. La invención de juegos, en el marco de la creación de problemas de matemáticas (Conferencia plenaria inaugural)

Dr. Uldarico Víctor Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú-IREM, Perú

Resumen

Se destaca la importancia de las emociones positivas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y el juego como generador de estas emociones. En este contexto y en el marco de la creación de problemas, se presenta la invención de juegos que estimulen el pensamiento matemático. Las experiencias lúdicas desarrolladas con niños y en talleres con profesores en formación y en ejercicio, nos llevan a concluir que la invención de juegos, al igual que la creación de problemas, debe ser considerada en la educación matemática como un medio y un fin. Como medio, más orientado a los niños, por estimular la creatividad, la intuición, el pensamiento matemático y el autoaprendizaje; por favorecer el estímulo de emociones positivas en el aprendizaje; y por generar actitudes también positivas hacia la matemática. Como un fin, más orientado hacia los profesores, porque es fundamental que ellos desarrollen habilidades de creación de problemas y de juegos para que en sus clases usen con eficiencia estos recursos con sus estudiantes.

Emociones, enseñanza y aprendizaje.

Investigaciones significativas sustentan la importancia que debe prestarse a las emociones en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Una muestra de ellas es la atención que se le está brindando en eventos de reconocido prestigio en la educación matemática como son los CERME y las PME. Ciertamente, la influencia de las emociones en la

enseñanza y aprendizaje, no es exclusividad para las matemáticas; así, la UNESCO presentó en el 2014 la publicación hecha con la Academia Internacional de Educación, titulada Emotions and Learning (Pekrun, 2014), en la que tratan temas como las emociones positivas y las emociones negativas en el aprendizaje; las emociones, la confianza en sí mismo y el valor de las tareas académicas. En palabras del propio autor:

> Sugiero pautas sobre cómo los maestros pueden comprender las emociones de los estudiantes y lo que pueden hacer para ayudar a los estudiantes a desarrollar emociones que promuevan el aprendizaje y el desarrollo, y prevenir las emociones que son dañinas. (p. 6)

En el campo específico de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en relación con las emociones, hay numerosas investigaciones. Destaco algunos aportes: Radford (2015) aboga por una concepción cultural e histórica de las emociones y destaca el importante papel que juegan en el pensamiento en general y en particular en el pensamiento matemático. Hace un análisis de las emociones de niños de 9 a 10 años trabajando problemas de generalización de sucesiones de números, y recoge elementos para ilustrar sus puntos de vista, en el marco de su teoría de la objetivación. Schukajlow, Rakoczy y Pekrun (2017) presentan una visión general de importantes enfoques teóricos e investigaciones en torno a las emociones y motivaciones de los estudiantes en matemáticas. Inician su artículo recordando que ya Polya (1945) se refería a las emociones cuando destacaba el deleite de los estudiantes al descubrir caminos y resolver problemas y el cuidado que debe tener profesor de no matar el interés de los estudiantes. Los autores invocan a hacer investigaciones cuidadosas en el campo de la educación matemática, que considere las motivaciones y las emociones de los estudiantes.

Emociones, juego y aprendizaje de las matemáticas

Siendo tan importantes las emociones en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, resulta natural preguntarse por formas eficientes de generar emociones positivas en los estudiantes. Seguramente hay muchas, pero es particularmente importante tener en cuenta que los juegos producen emociones; que hay juegos que estimulan el pensamiento matemático; y que hay analogías entre la matemática y los juegos que favorecen una mejor comprensión de esta. En ese sentido, es importante la acotación de Shoenfeld (1992)

> La geometría euclidiana es un juego formal; uno tiene que jugar según ciertas reglas. Por ejemplo, no puede "alinear" una tangente a simple vista, ni determinar el diámetro de un círculo deslizando una regla hasta obtener la cuerda de mayor longitud. Si bien dichos procedimientos pueden producir los valores correctos empíricamente, no están permitidos en el dominio formal. Las personas que entienden esto, se comportarán de forma muy diferente a los que no lo hacen. (p.45)

Ciertamente, nos estamos refiriendo a juegos como actividades recreativas que conllevan un desafío (no están basados solamente en la suerte) y que tienen reglas precisas; pero cabe aclarar que, sobre todo para la primera infancia, también son altamente valiosos los juegos que simulan actividades en la vida cotidiana (en una bodega, en una excursión, en el mercado, en una actividad culinaria, etc.). Al respecto, van Oers (2010) nos dice:

> En el contexto de estas actividades, los niños pequeños encuentran problemas y tareas que pueden tratar de resolver con los medios disponibles (que pueden parecer matemáticos) o simplemente sobre la base de intuiciones pragmáticas. En la medida en que el maestro reconoce las acciones (espontáneas) de los niños, él puede sentar las bases para el comienzo del pensamiento matemático. (p.29)

Por otra parte, si bien es divertido para los niños – y no solo para ellos – jugar juegos estructurados, que planteen desafíos, hemos observado que es también divertido, y en muchos casos más divertido para los niños, jugar juegos desafiantes inventados por ellos mismos, cuyas reglas son modificaciones de las que tiene un juego estructurado o son nuevos juegos con sus propias nuevas reglas. Las emociones advertidas y el reto de saber explotarlas, en ese contexto lúdico, para contribuir a desarrollar el pensamiento matemático, nos recuerdan que Vigotsky (2012), nos dice que, en todo acto creador, los factores intelectuales y emocionales resultan igualmente necesarios y que el sentimiento y el pensamiento son los que mueven la creación humana.

Creación de juegos y de problemas

Es precisamente en la perspectiva de una educación que estimule la creatividad y el pensamiento matemático, que consideramos de vital importancia incluir la creación de juegos y de problemas en los planes de estudio. Son ya numerosas las investigaciones y experiencias didácticas realizadas sobre creación de problemas. Singer, Ellerton y Cai (2013) dan una visión amplia, con referencias específicas, de las investigaciones realizadas

en el campo de la creación de problemas entre 1987 y 2012. Se refieren a investigaciones que vinculan creación de problemas con la formación matemática general y con el desarrollo de habilidades, de actitudes y de la creatividad. Al focalizar la atención en los niños, sobre todo de los primeros grados de la educación básica, consideramos de gran importancia asumir el reto, para matemáticos educadores y psicólogos, de proponer la creación de juegos que estimulen el pensamiento matemático, aprovechando las investigaciones sobre creación de problemas, que muestran sus grandes potencialidades.

En nuestro enfoque sobre creación de problemas (Malaspina, Mallart y Font, 2015; Malaspina, 2017) consideramos en los problemas cuatro elementos básicos: *información, requerimiento, contexto y entorno matemático*. Elementos análogos podemos encontrar en los juegos estructurados para estimular el pensamiento matemático, pues resulta esencial tener información (reglas, materiales), requerimiento (el objetivo del juego, lo que debe lograrse para ganar el juego), contexto (que también puede ser intra o extra matemático) y el entorno matemático (que lo conforma el marco matemático global en el que se ubican los conceptos matemáticos que intervienen o pueden intervenir para desarrollar el juego). También en nuestro enfoque consideramos que la creación de un nuevo problema se hace por *variación* cuando se obtiene modificando uno o más de los elementos de un problema dado, y se hace por *elaboración* cuando se crea a partir de una situación dada o por un requerimiento específico, con énfasis matemático o didáctico. Podemos decir prácticamente lo mismo para la creación de juegos. La creación de un nuevo juego puede ser por *variación* de uno conocido, o por *elaboración* a partir de una situación dada o un requerimiento específico. Ciertamente, al considerar la creación de estos en contextos de enseñanza y aprendizaje, deben tenerse muy en cuenta los objetivos cognitivos matemáticos específicos, en el marco del desarrollo de la intuición y el pensamiento matemático.

En nuestras experiencias didácticas con niños y profesores, ha estado más presente la creación de juegos por *variación*, modificando las reglas o el objetivo del juego. Con alumnos universitarios de un curso interdisciplinario tuvimos una experiencia de creación grupal de juegos por *elaboración*, teniendo como punto de partida un determinado tipo de pensamiento matemático que se quería estimular.

En Malaspina y Malaspina (2017) presentamos un estudio sobre la creación de juegos por niños entre 6 y 10 años de edad, en el entorno matemático de las probabilidades. Las

experiencias desarrolladas muestran que la creación de juegos modificando el que se presentó a los niños, la entienden como parte natural de su actividad lúdica con fuerte apoyo en su intuición y motivación. Jugar con reglas establecidas por los mismos niños, modificando las que se les presentó en un juego, es una experiencia que añade emociones positivas con mayor deleite. Contribuye a su autoaprendizaje, estimula su creatividad y fortalece su autoestima.

En Malaspina (2016) se presenta una experiencia didáctica desarrollada en un taller de formación de profesores, que muestra formas de estimular el pensamiento matemático, a partir de una situación lúdica que encierra un problema matemático. Se trata de la comprensión y modificación de un juego desafiante en el entorno matemático de los números naturales. Los profesores mostraron gran involucramiento en este tipo de actividades lúdicas que contribuyen al desarrollo del pensamiento matemático mediante la indagación para la comprensión y el uso de conceptos, la búsqueda de generalizaciones y el planteamiento de conjeturas, con sus correspondientes análisis para rechazarlas o demostrarlas.

Consideraciones finales

Las experiencias lúdicas desarrolladas con niños y en talleres con profesores en formación y en ejercicio, nos llevan a concluir que la invención de juegos, al igual que la creación de problemas, debe ser considerada en la educación matemática como un medio y un fin. Como medio, más orientado a los niños, por estimular la creatividad, la intuición, el pensamiento matemático y el autoaprendizaje; por favorecer el estímulo de emociones positivas en el aprendizaje; y por generar actitudes también positivas hacia la matemática. Como un fin, más orientado hacia los profesores, porque es fundamental que ellos desarrollen habilidades de creación de problemas y de juegos para que en sus clases usen con eficiencia estos recursos con sus estudiantes.

Cabe mencionar que Brag (2012) comenta que un gran número de estudios ha incorporado exitosamente los juegos en programas de matemáticas y hace referencia a los realizados por Asplin, Frid y Sparrow; Kamii y Rummelsburg; Rocche; y Young-Loveridge. Consideramos que experiencias como estas, y las investigaciones sobre creación de problemas, dan buenas bases para investigar y hacer propuestas para incorporar adecuadamente la invención de juegos en contextos educativos. Es un desafío que vale la pena asumirlo.

Referencias

Bragg, L. A. (2012). Testing the effectiveness of mathematical games as a pedagogical tool for children's learning. *International journal of science and mathematics education, 10*(6), 1445-1467.

Malaspina, U. (2016). Estímulo del pensamiento matemático. Una experiencia didáctica con profesores, usando un acertijo. *UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, No. 45,* pp. 285 – 293.

Malaspina, U. (2017). La creación de problemas como medio para potenciar la articulación de competencias y conocimientos del profesor de matemáticas. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.*

Malaspina, U., & Malaspina, M. (2017). Development of mathematical thinking in children by means of game invention. En Morska, J.,& Rogerson,A. *Proceedings of the 14th International Conference: Challenges in Mathematics Education for the Next Decade*. pp 229-234. Balatonfüred, Hungary.

Malaspina, U., Mallart, A. & Font, V. (2015). Development of teachers' mathematical and didactic competencies by means of problem posing. In Krainer, K., & Vondrová, N. (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 9).* 2861-2866. Prague, Czech Republic: ERME

Pekrun, R. (2014). *Emotions and learning*. Francia: UNESCO-IBE.

Polya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical model*. Princeton, New Jersey.

Radford, L. (2015) Of Love, Frustration, and Mathematics: A Cultural-Historical Approach to Emotions in Mathematics Teaching and Learning. In B. Pepin, B. Roesken-Winter (eds.), *From beliefs to dynamic affect systems in mathematics education, Advances in Mathematics Education*. 25-49. Suiza: Springer.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.*), Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*. 334-370. New York: MacMillan

Schukajlow, S., Rakoczy, K. & Pekrun, K. (2017). Emotions and motivation in mathematics education: theoretical considerations and empirical contributions. *ZDM Mathematics Education 49*:307–322

van Oers, B. (2010). Emergent mathematical thinking in the context of play. *Educational Studies in Mathematics. 74*, 23-37.

Vigotsky, L. (2012). *La imaginación y el arte en la infancia* (11ª edición). Madrid: Ediciones Akal.

Volver al índice de autores

1.2. Reportes de investigación

1.2.1. Las habilidades cognitivas en la resolución de problemas matemáticos

Isabel Inca Maldonado
Instituto Psicopedagógico EOS, Perú

Resumen

Abordar la enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas con cierto rigor exige tomar conciencia de la serie de procesos cognitivos que se desarrollan en dicho proceso. Es sabido que muchos estudiantes presentan dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas durante su escolaridad y en su posterior vida adulta. Estas dificultades, provocan retraso escolar, bajo rendimiento escolar y en el peor de los casos, deserción escolar. Diversas investigaciones desde diferentes perspectivas se han interesado en explicar las causas de dichas dificultades. Entre estas investigaciones, se está brindando importancia a las Funciones Ejecutivas, puesto que son habilidades cognitivas propias de la corteza pre-frontal (CPF) que guardan relación entre sí, e incluye habilidades vinculadas a la capacidad de establecer metas, organizar y planificar tareas, seguir secuencias, iniciar un plan y sostenerlo en la mente mientras se ejecuta, inhibir las distracciones, cambiar de estrategias de modo flexible si el caso lo requiere, autorregular y controlar el curso de la acción para asegurarse que la meta propuesta sea lograda. Todas estas funciones están relacionadas con la capacidad de resolver problemas matemáticos, en consecuencia, la alteración de estas, puede limitar la capacidad del individuo para mantener o realizar una actividad matemática, con éxit

Las Funciones Ejecutivas

Todos los días y en todo el día realizamos diferentes actividades, tomamos muchas decisiones, nos proponemos nuevos objetivos, etc. para éste fin, tenemos varias habilidades, tal es así que somos capaces de planificar y organizar nuestras actividades diarias, controlar nuestros impulsos, cuando ello sea necesario, recordamos los objetivos que nos hemos fijado y alejamos los distractores que puedan surgir en el camino. Es decir, somos capaces de controlar y regular el logro de nuestros objetivos, a esto se suma que podemos ser flexibles y adaptarnos a nuevas situaciones que surgen de forma imprevista. A esta capacidad de organizar, planificar, autorregularnos, es llamado Función ejecutiva

(Garon, Bryson. y Smith 2008), pero no todas las personas se desempeñan de forma regular ante situaciones de la vida diaria, muy por el contrario, sus capacidades de regulación, planificación entre otras se encuentran disminuidas las mismas que repercute de igual forma en su vida académica, por lo anterior, en los últimos años es común escuchar hablar del término Funciones Ejecutivas no sólo en el ámbito de la intervención psicológica, sino también en el ámbito educativo.

Las Funciones Ejecutivas (FE) son un constructo teórico perteneciente a la psicología cognitiva. En la actualidad, no existe una definición universal de las mismas, así como tampoco se ha llegado a un acuerdo en cuanto a los componentes que las constituyen (Tirapu, Muñoz y Pelegrín, 2002, Wasserman y Drucker, 2013). En función a lo expuesto por diversos autores se podría definir a las Funciones Ejecutivas como un *conjunto de capacidades cognitivas que se encuentran implicadas en la ejecución, regulación y supervisión de acciones dirigidas al cumplimiento de objetivos complejos o tareas poco aprendidas,* que exigen la inhibición de respuestas habituales y que se encuentran interrelacionadas conformando un sistema integrado de control (Lezak, 2004, Sanchez-Carpintero y Narvona, 2004). En síntesis, implican la capacidad de generar respuestas adaptativas frente a demandas externas.

El desarrollo de la Función Ejecutiva (FE) ha sido estudiado por autores como: Golden, 1981; Luria, 1966, 1984; Vygotsky, 1934; &Pineda, 2000, quienes concluyen que: el período de mayor desarrollo de las FE ocurre entre los seis y los ocho años, durante este periodo los niños adquieren la capacidad de autorregular sus comportamientos, establecer y anticipar eventos sin depender de las instrucciones externas. El desarrollo de esta capacidad cognoscitiva está ligado a la adquisición reguladora del lenguaje (lenguaje interior), la aparición del nivel de las operaciones lógicas formales, la maduración de las zonas pre frontales del cerebro (suceso que ocurre tardíamente en el neurodesarrollo donde los procesos madurativos dependen de elementos como la mielinización), el crecimiento dendrítico y celular, el establecimiento de nuevas rutas sinápticas y la activación de sistemas neuroquímicos.

Entre las funciones ejecutivas, la capacidad de planificación, implica concebir un cambio a partir de las circunstancias presentes, anticipar consecuencias, generar y seleccionar alternativas, construir y evocar un mapa mental que sirva para dirigir la acción al logro de un objetivo (Lezak, 1982, Soprano, 2009). Por otro lado, la capacidad de organización,

contribuye con la habilidad de elaborar un plan de trabajo, en tanto implica ordenar la información de manera adecuada y jerarquizarla en función del plan previsto. También se relaciona con la capacidad de identificar ideas o conceptos centrales durante el aprendizaje o la comunicación de información oral o escrita (Soprano, 2003, Tirapu et al., 2008). De igual forma, el control ejecutivo motor o control inhibitorio conductual es la capacidad que tiene el individuo de inhibir su respuesta comportamental ante un estímulo.

Las Matemáticas: Resolución de Problemas

De acuerdo con el informe del Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes (PISA), La Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) La nota promedio que establece es de 494, para matemáticas. Sin embargo, Perú no solo obtuvo puntajes muy lejanos a este promedio, sino que ocupó el último lugar con 368 puntos que fue la nota que obtuvo, siendo superada por los otros 64 países participantes de la evaluación.

Estas puntuaciones señalan que los estudiantes peruanos, presentan dificultades para responder a preguntas relacionadas con contextos que le son desconocidos, identificar información y llevar a cabo procedimientos rutinarios, y no seleccionan ni aplican estrategias de solución de problemas.

Bien se sabe que tanto en el ámbito escolar como en el no escolar, los estudiantes deben resolver problemas matemáticos que no solo requieren de un cálculo numérico, sino que previamente deben de trasladar el texto verbal a una representación interna abstracta en la que se recogen las distintas proposiciones, sus relaciones, formular una estrategia resolutiva y aplicar la operación adecuada y de manera correcta. Una vez hecho esto se puede reactivar la representación inicial del problema, sustituyendo el elemento no conocido por el resultado de la acción ejecutada.

Pero, ¿Qué es un problema matemático?, con respecto al término “problema”, a través del tiempo se ha propuesto una serie de conceptualizaciones, siendo la dada por Parra (1994, p. 14) que establece que: Un problema lo es en la medida en que el sujeto al que se le plantea (o que se plantea él mismo) dispone de los elementos para comprender la situación que el problema describe, pero no dispone de un sistema de respuestas totalmente constituido que le permita responder de manera inmediata.

Para Schoenfeld (1985) la dificultad de definir el término "problema" radica en que es relativo: un problema no es inherente a una tarea matemática, más bien es una relación particular entre el individuo y la tarea. En este sentido, Charnay (1994) dice que un problema puede verse como una terna situación alumno- entorno; es decir, el problema se da solo si el alumno la percibe como una dificultad.

Ciertamente, lo que es un problema para un individuo puede no serlo para otro, sea porque está totalmente fuera de su alcance o porque para el nivel de conocimientos del individuo, el problema ha dejado de serlo Parra (1990, p.14).

En 1962, en su libro Mathematical Discovery, Polya define un problema como aquella situación que requiere la búsqueda consciente de una acción apropiada para el logro de un objetivo claramente concebido, pero no alcanzable de forma inmediata. Coincido con Polya (1980), quien considera que "resolver un problema es encontrar un camino allí donde no se conocía previamente camino alguno, encontrar la forma de sortear un obstáculo, conseguir el fin deseado, que no es conseguible de forma inmediata, utilizando los medios adecuados", y Parra (1990, p. 15): "La resolución de problemas se refiere a la coordinación de experiencias previas, conocimiento e intuición, en un esfuerzo para encontrar una solución que no se conoce".

Por otro lado, Polya, a través del libro "Cómo plantear y resolver problemas", introduce el término "heurística" para describir el arte de la resolución de problemas. La heurística trata de comprender el método que conduce a la solución de problemas, en particular las operaciones mentales típicamente útiles en este proceso (Polya, 1965, p. 102). Agrega que la heurística tiende a la generalidad, al estudio de los métodos, independientemente de la cuestión tratada y se aplica a problemas de todo tipo. Al respecto considera que las estrategias resolutivas heurísticas implican: 1. Comprender el problema, 2. establecer un plan de resolución ,3. Ejecutar el plan y, 4. Visión retrospectiva del problema

Funciones Ejecutivas y Resolución de Problemas

Por otro lado, habría que preguntarse si las ¿Funciones Ejecutivas influyen en la resolución de problemas matemáticos? las diversas investigaciones dentro de las dimensiones cognoscitivas que integran el rendimiento académico, consideran que la matemática ocupa un lugar central y constituye un tema de gran interés debido a las dificultades que presentan los niños en esta área (Pedrotty, D. 2005), sobre todo en la resolución de problemas

matemáticos que es un proceso complejo pues implica leer y comprender el texto, planificar la estrategia resolutiva, describir las relaciones numéricas, para luego realizar un proceso de traducción del texto a cálculos y o ecuaciones que posibilite solucionar el problema. Entre los avances de la neurociencia señalan el importante papel que puede desempeñar el funcionamiento ejecutivo (FE) en los primeros aprendizajes matemáticos. Pennequin, Sorel y Fontaine (2010), en su investigación con niños de entre cuatro y siete años de edad, concluyeron que los puntajes en memoria de trabajo, inhibición y capacidad de cambio aumentan con la edad, pero que no hay diferencias en tareas de planificación, lo que indicaría que la planeación no depende de la edad, sino que está mediada por el desarrollo de otros componentes ejecutivos. En cuanto a la inhibición, esta debe emerger temprano en la infancia para el adecuado funcionamiento ejecutivo, pues cuando el niño puede ignorar estímulos irrelevantes y distracciones ambientales, puede así mismo usar otras funciones ejecutivas para resolver problemas complejos. Es decir, una vez que el niño ignora estímulos externos, incrementa la capacidad de memoria de trabajo y de planeación. De igual forma, en cuanto al rol de la memoria de trabajo en el cálculo aritmético. Lee, k Lynn y Fong (2009) indagaron, en niños de 11 años de edad, la asociación entre la resolución de problemas matemáticos de texto y el rendimiento en memoria de trabajo, inhibición y flexibilidad cognitiva; los resultados indicaron que la memoria de trabajo permitía explicar el 25% de la varianza obtenida en pruebas de representación y resolución de problemas.

La inhibición o control cognitivo es otro de los aspectos que ha sido investigado, la misma que muestra cambios por efectos del desarrollo madurativo. (Nigg, 2000), encontró que los niños de segundo grado tienen dificultades para suprimir el total de la información irrelevante de la memoria de trabajo (Bray, N., 1985), mientras que, para el quinto grado, aparentemente ya se logra satisfactoriamente este tipo de inhibición.

Dado que aprender es relativamente fácil para la mayoría de nosotros, algunas veces olvidamos lo complejas que pueden ser tareas que parecen sencillas a simple vista tales como memorizar tablas de multiplicar o resolver problemas matemáticos. Por ejemplo, cuando un estudiante resuelve un problema matemático, debe poder alternar sus habilidades analíticas y varios niveles de memoria (de trabajo, de corto y largo plazos). En el caso de problemas de palabras, debe poder retener números y preguntas mientras decide la solución al problema. En seguida, debe poder accesar su memoria de largo plazo para encontrar la regla matemática adecuada para resolver el problema. Finalmente debe poder

retener datos importantes mientras aplica reglas y usa información alternando entre su memoria de trabajo y la de corto plazo para resolver el problema y encontrar una solución.

Resolver exitosamente problemas matemáticos requiere ordenar y jerarquizar adecuadamente la información disponible, así como construir un mapa mental que sirva para la consecución del objetivo propuesto. En coherencia con este planteo, un estudio (Cervigni, M. A. y Stelzer, F. (2011), comparó el rendimiento en una prueba de planificación (Torres de Londres) en tres grupos de niños: niños con dificultades en aritmética, niños con dificultades en lectura y un grupo de niños sin dificultades en estas áreas curriculares. Los resultados indicaron que aquellos niños con dificultades en aritmética presentaron un rendimiento significativamente inferior en la prueba de planificación en comparación con los otros dos grupos evaluados.

A partir de estos datos, los autores consideran que la capacidad de planificación podría ser un componente crítico para un adecuado desempeño en aritmética (Butler, 2002), aunque sugieren que otros procesos cognitivos también podrían estar implicados. Los autores aseguran, que si bien los resultados sugieren una relación entre una adecuada capacidad de planificación y la resolución exitosa de las operaciones aritméticas, es posible que también estén implicados otros procesos cognitivos. Sin embargo, a partir de los resultados obtenidos consideran que la capacidad de planificación podría ser un componente crítico para un adecuado desempeño en aritmética (Butler et al., 2002).

En conclusión, el conjunto de información presentada destaca la contribución de algunas funciones ejecutivas, como el control inhibitorio y la memoria de trabajo, en la resolución de problemas matemáticos. Por lo tanto, sería interesante enrumbar en estudios futuros, la organización y planificación, componentes importantes, en la resolución de los problemas matemáticos.

Nota. La presentación del material es parte del libro:
TRALLERO SANZ, Manuel / GALVE MANZANO, José Luis / TRALLERO DE LUCAS, Cristina / INCA MALDONADO, Carmen Isabel (2017). *La Resolución de problemas aritméticos en la enseñanza obligatoria.* Perú: EOS

Referencias

Bray, N. (1985). *Selective Remembering During Adolescence. Developmental* Psychology, 21, 290–294. Recuperado de: https://www.sciencedirect.com/science/.../S1877042812055395

Butler, R. (2002). *Tower of London Test Performance in Children With Poor Arithmetic Skills*. Developmental neuropsychology, *21*(3), 243–254. Recuperado de: http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubm ed/12233937

Cervigni, M. (2011). *Desempeño académico y funciones ejecutivas en infancia y adolescencia. Una revisión de la literatura*. Revista de Investigación en Educación, 9(1), 148-156. Recuperado de: http://www.academia.edu/869480/

Charnay, R. (1988) *Aprender (por medio de) la resolución de problemas*. Buenos Aires: Paidos.

Garon, N., Bryson, S. E. y Smith, I. M. (2008). *Executive function in preschoolers: A review using an integrative framework*. Recuperado de: http://bibliotecadigital.uca.edu.ar/repositorio/revistas/desarrollo-evolutivo-funcionamiento-ejecutivo.

Golden, C., &Freshwater, S., (2002). The Stroop Color and Word Test. Wooddale, IL: Stoelting Co.

Korzeniowski, C. G. (2011). Desarrollo evolutivo del funcionamiento ejecutivo y su relación con el aprendizaje escolar. *Revista de Psicología*, *7*(13) ,7-25. Recuperado de: http://bibliotecadigital.uca.edu.ar/repositorio/revistas/desarrollo-evolutivo-funcionamiento-ejecutivo.

Lee, K., Ee Lynn, N. y Fong, S. (2009). The Contributions of Working Memory and Executive Functioning to Problem Representation and Solution Generation in Algebraic Word Problems, Journal of Educational Psychology, 101(2), 373–387. Recuperado de: http://psycnet.apa.org/psycinfo/200 9-04640-010

Lezak, M. D. (1982). El problema de evaluar las funciones ejecutivas- *Jornada de Psicología*, *17*, 281- 297. Recuperado de: http://psycnet.apa.org/index.cfm?fa =search.displayRecord&UID=1983.

Nigg, T. (2000). *En la inhibición/desinhibición en psicopatología del desarrollo: vistas desde cognitiva y psicología y un trabajo inhibición de la taxonomía*. Psychological Bulletin, 126, 220-246.

Parra C. y Saiz, I. (1995*). Didácticas de matemáticas*. Ecuador: Paidos

Pedrotty, D. (2005). *Dificultad en matematias: Resumen*. Recuperado el 18 de junio de 2007, de: http://www. schwablearning.org/articles.asp?r=1001

Pennequin, V., Sorel, O. & Fontaine, R. (2010). Motor planning between 4 and 7 years of age: Changes linked to executive functions. Brain and Cognition, 74, 107-11.Recuperado de: www.scielo.org.co/pdf/apl/v31n1/v31n1a06.pdf

Polya, G. (1965). *Como plantear y resolver problemas* (vol.2). New York: Wiley.

Sánchez-Carpintero, R y Narvona, J. (2004). *El sistema ejecutivo y las lesiones frontales en el niño. Rev. NEUROL, 39*(2), 188-191. Recuperado de: http://dspace.si.unav.es/dspace/bitst ream/10171/22682/1/Rev%20Neur ol%202004. %20188.pdf

Soprano, A. M. (2003). *Evaluación de funciones ejecutivas en el niño*. Revista de Neurología, *37*(1), 44- 50. Recuperado de: http://desafiandoalautismo.org/wp-content/uploads/2011/09/p010044.

Schoenfeld, *A. (1985). Mathematical Problem Solving. New York: Academic Press.*

Tirapu, A. *Propuesta de un protocolo para la evaluación de las funciones ejecutivas*. Rev Neurol 2006; 41: 177-86. 17.

Stelzer, F; Cervigni, Desarrollo de las funciones ejecutivas en niños preescolares: una revisión de algunos de sus factores moduladores .Revista de Psicología, vol. 17, núm. 1, enero-junio, 2011, pp. 93-100 Universidad de San Martín de Porres Lima, Perú

Tirapu-Ustárroz, J., (2008).*Modelos de funciones y control ejecutivo* (II).Rev. Neurol., 46 (12), 742-750.

Wasserman, T. y Drucker Wasserman, L. (2013).Toward an integrated model of executive functioning in children. Applied Neuropsychology: Child, 0, 1- 13.Recuperado de:

http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubm ed/23437872 Woodcock Actividades sobre gráficos estadísticos propuestas en libros de texto de Educación Primaria**.**

Volver al índice de autores

1.2.2. Actividades sobre gráficos estadísticos propuestas en libros de texto de Educación Primaria

Miluska Osorio, Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas, Perú
Danilo Díaz-Levicoy, Universidad de Granada, España
Claudia Vásquez, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile

Resumen

El presente trabajo describe los resultados sobre las actividades sobre gráficos estadísticos en una serie completa de libros de texto de matemática pertenecientes a la Educación Primaria en Perú. La investigación sigue una metodología cualitativa, de nivel descriptivo y como método de recogida de datos hemos utilizado el análisis de contenido. La muestra corresponde a seis libros de Educación Primaria, uno por nivel, que pertenecen a los entregados por el Ministerio de Educación a los centros educativos públicos, elegidos por su amplia difusión en el territorio peruano. Los resultados muestran disparidad entre las diversas actividades, con el predominio de calcular y explicar

Introducción

Desde hace un par de años se ha comenzando a usar la expresión *cultura estadística*, para referirse a la importancia de desarrollar habilidades estadísticas básicas en los futuros ciudadanos; motivados principalmente por la importancia de la estadística en la vida cotidiana. Gal (2002), uno de los principales difusores de esta idea, define cultura estadística como la unión de dos grandes habilidades:

> a) Interpretar y evaluar críticamente la información estadística, los argumentos apoyados en datos o los fenómenos estocásticos que las personas pueden encontrar en diversos contextos, y b) discutir o comunicar sus opiniones respecto a tales informaciones estadísticas cuando sea relevante (p. 2-3)

Es claro que el trabajo con tablas y gráficos estadísticos queda plasmado en esta definición y así lo confirman autores como Arteaga, Batanero, Contreras y Cañadas (2016) al mencionar que "los gráficos estadísticos son parte de la cultura estadística necesaria en la sociedad actual" (p.16).

Otro aspecto que se consideró en este trabajo es la importancia de los libros de texto, usado

por profesores para planificar la instrucción (e.g., Escolano, 2009; Díaz-Levicoy, Morales y López-Martín, 2015) dando cumplimiento a las directrices curriculares (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015; Díaz-Levicoy y Roa, 2014).

El trabajo con la estadística se viene dando desde los primeros años de Educación Primaria, según lo mencionan diferentes directrices curriculares (e.g., MECD, 2014; MINEDUC, 2012; NCTM, 2000) y estudios sobre su presencia en libros de texto (e.g., Díaz-Levicoy, Batanero, Arteaga y Gea, 2016; Guimarães, Gitirana, Cavalcanti y Marques, 2008).

En el caso de Perú, las directrices curriculares que define el Ministerio de Educación (MINEDU, 2009) no han quedado ajenas de esta tendencia internacional y establecen las capacidades para el eje de Estadística, donde se observa la relevancia de la estadística en general y de los gráficos estadísticos en particular desde los primeros cursos.

Es por ello, que en este trabajo nos interesamos en *conocer las actividades que los libros de texto siguieren trabajar en la Educación Primaria peruana*, lo que a su vez es parte de un trabajo más amplio y del cual se han publicado algunos resultados (e.g., Díaz-Levicoy, Osorio, Arteaga y Rodríguez-Alveal, 2018; Osorio y Díaz-Levicoy, 2018).

En lo que sigue, describimos antecedentes de otros estudios sobre esta temática, la metodología, los resultados y conclusión.

Antecedentes

En este apartado se describen los resultados de algunos estudios sobre gráficos estadísticos en libros de texto.

Díaz-Levicoy, Batanero et al (2016) analizan los gráficos estadísticos en libros de texto de Chile (18) y España (18). Los resultados indican el predominio de la actividad de calcular (52,2%) y construir (24,8%) en los textos chilenos, y las de leer (49,8%) y construir (27,9%) en los españoles.

Díaz-Levicoy y Arteaga (2014) analizan las actividades sobre esta representación en 2 libros de texto de 7º de Educación Primaria en Chile, destacando las actividades de comparar y justificar (54,5%) y calcular (30,9%).

Guimarães, Gitirana, Cavalcanti y Marques (2008) analizan las actividades sobre tablas (no

sólo estadísticas) y gráficos estadísticos en 17 series de libros de texto de 1º a 4º de Educación Primaria en Brasil. Los resultados sobre las actividades sugeridas en torno a los gráficos estadísticos indican predominio de actividades centradas en leer y calcular.

Díaz-Levicoy, Giacomone, López-Martín y Piñeiro (2016) indagan sobre estas representaciones en una serie de libros de texto digitales de matemática para Educación Primaria en Andalucía (España). Los resultados muestran que las actividades de mayor presencia son leer (51,4%), calcular (41,3%) y construir (30,3%).

En el contexto peruano, los estudios son escasos, hemos identificado el trabajo de Valentin (2015), quien estudia la organización praxeológica en el libro de tercer año de Educación Primaria del MINEDU. Entre las tareas que identifica están: construir, completar y leer gráficos (pictogramas y de barras).

Metodología

Para cumplir el objetivo de investigación realizamos una metodología cualitativa y basada en el análisis de contenido (Cohen, Manion y Morrison, 2011) en una muestra de seis libros de texto de Educación Primaria, uno por curso, que son entregados por el MINEDU. La lista de los textos se muestra en el Anexo.

En cada libro de texto se han identificado las secciones (trozo de texto) que hacen referencia a algún gráfico estadístico, para identificar la actividad pedida a los estudiantes. Para ello nos basamos en estudios previos (e.g., Díaz-Levicoy y Arteaga, 2014; Díaz-Levicoy, Batanero et al., 2016; Díaz Levicoy, Giacomone et al., 2016).

Dado que en algunas secciones se plantean más de una actividad, se contabilizarán tantas veces como actividades diferentes se puedan identificar. Datos que son ingresados a Excel para su tratamiento descriptivo.

Resultados

En este apartado se describen las actividades propuestas en los libros de texto en estudio sobre los gráficos estadísticos.

Leer. Comprende la lectura literal de la información contenida en el gráfico, la lectura del título, ejes o escala del gráfico. Cabe resaltar que esta actividad es necesaria para el

desarrollo de otras, como paso necesario. Para esta categoría se ha considerado solo las que permiten dar una respuesta directa a la pregunta. Por ejemplo, en la Figura 1, *pregunta b*, se pide responder cuantas personas asistieron al Circuito Mágico del Agua.

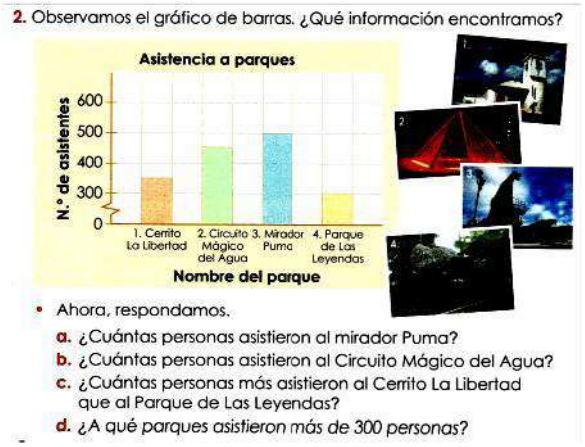


Figura 1. Actividad de *leer* (T2, p. 169).

Calcular. Implica la realización de operaciones aritméticas, ejercitando algún concepto o aplicando un algoritmo simple. En la Figura 1, *pregunta c*, vemos un ejemplo de esta situación, mediante una sustracción se determina cuántas personas más asistieron al Cerrito La Libertad que al Parque de Las Leyendas.

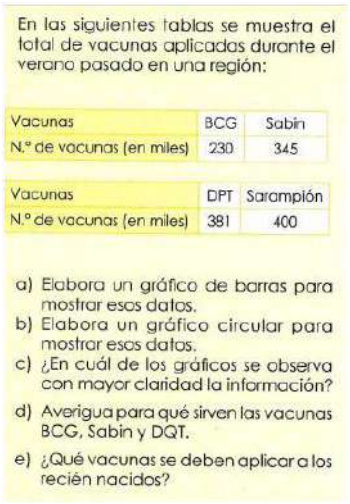
*Completar***.** Se pide terminar la construcción de un gráfico, con la información proporcionada en un listado de datos o una tabla. En el caso de la actividad de la Figura 2 implica construir barras, escribir un título general y los rótulos de las categorías del eje *X* en el gráfico.



Figura 2. Actividad de *completar* (T3, p. 77)

Construir. Consiste en representar datos o información en un gráfico, los que han sido

proporcionados o deben ser recolectados por el propio estudiante a partir de cierta situación. En la Figura 3, se pide la construcción de un gráfico de barras (tarea a) y de un gráfico de sectores (tarea b) a partir de datos entregados en una tabla; lo que invita al estudiante a recordar los convenios de construcción de estos dos gráficos, apreciando sus diferencias. Se destaca el uso de evidencia objetiva (vacunas aplicadas en una región) para involucrar al niño con su entorno, "así como la comprensión de hechos cercanos a su ambiente natural y social" (MINEDU, 2009, p. 11) y destacar el uso del gráfico como medio para conectar temas de distintos ámbitos o disciplinas.



En las siguientes tablas se muestra el total de vacunas aplicadas durante el verano pasado en una región:

Vacunas	BCG	Sabin
N.° de vacunas (en miles)	230	345

Vacunas	DPT	Sarampión
N.° de vacunas (en miles)	381	400

a) Elabora un gráfico de barras para mostrar esos datos.
b) Elabora un gráfico circular para mostrar esos datos.
c) ¿En cuál de los gráficos se observa con mayor claridad la información?
d) Averigua para qué sirven las vacunas BCG, Sabin y DQT.
e) ¿Qué vacunas se deben aplicar a los recién nacidos?

Figura 3. Actividad de *construir* (T5, p. 201)

Explicar. Actividad que pide al estudiante argumentar, detallar procedimientos, o describir procesos a partir de la situación representada en el gráfico, justificar puntos de vista o la elección de un gráfico, llegar a conclusiones a partir del gráfico, sustentar errores u omisiones en el gráfico, o exponer diferencias entre gráficos. En la tercera tarea (c) de la Figura 3, se pide señalar las diferencias que hay entre dos gráficos; lo que le permite al estudiante apreciar y distinguir la particularidad de cada uno, identificando aspectos para la correcta elección de un gráfico.

Traducir. Consiste en el cambio de representación de los datos, pasar de un gráfico a una tabla de frecuencias o de un gráfico a otro tipo de gráfico. Por ejemplo, en la Figura 4, se pide completar los datos de la tabla con la información representada en un gráfico de barras donde se representa la cantidad de estudiantes que practican cierto deporte.



Figura 4. Actividad de *traducir* (T3, p. 76)

Buscar información. Implica la recolección de datos, por ejemplo, al aplicar una encuesta, al experimentar, al averiguar la ocurrencia de un suceso en particular o al hacer una pregunta directa; que moviliza al estudiante a observar dentro/fuera del aula, a observarse a sí mismo y/o a sus pares o a realizar una consulta bibliográfica. Un ejemplo de esta última situación se observa en la Figura 3, donde se pide investigar la utilidad de determinadas vacunas y cuales se deben aplicar a los niños recién nacidos.

Ejemplificar. Es una actividad que demuestra, aclara o muestra la interpretación, análisis y/o construcción de un gráfico; mostrando al estudiante la elección del mejor gráfico, en descubrir las semejanzas/diferencias entre ciertas representaciones, así como las ventajas o desventajas en el uso de las mismas. Un ejemplo de esta actividad la encontramos en la Figura 5, donde se muestra la forma de interpretar un gráfico de líneas, al observar la tendencia de la cantidad pagada del consumo de energía eléctrica.

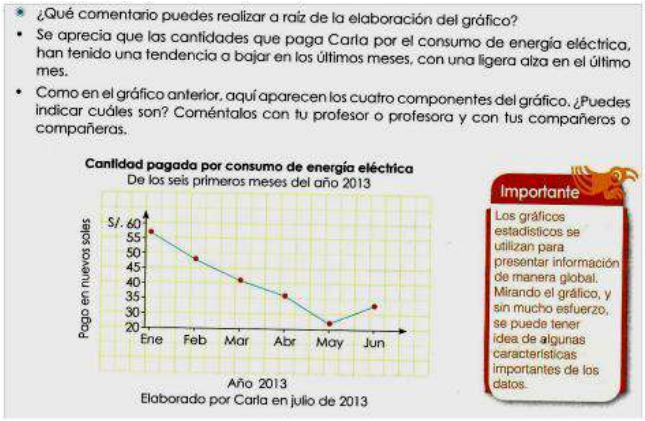


Figura 5. Actividad de *ejemplificar* (T6, p. 184)

En la Tabla 1 se resumen las actividades propuestas por los libros de texto, la actividad preponderante es *calcular* (35,5%), donde se utilizan operaciones aritméticas elementales o la comparación de valores como apoyo en la interpretación de un gráfico. Se observa que es la única actividad que va desde 1° a 6° grado, por lo que es necesario promover equitativamente el resto de actividades.

Tabla 1. *Porcentaje de tipo de actividad sobre gráficos estadísticos por nivel educativo*

Tipo de actividad	**1° (n=9)**	**2° (n=8)**	**3° (n=31)**	**4° (n=44)**	**5° (n=32)**	**6° (n=28)**	**Total (n=152)**
Calcular	66,7	37,5	45,2	38,6	18,8	28,6	35,5
Construir		12,5	3,2	11,4	25,0	10,7	11,8
Ejemplificar			6,5	4,5	18,8	14,3	9,2
Explicar				11,4	18,8	39,3	14,5
Leer		12,5		15,9	6,3	3,6	7,2
Buscar información		12,5	6,5	6,8	12,5	3,6	7,2
Traducir		12,5	25,8	6,8			7,9
Completar	33,3	12,5	12,9	4,5			6,6

En segundo lugar, la actividad *explicar* (14,5%) que da un espacio al estudiante para expresarse y dar a conocer sus ideas; es decir, lo capacita para discutir y comunicar sus opiniones respecto a la información obtenida de un gráfico, promoviendo la cultura estadística (Gal, 2002). Esta actividad se da a partir del 4° grado, por lo que se sugiere su presencia en los grados menores para fortalecer las capacidades comunicativas del niño a través del trabajo con gráficos estadísticos. En tercer lugar, la actividad *construir* (11,8%), presente en todos los grados a excepción del 1°; es importante esta actividad por que conecta al niño con su entorno, al construir un gráfico con datos recolectados dentro y fuera del aula; "el niño se circunscribe al plano de la realidad de los objetos, de los hechos y datos actuales, a partir de la información que proporciona la familia y la institución educativa (MINEDU, 2009, p. 13). Por ello, es necesaria una mayor presencia de esta actividad en los libros de texto, y en 1° grado donde no hay presencia de esta actividad en el texto en estudio. En cuarto lugar, la actividad *ejemplificar* (9,2%), que da la pauta para el análisis y/o construcción de gráficos propuestos. En quinto lugar, la actividad *traducir* (7,9%) que esta presente del 2° al 4° grado. Al hacer el cambio de representación (transnumeración) surge una comprensión de los datos (Wild y Pfannkuch, 1999), a su vez que permite ver los patrones y relaciones entre los datos, la estructura oculta y plantear

conjeturas, modo esencial del Razonamiento estadístico (Batanero, 2013). Se observa que, en esta actividad, en la representación de gráficos no se permite al niño experimentar con la elección de las escalas del gráfico. Watson (2006) considera importante el trabajo con la escala de los gráficos estadísticos, ya que se presta a la manipulación de los datos representados; pero un trabajo temprano con las escalas permitiría sensibilizar a los estudiantes en este aspecto. En sexto lugar, l*eer* (7,2%) y *buscar información* (7,2%). *Leer*, que está presente en todos los grados a excepción de 1° y 3°, se recomienda un mayor trabajo ya que esta actividad constituye el primer paso para la comprensión de cualquier tipo de representación gráfica; mientras que *buscar información* lleva al estudiante a tomar en cuenta "el testimonio" de su entorno (datos), a través de impresiones, sentimientos, estímulos, etc. y vivenciar así lo que depara cada situación. En último lugar la actividad *completar* (6,6%), que está presente de 1° a 4° grado, por lo que se sugiere su trabajo en los grados superiores para concretar la comprensión gráfica, en su dimensión técnica (construcción de un gráfico) y su dimensión estratégica (pertinencia de un gráfico).

Conclusión

A continuación,,se presentan las conclusiones obtenidas en el presente estudio. En primer lugar, se destaca la diversidad de las actividades propuestas en los libros de texto analizados. "Es importante resaltar que todos los niños interpretan el mundo externo de acuerdo con lo que ven […], el cual leen e interpretan de manera diferente […]" (MINEDU, 2009, p. 163); en consecuencia, es importante capturar las características del mundo real y aportar significado, objetivo que se logra a través de las actividades con gráficos estadísticos.

En cuanto a la actividad *calcular*, es la de mayor frecuencia en los libros de texto analizados; por lo que hay que tener cuidado que el estudiante no relacione el uso de operaciones aritméticas básicas, al comunicar el significado que surge de los datos como parte del pensamiento y razonamiento estadístico (Batanero, 2013). Por ello es importante la presencia equitativa del resto de actividades identificadas en los libros de texto de todos los niveles de la EBR.

Coincidiendo con el trabajo de Díaz-Levicoy y Arteaga (2014), Díaz-Levicoy, Giacomone et al (2016) y Díaz-Levicoy, Batanero et al (2016); *calcular* es una de las actividades más frecuentes en los libros de texto de Chile, Perú y España (libros digitales).

Con respecto a la actividad de *buscar información*, hay que resaltar la riqueza de esta actividad, al promover en los estudiantes la capacidad de buscar información en diversas fuentes y el trabajo colaborativo que conlleva a un aprendizaje colaborativo (MINEDU, 2009). Esta actividad refleja la necesidad de "[…] una intervención educativa orientada a favorecer la expresión de las necesidades, deseos y emociones de los niños y a que las puedan identificar. Además de permitirles explorar y transformar su entorno, lo cual los llevará a una progresiva autonomía en las rutinas y actividades cotidianas" (MINEDU, 2009, p.12). Se sugiere que la actividad de buscar información también incluya periódicos, revistas o datos en Internet; para usarlas también como fuente de argumentación y toma de decisiones en su futuro ámbito laboral o profesional, e impulsar una actitud crítica al cuestionar diferente tipo de información basada en evidencia estadística.

Se recomienda actividades con gráficos para dos variables, debido a que son casi nulas en los libros de texto en estudio. "El niño (en educación primaria) es capaz de pensar en dos o más variables cuando estudia los objetos (y evidencia de su contexto) y reconcilia datos aparentemente contradictorios" (MINEDU, 2009, p.163).

Las actividades de *completar*, *construir*, *traducir* y *ejemplificar* contribuyen a la construcción y análisis de un gráfico estadístico que promueven: el pensamiento y razonamiento estadístico, la importancia de los datos y la interdisciplinariedad conectando la matemática, ciencias sociales, ciencias naturales, etc.; es decir, las áreas curriculares.

Los resultados de esta investigación pueden ser útiles al brindar pautas para un mejor desempeño de los profesores en ejercicio y a las instituciones de formación de los profesores, en cuanto a las actividades con gráficos estadísticos y su relación con el desarrollo del pensamiento matemático y estadístico; y en el fomento de la cultura estadística.

Por lo tanto, es importante continuar con este tipo de investigación en libros de texto de otros países y en otros niveles educativos que, permita uniformizar el trabajo con gráficos estadísticos en la región y atienda a los estándares internacionales logrando un proceso de instrucción óptimo en gráficos estadísticos.

Referencias

Arteaga, P, Batanero, C., Contreras, J. M. y Cañadas, G. (2016). Evaluación de errores en

la construcción de gráficos estadísticos por futuros profesores. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 19*(1), 15-40.

Batanero, C. (2013). Sentido estadístico: componentes y desarrollo. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 55-61). Granada: Universidad de Granada.

Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes-Gasperini, D. (2015). Análisis del discurso matemático escolar en los libros de texto, una mirada desde la teoría socioepistemológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 8*, 9-28.

Cohen, L; Manion, L. y Morrison, K. (2011). *Research methods in education*. Londres: Routledge.

Díaz-Levicoy, D. y Arteaga, P. (2014). Análisis de gráficos estadísticos en textos escolares de séptimo básico en Chile. *Diálogos Educativos, 14*(28), 21-40.

Díaz-Levicoy, D., Batanero, C., Arteaga, P. y Gea, M.M. (2016).Gráficos estadísticos en libros de texto de Educación Primaria: Un estudio comparativo entre España y Chile. *BOLEMA. Boletim de Educação Matemática, 30*(55), 713-737.

Díaz Levicoy, D., Giacomone, B., López-Martín, M. M. y Piñeiro, J. L. (2016). Estudio sobre los gráficos estadísticos en libros de texto digitales de Educación Primaria española. *Profesorado. Revista de Currículum y Formación del Profesorado, 20*(1), 133-156

Díaz-Levicoy, D., Morales, R. y López-Martín, M. M. (2015). Tablas estadísticas en libros de texto chilenos de 1º y 2º año de Educación Primaria. *Revista Paranaense de Educação Matemática, 4*(7), 10-39.

Díaz-Levicoy, D., Osorio, M., Arteaga, P. y Rodríguez-Alveal, F. (2018). Gráficos estadísticos en libros de texto de matemática de Educación Primaria en Perú. *BOLEMA. Boletim de Educação Matemática,* en prensa.

Díaz-Levicoy, D. y Roa, R. (2014). Análisis de actividades sobre probabilidad en libros de texto para un curso de básica chilena. *Revista Chilena de Educación Científica,*

13(1), 9-19.

Escolano, A. (2009). El manual escolar y la cultura profesional de los docentes. *Tendencias Pedagógicas, 14,* 169-180.

Gal, I. (2002). Adult´s statistical literacy: Meaning, components, responsibilities. *International Statistical Review, 70*(1), 1-25.

Guimarães, G., Gitirana, V., Cavalcanti, M. y Marques, M. (2008). Análise das atividades sobre representações gráficas nos livros didáticos de matemática. En V. Gitirana, F. Bellemain y V. Andrade (Eds.), *Anais do 2º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática* (pp. 1-12). Recife: UFRPE.

MECD (2014). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria*. Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

MINEDU (2009). *Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular*. Lima: Dirección General de Educación Básica Regular.

MINEDUC (2012). *Matemática Educación Básica. Bases curriculares*. Santiago: Unidad de Currículum y Evaluación.

NCTM (2000). *Principles and Standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Osorio, M. y Díaz-Levicoy, D. (2018). Tipos de gráficos estadísticos en libros de texto de matemática para la Educación Primaria peruana. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 31*. México: CLAME.

Valentín, M. (2015). *Organización praxeológica del objeto gráficos estadísticos en el texto de tercer grado de educación primaria del ministerio de educación* (Tesis de Magister). Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú.

Watson, J. M. (2006). *Statistical literacy at school: Growth and goals*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

ANEXO: libros de texto editados para el MINEDU

T1. Paravecino, R., Marcos, M., Drouard, R., Bocanegra, N., Pardo, S. y Cruzado, I. (2012). *Matemática 1. Texto escolar*. Lima: Norma.

T2. Paravecino, R., Marcos, M., Drouard, R., Sánchez, A., Bocanegra, N. y Dávila, K. (2012). *Matemática 2. Texto escolar*. Lima: Norma.

T3. Mejía, C., Zubiaga, C., Mamani, E., Márquez, M. y Moy, R. (2012). *Matemática 3 Primaria. Texto escolar*. Lima: Santillana.

T4. Mejía, C., Lafosse, R., Carrasco, R., Cuneo, P., Montoya, P. y Moy, R. (2012). *Matemática 4 primaria. Texto escolar*. Lima: Santillana.

T5. Huatay, R., Cuba, R., Dos Reis, I., Martel, F. y Lapa, Z. (2012). *Matemática 5. Texto escolar*. Lima: El Nocedal.

T6. Huatay, R., Dos Reis, I., Sulca, E. y Val, E. (2012). *Matemática 6. Texto escolar*. Lima: El Nocedal.

Volver al índice de autores

1.2.3. Resolución de problemas y desarrollo de competencias en estudiantes de educación secundaria

Judith Esther Gavidia Medrano
Arnulfo Ortega Mallqui
Institución Educativa Industrial Hermilio Valdizán, Huánuco, Perú

Resumen

El presente trabajo tiene por objetivo determinar la influencia del método de resolución de problemas en el desarrollo de competencias en el área de matemática, en estudiantes del cuarto grado de educación secundaria. La investigación fue de tipo aplicada-explicativa de diseño cuasi experimental. En el grupo experimental se aplicó el método de resolución de problemas en sesiones de aprendizaje y en el grupo de control se desarrollaron las sesiones según lo programado en forma tradicional. Los resultados del grupo experimental fueron: el 71 % se ubicaron en la escala de logro previsto y el 3,2 % alcanzaron el nivel de logro destacado. En el grupo de control el 71%% se ubican entre las escalas de inicio y en proceso, y el 25,8% alcanzaron el nivel de logro previsto. Existen diferencias significativas en el desarrollo de las competencias en situaciones de: Cantidad; regularidad, equivalencia y cambio; forma, movimiento y localización; y gestión de datos e incertidumbre; mediante las capacidades del área de matemática. La aplicación del método de resolución de problemas influye positivamente en el desarrollo de competencias en el área de matemática en los estudiantes del cuarto grado de educación secundaria.

Introducción

Las recientes evaluaciones nacionales e internacionales, reflejan una realidad educativa alarmante, tanto en el área de matemática como en el de lectura. La Unidad de Medición de la Calidad Educativa del MINEDU, nos indica que la evaluación censal del año 2014 ECE- 2014, muestra que un 38,7% de estudiantes de segundo grado de educación secundaria a nivel de Perú están en inicio, el 35,3 % se encuentra en proceso y un 25,9 % están en el nivel satisfactorio, lo cual es un alarmante indicador pues casi la mitad de los estudiantes peruanos no han alcanzado el nivel de logro esperado.

La mayoría de los docentes en el nivel secundario enseñan la matemática de una forma rutinaria, expositiva y tediosa; no se aplican métodos, técnicas y estrategias de aprendizaje

innovadoras, se sigue aplicando un modelo tradicional de enseñanza. En muchos de los docentes existe despreocupación por la capacitación, actualización e innovación en sus formas de enseñar; todo esto repercute en un bajo nivel de aprendizaje de los estudiantes en el aprendizaje de la matemática.

Ante los planteamientos anteriores, se requiere dar respuesta a ¿cuál es el rol que debemos cumplir los docentes?, ¿De qué manera la concepción que tenemos de la matemática, y la praxis de su enseñanza y aprendizaje, se ajustan a la perspectiva de una educación matemática coherente y pertinente?

Una de las posibles respuestas es la aplicación del Método de Resolución de Problemas que consta en estrategias que permiten desarrollar capacidades fundamentales como: Matematiza situaciones, Comunica y representa ideas matemáticas, Elabora y usa estrategias y Razona y argumenta generando ideas matemáticas. Para involucrar a los estudiantes en la solución de problemas se tuvo en cuenta cuatro pasos: 1. Entender el problema. 2. Configurar un plan 3. Ejecutar el plan 4. Mirar hacia atrás. (Polya, 2000, p. 19).

En la presente investigación se analiza la influencia del método de resolución de problemas en el desarrollo de competencias en el área de matemática, en los estudiantes del cuarto grado de educación secundaria de la Institución Educativa Industrial Hermilio Valdizán-Huánuco, 2016. Se desarrolló una investigación explicativa de diseño cuasi experimental correlacional causal referencia; se trabajó con un grupo de control y un grupo experimental. En la cual, con los estudiantes de educación secundaria del cuarto grado sección B de la Institución Educativa Industrial Hermilio Valdizán-Huánuco, como el grupo experimental; se desarrolló la aplicación del método de resolución de problemas en las sesiones de aprendizaje desde el mes de abril a julio de 2016. Y se tomó como el grupo de control a los estudiantes del cuarto grado de secundaria sección A, donde se desarrollaron las sesiones de aprendizaje según lo programado. Los resultados muestran que existen diferencias significativas en los logros obtenidos en ambos grupos respecto al desarrollo de las cuatro competencias Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de: Cantidad; regularidad, equivalencia y cambio; forma, movimiento y localización; y gestión de datos e incertidumbre del área de matemática en los estudiantes mediante las capacidades de matematiza situaciones,

comunica y representa ideas matemáticas, elabora y usa estrategias, y razona y argumenta generando ideas matemáticas.

Según Navarro-Arias (2007), las siguientes afirmaciones prevalecen entre los docentes y los estudiantes de los diferentes niveles educativos:

- ✓ Una concepción negativa acerca de la Matemática, considerada como un área excluyente y discriminadora, accesible a pocos docentes, estudiantes y algunas personas.

- ✓ Un aprendizaje de la Matemática caracterizado como mecánico, repetitivo memorístico, alejado del desarrollo de procesos y de la resolución de problemas, carente de significado, desconectado de la vida cotidiana y del contexto natural, social y cultural.

- ✓ Ausencia en la planificación de la enseñanza y aprendizaje de la Matemática, las dimensiones relativas a las aplicaciones de la matemática y a la reflexión acerca de su uso en la resolución de los problemas cotidianos del hombre y de su contexto.

- ✓ Una falta de desarrollo, en docentes y estudiantes, de factores afectivos y actitudinales positivos hacia la matemática y hacia su aprendizaje.

- ✓ Ausencia de la contextualización de contenidos y resolución de problemas como vía primordial para desarrollar el conocimiento matemático.

- ✓ Falta de comprensión de la evaluación como un acompañamiento en el proceso de formación matemática tanto de los docentes como de los estudiantes.

- ✓ Desconocimiento de suficientes experiencias exitosas en el campo de le enseñanza y aprendizaje de la matemática que puedan servir como referencias para el trabajo propio.

- ✓ Dotación insuficiente de recursos bibliográficos y didácticos.

Estas conclusiones nos inducen a orientar una práctica pedagógica centrada en la solución de problemas en educación matemática, no sólo de los profesores de la especialidad o área de matemática sino de todas las áreas curriculares o especialidades involucradas con la formación integral de los estudiantes

Material y métodos

La presente investigación ha sido de tipo aplicada – explicativa (Paragua, 2008, p. 115). Por lo que se explicó los efectos producidos con la aplicación del método de resolución de problemas en el desarrollo de competencias en el área de matemática en los estudiantes del cuarto grado de educación secundaria. De diseño Cuasi-experimental, correlacional-causal, con pretest y postest con un grupo experimental (G1) y un grupo de control (G2); con la descripción y análisis de las relaciones entre la aplicación del método de resolución de problemas y su influencia en el desarrollo de las capacidades del área de matemática en los estudiantes del cuarto grado de educación secundaria.

La población fue los 163 estudiantes del cuarto grado de educación secundaria de la institución educativa industrial Hermilio Valdizán de Huánuco matriculados en el 2016; y la muestra ha sido seleccionada teniendo en cuenta el muestreo no probabilístico intencional (Córdova, 2013, p. 32); constituido por 62 estudiantes del cuarto grado de educación secundaria, secciones A y B; ya que tienen características similares. En la cual, con los estudiantes de educación secundaria del cuarto grado sección B de la Institución Educativa Industrial Hermilio Valdizán-Huánuco, como el grupo experimental; se desarrolló la aplicación del método de resolución de problemas en las sesiones de aprendizaje con los módulos de interaprendizaje desde el mes de abril a julio de 2016. Y se tomó como el grupo de control a los estudiantes del cuarto grado de secundaria sección A, donde se desarrollaron las sesiones de aprendizaje con los materiales y procesos establecidos. Los instrumentos y materiales utilizados fueron: La programación de los contenidos, estrategias de enseñanza y aprendizaje, sesiones de aprendizaje con el cronograma correspondiente al primer y segundo bimestre, teniendo en cuenta los contenidos o campos temáticos por cada capacidad del área de matemática; El pretes y postest como prueba escrita “Aprender haciendo N° 01” de 20 preguntas sobre los contenidos, indicadores y capacidades de las competencias del área de matemática que se aplicó al inicio y al final de la investigación tanto al grupo de control como al grupo experimental; **l**os Módulos de interaprendizaje que son los cuadernillos impresos estructurados teniendo en cuenta las fase del método de resolución de problemas, se utilizaron en el desarrollo de las sesiones de aprendizaje con el grupo experimental; y las sesiones de aprendizaje según estructura sugerida por el Ministerio de Educación, se utilizaron con el grupo de control. En ambos casos teniendo en cuenta los campos temáticos y aprendizajes esperados.

Resultados

Los resultados del Postest, respecto al desarrollo de competencias en el área de matemática tanto del grupo experimental como del grupo de control se ilustra en el siguiente cuadro:

ESCALAS DE CALIFICACIÓN		**GRUPO EXPERIMENTAL**		**GRUPO DE CONTROL**	
		N° de estudiantes	%	N° de estudiantes	%
En inicio	[00; 10]	1	3,2	11	35,5
En proceso	[11; 13]	7	22,6	11	35,5
Logro previsto	[14; 17]	22	71,0	8	25,8
Logro destacado	[18; 20]	1	3,2	1	3,2
TOTAL		31	100	31	100

Fuente: Cuadro N° 15 del informe de investigación.

En el grupo experimental el 71% de estudiantes se ubicaron en la escala de logro previsto con notas de 14 a 17 y el 3,2% alcanzaron el nivel de logro destacado con notas de 18 a 20. En el grupo de control el 71%% de estudiantes se ubican en las escalas en inicio y en proceso con notas entre 0 y 13, sólo el 25,8% alcanzó el nivel de logro previsto con notas de 14 a 17. Dichos resultados muestran que existen diferencias significativas en los logros obtenidos en ambos grupos respecto al desarrollo de las cuatro competencias Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de: Cantidad; regularidad, equivalencia y cambio; forma, movimiento y localización; y gestión de datos e incertidumbre del área de matemática en los estudiantes mediante las capacidades de matematiza situaciones, comunica y representa ideas matemáticas, elabora y usa estrategias, y razona y argumenta generando ideas matemáticas. En la prueba de hipótesis, el valor de Z = 4,35 se ubicó a la derecha de Z = 1,96 que es la zona de rechazo, por lo tanto, se rechaza la hipótesis nula y se acepta la hipótesis alterna. Es decir se demuestra que la aplicación del método de resolución de problemas influye positivamente en el desarrollo de competencias en el área de matemática en los

estudiantes del cuarto grado de educación secundaria de la Institución Educativa Industrial Hermilio Valdizán de Huánuco, 2016.

Discusión

La aplicación del método de resolución de problemas para el desarrollo de competencias del área de matemática en los estudiantes de educación secundaria, según lo planteado por Polya; es funcional con la ejecución de las cuatro fases fundamentales:

a. **Primera Fase: Comprender el problema**. En las sesiones de aprendizaje, esta fase, dado el enunciado de un problema, se desarrolla con los estudiantes que deben responder a las siguientes interrogantes:

   - ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos?

   - ¿Cuál es la condición? ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita?, etc

b. **Segunda Fase: Concebir un plan**. Con los datos, incógnitas o variables identificados en la fase anterior, se diseña un plan o planteamiento del problema en base a las siguientes interrogantes:

   - ¿Puede usted deducir algún elemento útil de los datos? ¿Puede pensar en algunos otros dados apropiados para determinar la incógnita? ¿Puede relacionar mediante operaciones con las variables? ¿Puede cambiar la incógnita o los datos, o ambos si es necesario, de tal forma que la nueva incógnita o variable y los nuevos datos estén relacionados entre sí?

   - ¿Ha empleado todos los datos? ¿Ha empleado toda la condición? ¿Ha esquematizado el planteamiento mediante la interrelación de variables y operaciones, o formalizado con operación de ecuaciones?

c. **Tercera Fase: Ejecución del plan**. consiste en resolver el planteamiento del problema, donde:

   - Al ejecutar su plan de la resolución, que cada estudiante compruebe cada uno de los pasos y responder a la interrogante:

   - ¿Puede usted ver claramente que el paso es correcto? ¿Puede usted demostrarlo?

d. Cuarta Fase: Examinar o verificar la solución obtenida (visión retrospectiva).

En esta fase, los estudiantes una vez que han obtenido la solución y expuesto claramente el razonamiento, tienden a cerrar sus cuadernos y a dedicarse a otra cosa. Al proceder así, omiten una fase importante y muy instructiva del trabajo de verificar el proceso y los resultados.

Reconsiderando la solución, reexaminando el resultado y el camino que los condujo a ella, podrían consolidar sus conocimientos y desarrollar sus aptitudes para resolver problemas. Un profesor debe comprender y hacer comprender a sus alumnos que ningún problema puede considerarse completamente terminado. Siempre queda algo por hacer; mediante un estudio cuidadoso y una cierta concentración, se puede mejorar cualquier solución, y en todo caso, siempre podremos mejorar nuestra comprensión de la solución.

Y se consolida mediante las respuestas a las interrogantes:

- ¿Puede usted verificar el resultado? ¿Puede verificar el razonamiento?
- ¿Puede obtener el resultado en forma diferente? ¿Puede verlo de golpe? ¿Puede usted emplear el resultado o el método en algún otro problema?

Con respecto al desarrollo de competencias: En el área de matemática, el aprendizaje se desarrolla en base a las cuatro competencias: *Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de cantidad; Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de regularidad, equivalencia y cambio; Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de forma, movimiento y localización; y Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de gestión de datos e incertidumbre.* Y cada una de las competencias se desarrollan en función a las cuatro capacidades que son: Matematiza situaciones, comunica y representa ideas matemáticas, elabora y usa estrategias, y razona y argumenta generando ideas matemáticas. Los cuales se desarrollan en base a los campos temáticos (Minedu, 2015, pp. 20-64).

Los resultados muestran que existen diferencias significativas en los logros obtenidos en ambos grupos respecto al desarrollo de las cuatro competencias Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de: Cantidad; regularidad, equivalencia y cambio; forma, movimiento y localización; y gestión de datos e incertidumbre del área de matemática en los estudiantes mediante las capacidades de matematiza situaciones,

comunica y representa ideas matemáticas, elabora y usa estrategias, y razona y argumenta generando ideas matemáticas. Es decir, se demuestra que la aplicación del método de resolución de problemas influye positivamente en el desarrollo de competencias en el área de matemática en los estudiantes del cuarto grado de educación secundaria de la Institución Educativa Industrial Hermilio Valdizán de Huánuco, 2016.

Referencias

Córdova B. I. (2013). *Estadística aplicada a la investigación, Volumen 1*. Edit. San Marcos. Lima Perú.

Navarro M, I. E. y Arias R, M.E. (2007. *Manual de desarrollo del pensamiento lógico.* Edit. Instituto de Pedagogía Popular. Lima Perú.

Ministerio de Educación (2014). *Resultados de la Evaluación Censal de Estudiantes 2014 (ECE 2014).* UMC. Lima Perú.

Polya G. (200). *Cómo plantear y resolver problemas*. Ed. Trillas México.

Paragua M. M. (2008). *Investigación Educativa***.** Edit. JTP. Huánuco-Perú.

MINEDU. (2015). *Rutas de aprendizaje, Versión 2015. ¿Qué y cómo aprenden nuestros estudiantes?*, VII ciclo, área curricular Matemática. Lima Perú.

Volver al índice de autores

1.2.4. Um modelo de atividade com radicais: possibilidade de explorar o raciocínio abdutivo e a criatividade nas aulas de matemática

Ana Karine Dias Caires Brandão
Saddo Ag Almouloud
Pontifícia Universidade Catolica de São Paulo, Brasil

Resumen

Este artigo tem como objetivo discutir uma possibilidade de explorar o raciocínio abdutivo nas aulas de matemática com ênfase na criação de um modelo de atividade interdisciplinar. Para alcançá-lo, modelamos uma atividade envolvendo o objeto matemático, radical, conteúdo referente ao 9o ano do Ensino Fundamental, associando-o com as disciplinas de história, artes, física e geografia usando como tema gerador o número, a razão e o retângulo áureo presentes em obras renascentistas. Analisamos os aspectos abdutivos e criativos que poderão ser explorados tomando como aporte teórico a Semiótica desenvolvida por Charles Sanders Peirce e o pensamento formal de Gilles-Gaston Granger. Como resultado inferimos que embora o conteúdo tenha regras e procedimentos formais é possível o desenvolvimento de atividades que viabilizem significados e sentidos para os estudantes; a possibilidade de criar projetos em que o tema gerador seja um objeto matemático.

Introdução

No desenvolvimento das atividades diárias de uma aula de matemática, observamos a existência predominante do uso do raciocínio dedutivo como alicerce para a construção do seu conhecimento. Entretanto, alguns estudantes nos surpreendem com ideias inovadoras, que tomam percursos diferentes dos que se apresentam em livros didáticos ou praticados pelos professores.

A esses raciocínios, Charles Sanders Peirce denominou-os de abdutivos. São aqueles capazes de gerar "ideias novas" (Peirce, 2005, p.220). Consistem em hipóteses iniciais que aparecem como *insights*, inspirações, que possibilitam acionar aspectos cognitivos e relacioná-los a outras experiências ou aprendizados já adquiridos. Tais hipóteses estão vinculadas a suposições, inferências e são postas a aprovação e validação pelos raciocínios dedutivos ou indutivos.

O raciocínio abdutivo apresenta-se de forma variada, em diversas áreas do conhecimento, por esse motivo compreendemos que todos os indivíduos são capazes de desenvolvê-los. Alguns se apoderam deste raciocínio de forma criativa e expressam com maior visibilidade para os seus pares, outros, exercem em atividades diárias, com pouca repercussão científica ou sem reconhecimento pela comunidade em que está inserido.

O sistema formal que sustenta a matemática, com regras e estruturas rígidas e formalizadas academicamente, pressupõe resultados únicos para seus problemas e a validação pela comunidade de matemáticos. Tal sistema, tem inviabilizado que raciocínios abdutivos sejam desenvolvidos com maior frequência pelos estudantes, pois o ensino da matemática tem priorizado procedimentos mecânicos e aplicações de algoritmos em detrimento da compreensão do significado e do sentido do que estão aprendendo.

O resultado deste ensino revela-se no baixo rendimento dos estudantes nas avaliações em matemática promovidos por exames nacionais e internacionais, como nos tem mostrado os resultados do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA, 2016) em que a média na disciplina está entre as menores dos setenta países pesquisados. Talvez isto reverbere pela falta de compreensão dos estudantes pela linguagem usada na matemática, nos seus símbolos, nas suas representações e nos significados mobilizados, expressando uma angústia e um menosprezo pelo componente curricular.

Tal aversão caracteriza pelas particularidades dos objetos matemáticos, que não se apresentam visivelmente aos olhos humanos, a não ser por suas representações. São signos que se relacionam ao objeto com o objetivo de serem interpretados. No entanto, a interpretação desses signos (representações) envolve estruturas formais que requerem do estudante uma abstração e uma atenção interligada a outros conteúdos, a outras experiências para a produção de significados.

Forma-se uma rede de estruturas, significados, objetos, abstrações, raciocínios que vão se interligando para a construção do conhecimento matemático e requer do estudante a interpretação de todas essas variáveis. Nessa perspectiva, a criatividade e o raciocínio abdutivo são postos em segundo plano, visto que as exigências do pensamento formal revelam como prioridades para o conhecimento matemático.

Entretanto, as mudanças sociais, tecnológicas, econômicas, ambientais pelas quais o mundo tem vivido proporciona novas demandas ao mercado de trabalho, exigindo o

desenvolvimento de pessoas mais criativas, autônomas e capazes de tomar decisões sábias e rápidas. A adequação da escola faz-se necessária, para atender ao novo perfil de trabalhadores e as exigências do mercado.

Tais transformações não ocorrem da mesma forma na escola, o processo formativo é lento e respeita o tempo de aprendizagem do estudante, contrapondo-se a rapidez das mudanças do mercado, das informações e do mundo globalizado. Tal processo exige-se que os professores vislumbrem tais perspectivas e sejam formados para atender esse perfil, embora os que já estão em exercício tenham tido uma formação nos ditames do mercado industrial, tecnicista. Para se adaptarem eles promovem ações pedagógicas individuais, pois estão conscientes das mudanças, mas não sabem como promover sozinhos outras metodologias de ensino e aprendizagem e seguem um percurso de tentativas experimentais, excluindo aquelas que não alcançaram êxito.

O exercício profissional desses professores tem particularidades associada à cultura da região, aos problemas sociais, a uma carga horária de trabalho extenuante que dificulta uma abordagem pedagógica pautada em um desenvolvimento de atividades, ou metodologias que se adaptem a contextos diversos e proporcione o raciocínio abdutivo e a criatividade. Por isso, nesse artigo pretendemos discutir as possibilidades de explorar o raciocínio abdutivo com ênfase na criatividade. Com este intuito, modelamos uma atividade sobre o conteúdo matemático: radical. Tal escolha se justifica pelo objeto apresentar dificuldades de aplicações em contextos que não predomina o desenvolvimento de algoritmos e por preservar regras e estruturas formais.

O desenvolvimento daquela atividade nos motiva a procurar respostas para a pergunta diretriz: Como um modelo de atividade envolvendo o conteúdo matemático, radical, pode suscitar o raciocínio abdutivo e promover a criatividade no processo de ensino e aprendizagem, sem perder os aspectos formais do objeto?

Os pressupostos teóricos que fundamentam o raciocínio abdutivo e o pensamento formal serão norteadores para compreendermos como eles podem caminhar juntos sem que distanciemos de nenhum deles.

Abdução e o Pensamento Formal

Neste artigo pretendemos articular os aspectos teóricos desenvolvidos por Peirce (1839-1914) e Gilles-Gaston Granger (1920-2016) no que concerne ao raciocínio abdutivo e ao pensamento formal. Embora tenham vivido em épocas diferentes, existem pontos de convergências e divergências entre os estudos desenvolvidos por esses teóricos, mas que não inviabilizam levantarmos alguns pontos de interseção.

A abdução para Peirce, consistiu em uma pedra fundamental para desenvolver um método anticartesiano, audacioso para a época e contrário as concepções vigentes, visto que o método cartesiano estava no ápice das discussões científicas.

Peirce ao criar a Lógica ou também chamada por ele de Semiótica, construiu sua teoria alicerçada em três grandes frentes: A Gramática Especulativa, a Metodêutica e a Lógica Crítica. Nessa última, o autor reconhece existir "três tipos radicalmente diferentes de argumentos" (Peirce, 2005, p.207), ou "Esses três tipos de raciocínio são a Abdução, Indução e Dedução (Peirce,2005, p.207).

Para Peirce (2005) a Abdução "consiste em estudar os fatos e projetar uma teoria para explica-los" (p. 207). Apenas uma projeção, sem garantias de que esta teoria esteja correta, apenas lança na mente do interpretante uma inferência, sem julgamento, ou validação, deixando ao domínio da indução e da dedução a incumbência da veracidade ou não de tal conjectura.

Entretanto, no campo da matemática o raciocínio utilizado é essencialmente dedutivo, a verificação de hipóteses, teoremas, permeia toda a construção do conhecimento matemático. Nesse sentido, Peirce (2005) afirma que "A dedução é o único raciocínio necessário. É o raciocínio da Matemática". Para ele a dedução necessária é aquela que a partir de premissas, ou hipóteses verdadeiras o interpretante consegue chegar a uma conclusão verdadeira. (p.207)

Em outra passagem Peirce (2005) afirma que "todo raciocínio necessário, sem exceção, é diagramático, isto é, construímos um ícone do nosso estado hipotético e passamos a observá-lo". (p.216) Os ícones são essenciais para a matemática, pois seus objetos são criações humanas e só podemos ter acesso a eles pelos signos, ou seja, por suas representações, que preservam semelhanças com o objeto.

No entanto, os objetos matemáticos pertencem a um sistema formal, munido de regras e leis convencionadas pelos homens, elas são fixadas por procedimentos que tem sentido e seguem uma lógica matemática. As regras são recorrentes, ou seja, para casos semelhantes a maneira de aplica-las será padronizada. Nesse sentido, Granger (2013) explica que "nos sistemas formais, todas as ocorrências de um mesmo signo são identificáveis com esse signo reduzido a seu significante, que é uma abstração do vivenciado presente em cada ocorrência". (p.133)

No ambiente da sala de aula, o sistema formal encontra uma barreira: a subjetividade inerente a cada ser humano que interpreta cada regra de acordo com as experiências vividas, ou articulam mentalmente de forma incoerente com as regras matemáticas. É nesse sentido que o professor desempenha um papel fundamental para assegurar que a regra foi apreendida e que os procedimentos estruturais fizeram sentido para o estudante. Concordamos com Silveira (2008) quando afirma que "a regra terá sentido se ela for interpretada de acordo com as exigências conceituais da matemática e, para que isso ocorra, é necessário que o professor e o aluno entrem no mesmo universo discursivo". (p. 112)

É na sala de aula, que o discurso deve fomentar um movimento criativo em que a regra não perde seu caráter fixo, entretanto, pode incitar processos de comprovação abdutivos. Para Silveira (2008):

> O aluno interpreta a regra de acordo com as suas sensações subjetivas e a lógica obedece a leis que pretendem ser universais. Porém, é na demonstração, ou seja, no nascimento da prova que surge a oportunidade de criação matemática. O professor precisa conhecer como o aluno lida com as regras matemáticas quando cria a sua demonstração e é por meio do diálogo que professor e aluno participam do mesmo universo discursivo e entram em entendimento. (pp.97-98)

Elaborar atividades que priorizem a criação matemática e vincule ao contexto social que o estudante está inserido tem sido um grande desafio para os estudiosos. Por isso, nesse texto, propomos um modelo de atividade para o ensino do objeto matemático: radicais, em que valorize os procedimentos criativos dos estudantes na solução da atividade.

Uma Atividade com Radicais

Radical é um dos objetos matemáticos que é ensinado no 9º ano do Ensino Fundamental, presente nos livros didáticos adotados nas escolas brasileiras, consiste em um conteúdo rico em propriedades abstratas e regras que estruturam o objeto.

Operações com radicais, racionalização de denominadores são, entre outras, regras e procedimentos que envolvem o objeto causam grandes equívocos a sua aprendizagem, bem como, a presença de semelhanças entre as estruturas e regras matemática dos radicais comprometem a apreensão do sentido da aplicação delas. Esses equívocos de interpretação do aprendiz, são muitas vezes causados por uma lógica que não condiz com as regras da matemática. Como podemos constatar em Silveira (2008) quando menciona que a regra que o aluno cria tem uma lógica própria, mas nem sempre não é coerente com a regra matemática e cita como exemplo a soma $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$.

O nosso intuito é desenvolver uma atividade interdisciplinar que utilize o objeto matemático, radicais, implicitamente ou explicitamente. Para isso, foram envolvidas cinco disciplinas que compõe o projeto intitulado: Um olhar radical sobre algumas obras renascentistas. Elaboramos a atividade apresentada na Figura 1 a seguir, com o objetivo de desenvolver um modelo de atividade interdisciplinar envolvendo o objeto matemático, radicais, com a produção de sentido e significado de sua aplicabilidade para o estudante, valorizando os resultados criativos apresentados na solução.

Figura 1 - Modelo do projeto interdisciplinar

PROJETO: **UM OLHAR RADICAL SOBRE ALGUMAS OBRAS RENASCENTISTA**

Disciplinas envolvidas: Matemática, Artes, História, Física e Geografia.

Público Alvo: estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental

Objetivo do projeto interdisciplinar: Desenvolver uma releitura de algumas das obras renascentistas integrando diferentes ações sistemáticas entre as disciplinas.

ATIVIDADE DA DISCIPLINA: **HISTÓRIA**

Metodologia: Após a exposição realizada pelo professor sobre o movimento Renascentista que floresceu na Europa entre os séculos XIV e XVI e a ascensão da burguesia, por intermédio da prática do mecenato, o docente propõe aos estudantes que eles reescrevam criativamente esse contexto histórico. Para isso, eles poderão usar paródia, raps, poesia, história em quadrinhos, "memes", charges, entre outras formas para retratá-lo.

ATIVIDADE DA DISCIPLINA: **ARTES**

Metodologia: A professora da disciplina entrega a cada estudante uma cópia, em papel ofício A4, da pintura "A Monalisa" do artista Leonardo da Vinci. Explica como ela foi construída, destacando a presença dos retângulos áureos, a composição da tinta utilizada e a simetria dos seus traços.

Propõe aos estudantes que a partir da interpretação subjetiva, única e criativa eles façam uma releitura acrescentando ou substituindo elementos da obra original.

ATIVIDADE DA DISCIPLINA: **MATEMÁTICA**

Material necessário: Data-show, um computador, calculadoras, régua, lápis e papel.

Metodologia: Após assistirem o vídeo "Toda a matemática", disponível em http://youtu.be/mOT&BvC4aFw que proporciona aos estudantes o conhecimento do número áureo ou de ouro, presente nos retângulos áureos das principais obras de artes do Renascimento e das obras arquitetônicas medievais, e o valor do número phi, que é dado por $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ = 1,618033988749895.... o aluno deve responder as seguintes perguntas:

a) O número ϕ pertence a qual conjunto numérico?

b) Considere que $\sqrt{1} = 1$, verifique se o número de ouro poderia ser calculado assim: $\phi = \frac{\sqrt{1}+\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

c) Você encontrou o mesmo resultado? Em caso negativo, elabore uma justificativa porque isso não ocorreu?

d) O retângulo áureo é aquele cujos lados estão na razão de 1 para ϕ. Como ficaria essa razão? Simplifique usando as propriedades de fração.

e) Verifique que a igualdade é verdadeira: $\frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

f). Na letra d porque os dois números são iguais? Investigue na internet uma justificativa para explicar como foi encontrado o número após a igualdade.

g) Utilize a régua e seu caderno de matérias para efetuar a seguinte proporção: *O lado maior do seu caderno dividido pelo lado menor é igual à divisão do lado menor pela diferença do lado maior pelo lado menor*. A partir do resultado encontrado, responda: a) A igualdade é verdadeira? Existe alguma relação com o número phi?

h) A atividade de artes solicitou que você fizesse uma releitura de algumas obras de artes renascentistas, na sua opinião, ao acrescentar ou substituir elementos na obra alterou a proporção áurea? Justifique.

i) Crie uma situação matemática envolvendo o número phi (ϕ), os mecenas e as obras de artes renascentistas.

Fonte: Elaborado pelos autores

ATIVIDADE DA DISCIPLINA: **FÍSICA**

Material necessário: Calculadora, lápis e papel.

Objetivo: Introduzir os conceitos de tempo de queda e de distância relacionando-os ao número de ouro.

Metodologia: Após explicar os conceitos e as medidas acerca do tempo e da distância e as transformações necessárias, o professor propõe a solução da seguinte atividade:

Um turista visitando a Catedral de Notre Dame, na França, deixou cair da janela do último andar seu celular, que levou um determinado tempo para atingir o solo. Esse tempo é dado pela relação t = $\sqrt{\frac{h}{4,9}}$ t representa o tempo, em segundos, e h a altura, em metro. Se a altura da Catedral é 69 metros de altura até as torres, determine:

a) O tempo que o celular leva para atingir o solo.

b) Se a largura da catedral é igual a 41 metros, determine a razão entre a sua largura e sua altura.

c) Você consegue identificar alguma relação de semelhança da razão encontrada na letra b.

d) Qual seria o tempo de queda se um objeto caísse de uma altura de 49m?

e) Considere a resposta encontrada na letra d, como T, qual o valor de ϕT?

ATIVIDADE DA DISCIPLINA: **GEOGRAFIA**

Objetivo: Mostrar que o número "phi" pode se apresentar nas alterações realizadas pelos homens ao meio ambiente causando o desequilíbrio das espécies.

Metodologia: O professor da disciplina faz uma palestra relatando as consequências das alterações feitas pelos homens ao meio ambiente e tem afetado o equilíbrio das espécies e do Planeta. Como exemplo, ele apresenta aos estudantes o artigo "Extinção de abelhas afeta cadeia alimentar", disponível no site otempo.com.br publicado em doze de março de 2017 da autoria de Litza Mattos.

Em seguida, relata a existência da proporção 1,618..., entre o número de abelhas fêmeas em comparação com o número de abelhas macho em uma colmeia. Pergunte aos estudantes se eles sabem o que o número representa. Em seguida, propõe aos estudantes que crie uma situação problemática na cidade de Vitória da Conquista em que um desequilíbrio ambiental modifica a quantidade das abelhas fêmeas e machos.

Fonte: Elaborado pelos autores

A atividade descrita acima foi modelada para o objeto matemático, radicais, e buscou trazer uma interlocução entre disciplinas preservando o tema gerador, o número, a razão e o retângulo áureo.

A análise da atividade será pautada nos fundamentos teóricos propostos neste estudo e compreende um recorte de uma pesquisa maior em desenvolvimento para o doutoramento em Educação Matemática da primeira autora, sob a orientação do segundo autor.

Analisando a Atividade com Radicais

Muito se tem discutido sobre as finalidades da Educação e as transformações necessárias por quais ela deve passar para a formação de pessoas mais criativas, autônomas e solidárias com o próximo e com o planeta Terra. Entretanto, o espaço da sala de aula não tem ultrapassado as barreiras da fragmentação do conhecimento em disciplinas, com conteúdos "ilhados" em áreas específicas, sem conexão entre elas.

A proposta de construir modelos de projetos que preserve o potencial criativo, extrapole as fronteiras das disciplinas, promova uma visão holística do conhecimento integrando possibilidades de inclusões de aspectos subjetivos que não são considerados no cenário educacional vigente, tem sido o desejo dos pesquisadores que buscam promover um ensino e uma aprendizagem diferenciada.

Na tentativa de projetar um modelo de atividade que associe conhecimentos diversos em torno de um tema gerador foi o objetivo desse estudo. O objeto matemático escolhido, radicais, se justifica pela especificidade de suas propriedades, que causam conflitos epistemológicos para a compreensão de suas regras formais, em que há uma preponderância da aplicação de algoritmos e, por isso, inferimos que não apresentam significado e sentido para os estudantes.

O desenvolvimento do modelo da atividade possibilitou que as disciplinas fossem articuladas para manter a unidade do uso do objeto radical em diferentes situações. Constituiu de uma ideia original, em que os autores usaram o raciocínio abdutivo para: interligar conceitos matemáticos com outras disciplinas; elaborar um modelo de atividade diferente daqueles que são encontrados nos livros didáticos; caracterizar a aplicação das regras e procedimentos envolvidos com o objeto radical, sem com isso perder ou minimizar a importância deles para a sua aprendizagem.

Observa-se também que no modelo proposto, a atividade elaborada para a matemática considerou a importância que os conceitos envolvidos no conteúdo radicais têm para as outras áreas de conhecimento, como também, para o campo interno da Matemática. Nesse sentido é que não perdemos o foco em relação a aplicação de algumas regras e conceitos do objeto matemático escolhido, tais como:

a) Na questão a o estudante precisa identificar qual o conjunto que contém o número de ouro (ϕ);

b) Na questão b surge a necessidade da aplicação da operação de adição com radicais;

c) Na questão d é solicitada o inverso do número ϕ, que envolve procedimentos algoritmos relacionados a racionalização do denominador

Estas regras são fixas e formais, ou seja, foram convencionadas no universo da matemática, pois compreendem uma lei geral, denominada por Peirce de símbolos. Na matemática eles estão dispostos por elementos ordenados que interagem entre si formando um sistema, ao qual Granger (2013) denomina-o de sistema simbólico formal. (p.132) Para o autor o sistema simbólico é formal quando é composto de regras supostamente estáveis e não apresentam variedade sintática na sua composição.

O signo ϕ ao ser relacionado como o número de ouro, pelo homem, adquire o caráter de uma lei que associa o signo ao objeto (número), tal propriedade constitui uma regra matemática que se torna um símbolo, o símbolo ϕ (phi). Seu reconhecimento pelos pares, os matemáticos, faz com que o número de ouro seja legitimado e universalizado passando a ser um dos componentes do sistema simbólico formal.

Nas questões c e f aparece a necessidade de que o estudante generalize sua solução a partir dos procedimentos matemáticos realizados nas questões b e "e". É nesse momento que a mente utiliza o raciocínio abdutivo para dar origem a uma ideia nova, um *insight*, com o objetivo de proporcionar um pensamento geral, uma regra matemática produzida pelo raciocínio dedutivo.

Nas questões h e i a presença da criatividade se apresenta de forma mais expressiva. Na questão h o estudante terá que levantar conjecturas, hipóteses para justificar a sua resposta, nesse momento terá que fazer o uso do raciocínio abdutivo. O mesmo acontecerá ao responder à questão i, em que o uso da criatividade se apresenta ao elaborar o enunciado de um problema possibilitando-o a externar o significado que ele atribuiu ao objeto radical e as regras formais que o compõe.

No que tange ao desenvolvimento do raciocínio abdutivo para potencializar a criatividade matemática na solução do modelo proposto, inferimos que:

- As perguntas envolvidas nas atividades por disciplina possibilitam: que os estudantes criem conjecturas e soluções; verifique a veracidade dos resultados; realizem pesquisas em diferentes meios; obtenha o acesso a cultura de outros países e da comunidade em seu entorno.

- O tema gerador da atividade se concentrou em um objeto matemático, e a partir dele as outras áreas do conhecimento foram se ajustando.

- Radicais é um conteúdo formado essencialmente de regras formais e algoritmos, entretanto, o trabalho com o projeto abriu espaços para que tais regras fossem aplicadas e interpretadas dentro de um contexto mais amplo.

- As questões b e f da atividade elaborada induzem o estudante a conjecturar regras lógicas na sua interpretação do conceito, no entanto, elas podem ou não, serem aceitas nos cânones científicos da matemática.

- Para as questões *e* e g da atividade, constatamos que existem os processos de comparação, demonstração da igualdade e verificação da veracidade das afirmações.

- O processo de racionalização, que se apresenta nos livros didáticos de forma algorítmica e sem explicação do seu significado, na atividade adquire um sentido quando aplicados nos retângulos áureos.

- As letras g e h são perguntas "pontes", pois ligam as atividades desenvolvidas nas disciplinas de História e Artes e são aquelas que permitem revelar como os conceitos acerca do conteúdo radical foram construídos pelo estudante.

Verificamos que o modelo de atividade tem potencial para que os estudantes: produzam sentido e significado do objeto matemático; desenvolvam a criatividade; formulem ideias novas, aprendam a interpretar enunciados, levantem conjecturas, avaliem suas respostas, reconheçam a importância do conteúdo para outras áreas de estudo, valorizem as regras formais, identifiquem quais regras e em que momento elas são aplicadas.

Ao delimitarmos o potencial do modelo criado, os aspectos do raciocínio abdutivo de Charles Sanders Peirce e do pensamento formal de Gilles-Gaston Granger foram sendo identificados como complementares na elaboração do modelo de atividade proposto. Constatamos que o caminho percorrido pela mente para a compreensão do objeto matemático, radicais, começa pelo uso do raciocínio abdutivo ao criar ideias novas e para serem validadas são mobilizados elementos do sistema simbólico formal (regras, símbolos, operações, estruturas, entre outras.) para o desenvolvimento do raciocínio dedutivo que constituem o pensamento matemático.

Outras Perspectivas para o Estudo

No texto apresentamos alguns aspectos dos estudos sobre o raciocínio abdutivo desenvolvido por Charles Sanders Peirce e o pensamento formal de Gilles-Gaston Granger. Para o seu desenvolvimento, elaboramos um modelo de projeto com atividades que proporcionam um olhar interdisciplinar envolvendo cinco das disciplinas que compõe o quadro de componentes curriculares estabelecidas para o 9º ano do Ensino Fundamental.

No que concerne a resposta da pergunta: **Como um modelo de atividade envolvendo o conteúdo matemático radical, pode suscitar o raciocínio abdutivo e promover a criatividade no processo de ensino e aprendizagem, sem perder os aspectos formais do objeto?** Constatamos que o modelo prioriza a construção do conceito pelo estudante; abri espaços de diálogo entre professores, entre os estudantes e entre professor e estudantes; proporciona espaços para que o estudante explicite como ele formou o conceito; favorece ao docente a percepção de como o estudante está formando o conceito; promove momentos em que o docente pode reorientar os estudantes, caso verifique equívocos na apreensão das regras matemáticas; estimula as demonstrações e justificativas para as respostas das perguntas, pois são boas estratégias para o desenvolvimento do raciocínio abdutivo e da criatividade; apresenta um tema gerador que promove a comunicação, socialização, investigação, estudo, parceria entre os envolvidos no projeto interdisciplinar; possibilita a avaliação dos limites do tema gerador, pois ele não irá contemplar todas as regras matemáticas referentes ao objeto em estudo; identifica que o tema gerador tem a função de despertar uma visão holística do objeto e os significados que ele apresenta nas diferentes áreas do conhecimento e no contexto da vida.

Para estudos posteriores, sugerimos que a atividade seja aplicada em escolas do Ensino Básico com a intenção de verificar quais as contribuições que o modelo da atividade criado proporciona para a aprendizagem dos estudantes.

Referências

Granger, G.G. (2013). *Filosofia, linguagem, ciência*. Tradução Ivo Storniolo e José Luiz Cazarotto – Aparecida, SP: Editora Ideias & Letras – (Coleção Filosofia e História da Ciência).

Peirce, C.S. **(**2005). *Semiótica***.** (J.T. C. Neto, Trad.) - São Paulo: Perspectiva. – (Estudos; 46/ dirigida por J. Guinsburg).

Silveira, M.R.A. (2008). Aplicação e interpretação de regras matemáticas. *Educação Matemática e Pesquisa*, São Paulo, 10 (1), pp. 93-113. Recuperado de https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/viewFile/1645/1061.

Volver al índice de autores

1.2.5. Modelo metodológico y didáctico para el desarrollo del razonamiento matemático

Flaviano Armando Zenteno Ruiz
Armando Isaías Carhuachin Marcelo
Tito Armando Rivera Espinoza
Guillermo Gamarra Astuhuaman
Universidad Nacional Daniel Alcides Carrión, Pasco, Perú

Resumen

La investigación concluyente es que los efectos que produce el modelo metodológico y didáctico en el desarrollo del razonamiento matemático; el problema general de investigación fue: ¿Cómo influye el modelo metodológico y didáctico para el desarrollo del razonamiento matemático en los estudiantes del Laboratorio de Investigación e Innovación Pedagógica de la Universidad Nacional Daniel Alcides Carrión de Pasco - 2016?, cuyos soportes teóricos fueron: Pólya (1975), Corvalán (1995), Perelman (1978), y Zenteno (2005), sobre enseñanza aprendizaje de matemática y habilidades y estrategias docentes; la metodología de investigación considero el diseño pre experimental pre test y pos tes, con grupos establecidos, los instrumentos de investigación fueron validados mediante el juicio de expertos y su confiabilidad con el Alfa de Cronbach; que dieron conclusiones como: la propuesta es viable porque el grupo experimental mostro media aritmética de 61,03 y coeficiente de variación de 0.28, usando el estadístico Z se obtuvo 8, 559 que permite validar la hipótesis de investigación establecida y desde luego hacer viable la propuesta de que el modelo metodológico y didáctico propuesto influye significativamente en el desarrollo del razonamiento matemático, destacando la práctica constante de la autonomía, autodirección y autorregulación, toda vez que el Laboratorio de la UNDAC. de Pasco; es una institución educativa de Educación Básica Regular.

Planteamiento del problema

Uno de los grandes problemas que enfrentan los estudiantes de la educación básica en la actualidad es el uso no adecuado de los conocimientos matemáticos en la resolución de problemas para el desarrollo del razonamiento matemático, asunto que se encuentra estático en estos momentos, la clave para obtener buenos resultados en ciertos exámenes tanto nacionales (ECE), como internacionales (PISA).

Se presente el problema general de investigación:

¿Cómo influye el modelo metodológico y didáctico para el desarrollo del razonamiento matemático en los estudiantes del Laboratorio de Investigación e Innovación Pedagógica de la Universidad Nacional Daniel Alcides Carrión de Pasco - 2016?

Soportes teóricos

Se han revisado trabajos de investigación como: PERELMAN (1978), George Pólya (1950), Corvalán (1995), Eduardo Mancera (2000), Armando Zenteno Ruiz (2005), Carbonero, Román, Martín-Antón y Reoyo (2009) entre otros. Esto es:

Considerando por ejemplo el aporte de Carbonero, Miguel A.; Román, José M.ª; Martín-Antón, Luis J.; Reoyo, Natalia (2009), respecto a las habilidades de los docentes se tiene:

Las "habilidades docentes Motivadoras", con cinco dimensiones: 1. Habilidades de instrucción: son las actividades, las experiencias y los conocimientos disciplinares, estrategias de instrucción, organización y planificación de las sesiones de clase y las tareas, cuidado en las explicaciones y uso de recursos materiales para mediar en un mejor aprendizaje del alumnado. 2. Control del alumnado: Grado de control disciplinario y normas de comportamiento; nivel de libertad de movimiento; conversación y participación en la clase. Referidas por lo tanto al control e implicación del alumnado y con el alumnado, centrándose en la supervisión y control del aprendizaje. 3. Evaluación: Procedimientos de valoración: tipo y número de evaluaciones del trabajo del alumno, criterios, uso de la evaluación como guía para la instrucción. Uso de sistemas de evaluación encaminados hacia la adecuada retroalimentación del aprendizaje. 4. Motivación: Técnicas y procedimientos de motivación, encargados de fomentar el interés a través de refuerzos extrínsecos y el desarrollo y fomento de refuerzos intrínsecos. Maneras de crear la motivación entre los alumnos en el aula. 5. Habilidades Sociales: comportamientos y disposiciones específicas para el establecimiento de relaciones sociales efectivas. Haciendo referencia a las relaciones entre el profesor y el alumnado, con base en una adecuada interacción o mediación social. P (8).

También considerando el aporte de Pólya (1975), se concreta que para resolver un problema en matemática hay que pasar por cuatro etapas fundamentales como son: La comprensión del problema que consiste en reconocer la incógnita, en saber que debe darse como

respuesta, luego sigue la búsqueda de estrategias para abordar el problema y darle solución, aquí se pone de manifiesto la experiencia y habilidad del estudiante para generar ideas, para luego continuar con la aplicación de estas estrategias identificadas de una manera adecuada para dar solución al problema; para que posteriormente en la última etapa realice una revisión de todo el proceso seguido y valide sus procedimientos y los sistematice.

Por otro lado también se considera la experiencia desarrollada por Zenteno (2005), que para resolver problemas hay que seguir ocho procedimientos como: Primero parte de la formulación de problemas, luego se estima las posibles soluciones en forma individual o grupal, posteriormente se socializa estas posibles soluciones, para que las de consenso sean aplicados para resolver el problema o problemas formulados, con esas soluciones se elige la temática a tratar, se desarrollan estos temas y nuevamente se vuelve a formular nuevos problemas para seguir los procedimientos aplicados anteriormente.

Metodología y resultados

Hipótesis: Si se aplica el modelo metodológico y didáctico: autonomía, autodirección y autorregulación, entonces se desarrolla significativamente el razonamiento matemático en los estudiantes del Laboratorio de Investigación e Innovación Pedagógica de la Universidad Nacional Daniel Alcides Carrión de Pasco – 2016.

Diseño de investigación:

Esta investigación toma el diseño pre experimental con pre test y post test cuyo modelo esquemático es:

$$GE: \quad O_1 \text{ ---------- } x \text{ ---------- } O_2$$

Dónde:

GE : Grupo experimental

O_1 : Observación inicial de la variable dependiente o pre test, desarrolla significativamente el razonamiento matemático.

X : Variable independiente o experimental, modelo metodológico y didáctico.

O_2 : Observación posterior de la variable dependiente o post test, desarrollo del razonamiento matemático.

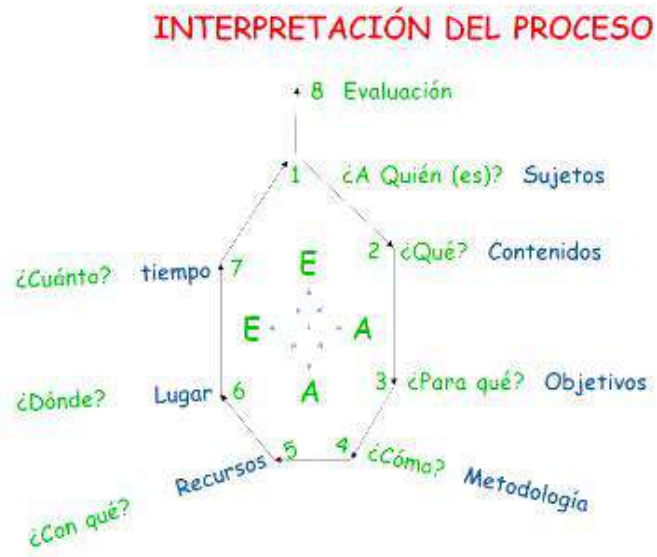
Presentación e interpretación del postest.

Luego del cumplimiento del cronograma según las actividades programadas en las sesiones de aprendizaje por medio del Modelo Metodológico y Didáctico para el Desarrollo del Razonamiento Matemático en Estudiantes del Laboratorio de Investigación e Innovación Pedagógica – UNDAC – Pasco – 2016: autonomía, autodirección, autorregulación, observación y análisis; llegando a la experimentación con la calidez y empatía como la expectativas positivas en la resolución de problemas; para comprobar ello se aplica el anexo 3, siendo los resultados estadísticos lo siguiente:

Cuadro N° 01		
Estadísticos en la Prueba de salida		
N	Válido	58
	Perdidos	0
Media aritmética		61,03
Mediana		70,00
Moda		70
Desviación estándar		17,033
Varianza		290,139
Coeficiente de variación		0,28
Rango		70
Mínimo		20
Máximo		90

Fuente: Posttes

Según el cuadro precedente observamos que la media aritmética es diferente a la mediana e igual a la moda, luego la distribución no es normal, se observa a comparación del pre test en todos los estadísticos una variabilidad aumentativa por lo que nos induce que el modelo metodológico y didáctico, en el desarrollo del razonamiento matemático; para los estudiantes del caso surten efecto con una planificación y una secuencia didáctica por medio de sesiones y las lecciones pertinentes con las guías, motivación, procedimientos y análisis psicométrico; siendo estas los fundamentos teóricos y prácticos del modelo metodológico y didáctico para el desarrollo del razonamiento matemático en los estudiantes en tratamiento; siguiendo el modelo de ruta propuesto la interpretación del proceso y esquema para la sesión de aprendizaje.



Estos resultados se usaron para la prueba de hipótesis respectiva, esto es:

Si se aplica el modelo metodológico y didáctico: autonomía, autodirección y autorregulación, entonces se mejora significativamente el desarrollo del razonamiento matemático en los estudiantes del Laboratorio de Investigación e Innovación Pedagógica de la Universidad Nacional Daniel Alcides Carrión de Pasco – 2016.

$$\mu_1 \neq \mu_2$$

Para este caso está seleccionado el grupo, determinando las medias aritméticas del pre y pos test, según los datos obtenidos se presenta en el siguiente cuadro:

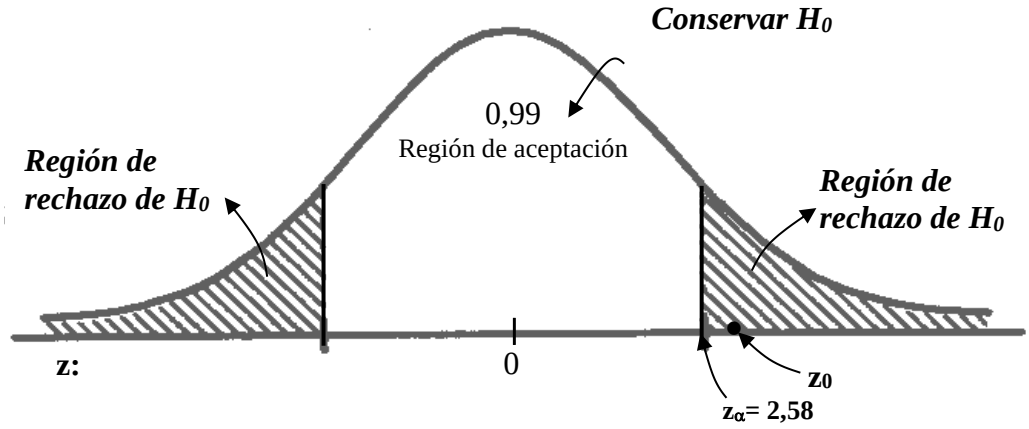
Cuadro N° 02: Medidas comparativas del pre y pos test

MEDIDAS / GRUPOS	$\bar{X}$	V	S	C_V
Pre test	35,00	246,491	15,700	0,44
Pos test	61,03	290,139	17,033	0,28

Fuente: elaborado por el equipo de investigación

Segundo:

Al elegir el nivel de significancia de $\alpha = 0{,}01_{2\ colas}$ ó 1% dos colas o bilateral, esto quiere decir que observamos una probabilidad de 0,01 ó 1% de rechazar la hipótesis nula H_o y una región de aceptación al 0,99; y la respectiva curva.



Tercero:

Para luego por fórmula hallaremos Z_o; trabajo que se realiza por ser una investigación con un grupo, así:

$$Z_0 = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{(\frac{V_1}{n_1} + \frac{V_2}{n_2})^{1/2}}$$

Donde:

Z_0: valor del estadístico

$\overline{X}_1$: media del pre test

$\overline{X}_2$: media del pos test

V_1: varianza del pre test

V_2: varianza del pos test

n_1: muestra

n_2: muestra

En esta fórmula y con los datos hallamos el valor de Z_0

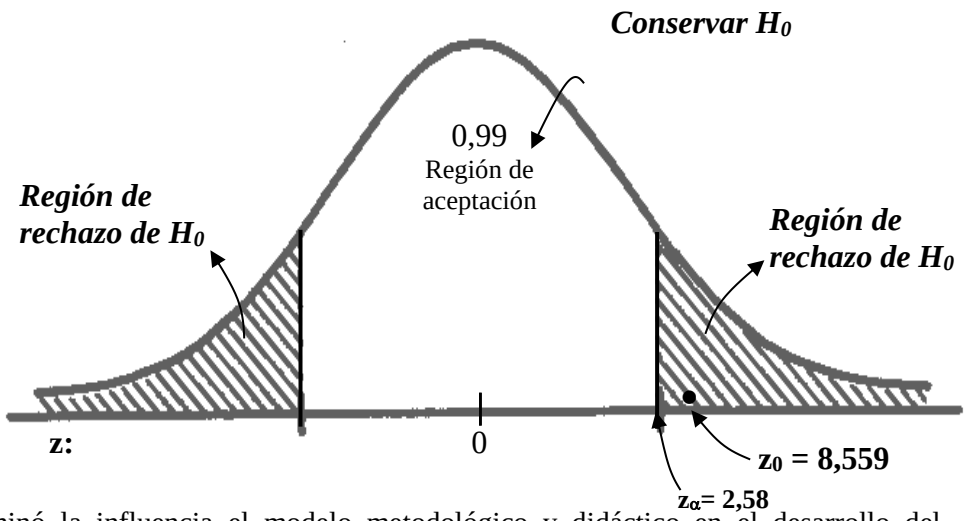
Datos estadísticos:

$\overline{X}_1$: 35,00	$\overline{X}_2$: 61,03
V_1: 246,491	V_2: 290,139
n_1: 58	n_2: 58

Reemplazando en la formula se tiene:

Z_0 = I -8,559 I

Luego la decisión es:



Cuarto:

Tomand

rechaza

Conclus

z:

Se determinó la influencia el modelo metodológico y didáctico en el desarrollo del razonamiento matemático en los estudiantes del Laboratorio de Investigación e Innovación Pedagógica de la Universidad Nacional Daniel Alcides Carrión de Pasco – 2016; lo sustenta la prueba de hipótesis con el estadístico Z, que hace viable la propuesta.

Los procedimientos: de la autonomía, autodirección y autorregulación *son destacados en la propuesta* modelo metodológico y didáctico en el desarrollo del razonamiento matemático en los estudiantes del Laboratorio de Investigación e Innovación Pedagógica; así lo evidencian los resultados estadísticos obtenidos en el grupo experimental con el pos tes.

Referencias

Andrade, R. y Sánchez, L. (2010). *Habilidades intelectuales. Una guía pata su potenciación.* México: Alfaomega.

Ávila, R (1990). *Introducción a la Investigación*. Lima: Ediciones CONCYTEC.

Barriga C. (2004). *Estudios de la Realidad Socio-Cultural*. Texto. Facultad de Educación-UNMSM Perú: Lima

Bernal, C. (2000). *Metodología de la Investigación para Administración* y Economía. Colombia: Pearson, 111 – 113.

Cantoral, R. y Farfan, R. (2008). *Desarrollo del pensamiento matemático.* México: Trillas.

Carbonero, Miguel A.; Román, José M.ª; Martín-Antón, Luis J.; Reoyo, Natalia (2009). Efecto del programa de habilidades docentes motivadoras en el profesorado de secundaria, Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea. España.

Cenich, G. y Santos G. (2005). *"Propuesta de aprendizaje basado en proyectos y trabajo colaborativo: experiencia de un curso en línea*". Recuperado de: http://redie.uabc.mx/vol7no2/contenido-cenich.html. Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires

Corporación Andina De Fomento (2008). Serie Desarrollo del Pensamiento Matemático No. 20: La Función Matemática. Venezuela.

Corvalán, F. (1995). *La matemática aplicada a la vida cotidiana*. Barcelona: Graó, de Serveis Pedagógicos.

G. P. Box, Georg, Hunter, W. y Otros. (1989). *Estadística para investigadores*. Barcelona: Editorial Revesté S.A.

Gamarra Astuhuaman, G. y otros. (2015). Estadística e Investigación con aplicaciones de SPSS. Cerro de Pasco, Perú; Editorial San Marcos.

Hernández, Fernández C. y Baptista P. (2006). *Metodología de la Investigación*. Cuarta Edición México: McGraw-Hill / Interamericana Editores S. A. de C. V.

Holt, M. (1986). *Matemática Recreativa 2.* España: Martínez Roca, S. A.

Kraitchik, M. (1946). *Matemáticas Recreativas.* Buenos Aires: El Ateneo.

Kerlinger, F. y Howardb, L. (2001). *Investigación del Comportamiento*. México: McGraw-Hill Interamericana. Editores S. A. de C. V.

Kilpatrick J., Gómez P., y RICO L. (1998) *Educación Matemática*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericana, S. A. de CV.

Gardner, M. (1996). *Los acertijos de Sam Loyd.* Madrid: Zugarto Ediciones.

Gardner, M. (1999). *Nuevos acertijos de Sam Loyd.* Madrid: Zugarto Ediciones.

Mala, M. (1998). *Juegos de ingenio III.* España: Robinbook.

Medina, A. y Salvador F. (2002). Didáctica General, 1a ed., Madrid: Ed. Pearson Educación

Pagano, R (1999). *Estadística Elemental para las Ciencias del Comportamiento*. México Editores Thomson.

Perelman, Y (1978). *Algebra Recreativa.* URRS: Mir – Moscú.

Perelman, Y (1978). *Matemática Recreativa.* España: Martínez Roca, S. A.

Piaget, J. y Inhelder, B. (1985). *De la lógica del niño a la lógica del adolescente*. Barcelona: Paidós. (Original francés publicado en 1955).

Polya, G. (1975). Cómo Plantear y Resolver Problemas. México: Editorial Trillas

Pizarro, R. y Crespo, N. (1997). *Inteligencias múltiples y aprendizajes escolares. Investigación en Proceso*. Universidad Católica de Valparaíso.

Segarra, L. (2001). *Problemates: Colección de problemas matemáticos para todas las edades.* España: GRAÓ.

Valiente, S. (2000) *Didáctica de la matemática: El libro de los recursos*, Madrid: Editorial La Muralla, S. A.

Young, J.W.A. (1970) *Fines, valor y métodos de la enseñanza matemática*. Buenos Aires: Losada, S.A.

Zenteno, F. (2005). *Método de resolución de problemas en Lógica Matemática.* Cerro De Pasco. Perú. Ediciones La Esmeralda.

Volver al índice de autores

1.3. Socialización de experiencias

1.3.1. Proyecto IMAGINARY- Divulgación Matemática Libre

Alba Málaga Flaviano
Inria, équipo ALMAnaCH, Paris, Francia
IMAGINARY gGmbH Mittenwalder, Berlin, Alemania

Resumen

Actualmente, más de 100000 artículos de matemáticas son publicados en revistas especializadas cada año. Una buena proporción de estos es inaccesible no es solo inaccesible al ciudadano de a pie sino también a matemáticos especializados en otras áreas que las que presentan los artículos. Algunos autores, que no se contentan con esta situación, se preocupan en crear materiales de apoyo a la comprensión como por ejemplo textos de divulgación o imágenes. Sin embargo, cuando estos materiales son compartidos únicamente en la web del autor, se dificulta el descubrimiento de los mismos por gente ajena. Es en este contexto que, en el 2013 el proyecto Imaginary inaugura la plataforma web https://www.imaginary.org, *un sitio web en el que pueden compartirse imágenes, películas, programas informáticos y otros objetos útiles a la divulgación de las matemáticas. Todo el contenido Imaginary está bajo licencia libre, todo el mundo está invitado a contribuir y a usar los materiales, y muchas de las contribuciones son hechas por gente activa en investigación matemática. Luego de presentar la historia del proyecto Imaginary, que cumplió hace poco 10 años, presentaré mi experiencia con el lanzamiento y el desarrollo de la sección francesa de Imaginary así como algunos de mis materiales preferidos en la plataforma.*

Introducción

La preocupación por la divulgación científica no data de hoy. Sin embargo, en lo que a museos de matemáticas se refiere, ha habido un boom en los años más recientes.

En este texto, voy a presentarles el proyecto IMAGINARY. Este proyecto nació con una exposición itinerante de matemáticas en Alemania, que desde el inicio fue compartida libremente. Hoy convertido en una ONG internacional, IMAGINARY lleva muchos proyectos en paralelo, demasiados para poder presentarlos aquí.

En este texto hablaré de:

- la plataforma web imaginary.org porque es un aspecto central del proyecto,
- y de la sección francesa de Imaginary, de cuyo lanzamiento me ocupé en el 2015 y con la cuál sigo colaborando activamente.

Propósito

Los museos de matemáticas, los profesores de colegio, los profesores universitarios en eventos de divulgación, asociaciones y otros, todos pueden ser, o volverse, actores de la divulgación científica. Y a todos ellos, sean ellos mismos creadores de materiales o no, se les hacen más fáciles las actividades de divulgación si es que tienen un acceso a materiales ya listos, o bien a todo lo necesario para producir materiales ellos mismos.

El propósito del proyecto IMAGINARY es justamente el de facilitar el acceso a materiales de alta calidad de divulgación en matemáticas alrededor del mundo. Para esto, un aspecto central es el sitio web imaginary.org.

Dentro de la sección francesa de IMAGINARY, nuestro propósito es hacer que la gente en Francia conozca esta plataforma web y la use.

¿Cómo lograrlo?

Desde sus inicios, IMAGINARY ha sido un proyecto inclusivo, con un espíritu libre y abierto. Esto se refleja en el sitio imaginary.org. Todo el mundo puede contribuir. Es suficiente con tener una dirección de correo electrónico para crear una cuenta y comenzar a agregar contenido en cualquiera de las cuatro secciones de contenido del sitio: Programas, Galerías, Módulos Manipulativos y Películas. La única restricción es que el contenido debe estar bajo licencia libre.

El sitio web contiene la integralidad de dos exposiciones de matemáticas: “IMAGINARY – Una Mirada Matemática” y “Matemáticas del Planeta Tierra” así cómo un gran número de otras contribuciones. La exposición fundadora “IMAGINARY: a través de los ojos de las matemáticas” fue creada íntegramente en un ambiente de investigación. Nació en el instituto MFO en Oberwolfach, Alemania. Un buen número de contribuidores son investigadores.

Lo principal del sitio web está traducido en 7 idiomas: ingles, francés, alemán, coreano, español y turco. Hay eventos IMAGINARY alrededor de todo el planeta. De hecho, la conferencia IMAGINARY 2018 será en Sudamérica, en Uruguay.

En la sección francesa de IMAGINARY damos mucha importancia a todos estos aspectos que acabo de presentar: el espíritu libre y abierto, la cercanía al ambiente de investigación y la presencia internacional. Sin olvidarnos de los mas importante: el público, sin el que todo esto tendría mucho menos sentido.

Para lograr el propósito de que el público no académico conozca IMAGINARY, participamos regularmente en eventos de divulgación. Desde la creación de la sección francesa a fines del 2014 hemos participado todos los años en el salón parisino de cultura y juegos matemáticos. Hacemos también intervenciones en escuelas, cuando somos contactados por profesores. Participamos regularmente en la "Fête de la Science", el evento nacional de divulgación científica en Francia. Hemos participado puntualmente también en otros eventos.

Para convencer a creadores de contenido de divulgación matemática para que compartan el contenido en IMAGINARY, desde el lanzamiento de la sección francesa nos hemos integrado en la red ANIMATH de divulgadores de matemáticas en Francia. Es gracias a esta red que hemos podido conocer fácilmente a otros universitarios en Francia que dedican energía y tiempo a la divulgación matemática. Por otro lado, solicitamos con frecuencia directamente a colegas y a estudiantes para ayudarnos a animar en los diversos eventos en los que participamos, y guardamos los ojos abiertos para detectar nuevos contribuidores de contenido, y contribuimos contenido nosotros mismos. Tenemos siempre cuidado en incluir el contenido contribuido por gente geográficamente cercana a los eventos en los que participamos, para que así, cuando vean su obra expuesta, esto les motive aun más a contribuir.

Reflexiones sobre mi experiencia con el sitio imaginary.org y con la sección francesa de IMAGINARY

Mi experiencia con IMAGINARY me ha dejado huellas de muchas formas. Saber gestionar un equipo de animadores, saber buscar financiamiento y luego gestionarlo, saber hablar en publico, todo ello son competencias transversales que me han sido y serán útiles en otros

proyectos y otros aspectos de mi carrera. Además, al tener la oportunidad de divulgar matemáticas de áreas lejanas a la mía, yo misma he aprendido muchísimo.

Personalmente, considero que la ergonomía del sitio web imaginary.org podría mejorarse considerablemente. Algunos autores que yo misma motivé para que contribuyan, me recontactan luego señalando partes que les sorprendieron, o que les parecieron disfuncionales. Felizmente, aunque aun no haya sido anunciado oficialmente, se que una nueva versión del sitio esta siendo preparada, así que es posible que estos pequeños problemas de ergonomía desparezcan de aquí a pocos años.

La mayoría de los temas presentados en imaginary.org son temas de matemáticas bastante avanzados, que sobrepasan incluso el currículo de los primeros años de universidad en la mayoría de carreras. Sin embargo, gracias a los soportes bajo forma de bellas imágenes, programas interactivos, etc., logramos contribuir a que gente sin muchas bases en matemáticas pueda interesarse en el tema.

Debido a que en los eventos de divulgación la interacción con el publico se hace en general en lapsos de tiempo bastante cortos (entre 10 minutos y media hora, en el mejor de los casos una hora), se sabe de antemano que no vamos a poder llevar al publico de la mano para que entienda todos los detalles del tema. En divulgación, el objetivo es más bien hacer que el público se motive a seguir buscando – en su colegio, en su universidad, en su casa. El punto es darle el gusto de las matemáticas al gran público y me parece que el material de IMAGINARY se presta muy bien a esto.

Entre el contenido disponible en el sitio web, he trabajado mas con las superficies algebráicas, en imagen, impresas en 3D y a través del programa surfer. El concepto de superficie algebráica yo misma lo aprendí siendo estudiante de maestría. ¡Aquí la presentación multimodal y multisensorial permite comunicar este concepto inclusive a niños de primaria!

Agradecimientos

Quisiera agradecer a Gert-Martin Greuel, quien era director del instituto MFO cuando se realizó allí la primera exposición IMAGINARY - Una Mirada Matemática, así como a Andreas Matt quien estuvo en el proyecto IMAGINARY desde el comienzo y sigue manejándolo hasta hoy. Sin ellos, todo esto no sería realidad.

Por parte de la sección francesa de IMAGINARY, quisiera agradecer

- por un lado, a aquellos que nos han brindado un apoyo financiero, que el apoyo contante y sonante siempre sirve: Cap'Maths, La Diagonale Paris-Saclay, la Fundación Blaise Pascal.
- por otro lado, a aquellos que nos han brindado un apoyo humano: a todos los voluntarios y voluntarias que nos ayudan regularmente a animar en eventos de divulgación, son demasiados para enumerarlos todos. Especial mención merece
- y por fin a todos los autores de IMAGINARY pero en particular a aquellos que se animaron a contribuir luego de que los hayamos contactado en tanto que IMAGINARY France – su respuesta positiva nos da fe en nuestra misión.

Referencias

Imaginary. http://www.imaginary.org/

Volver al índice de autores

1.3.2. Enfoque centrado en la resolución de problemas: una experiencia con la hoja de papel A4

Wilfredo Hernán Bizarro Flores
IES. Comercial 45 "ERP" Puno - Perú

Resumen

El propósito de la socialización de la experiencia es cambiar la forma de aprender Matemática que contribuya al desarrollo de competencias y capacidades, cuyo eje es el Enfoque Centrado en la Resolución de Problemas, que consiste en promover formas de enseñanza-aprendizaje que den respuesta a situaciones problemáticas cercanas a la vida real, usando de manera flexible, estrategias y conocimientos matemáticos. Que las actividades que se presentan a los estudiantes despierten el interés, que reflexionen, busquen argumentos para validar los resultados. La experiencia se trabajó con los estudiantes del nivel secundario, utilizando la hoja estándar A4, a partir de ello se propone procesos didácticos que permita la interacción docente- estudiante y que los resultados alcanzados son satisfactorios en el aprendizaje de área no muy apreciada para algunos

Introducción

En los últimos años el Ministerio de Educación del Perú, produce documentos curriculares y pedagógicos, en el área de Matemática, con el Enfoque Centrado en la Resolución de Problemas y desde luego promueve un especial énfasis en resolver problemas del contexto, de la vida cotidiana y científico, pero que tenga sentido. Por otro lado, está el problema de los resultados en las evaluaciones internacionales como PISA en donde se prioriza la resolución de problemas. El Perú ha participado en las evaluaciones PISA del (2000), (2009), (2012) y (2015). En el 2000 y 2012 ocupó el último lugar y en el 2009 el penúltimo. En la prueba nacional ECE, nuestros estudiantes en su gran mayoría, siguen en los niveles inferiores a lo esperado. También existe el rechazo a esta área y es común escuchar a los estudiantes, a los jóvenes y adultos (no me gusta, es difícil, es aburrida, eso no va conmigo, entre otras). Para algunos estudiantes hablar de un problema matemático trae consigo una serie de creencias; por ejemplo, creen que los problemas tienen que resolverse únicamente mediante el uso del lápiz y papel (Ministerio de Educación, 2013), para superar se plantea aplicar la hoja de papel A4.

Los estudiantes de nuestro país, no pueden argumentar las respuestas obtenidas, y eso de observa in situ, por ello fue necesario remitirnos a las fuentes y según Ministerio de Educación del Perú nos dice, encontrar la respuesta de un problema no significa haber terminado el trabajo (Ministerio de Educación, 2015). Siempre que se piense en desarrollar las capacidades matemáticas para resolver problemas, el proceso óptimo de enseñanza y aprendizaje debería incluir la manipulación de distintos materiales, ya que solo mediante una enseñanza diversificada, rica en recursos y estrategias para abordar un mismo aprendizaje, conseguiremos que se construyan significados y atribuyan sentido al aprendizaje escolar (Ministerio de Educación, 2013). La Matemática es mucho más que números, operaciones y fórmulas (Ministerio de Educación, 2015).

El problema y su resolución: Según el Ministerio de Educación (2015), Un problema es un desafío, reto o dificultad a resolver y para lo cual no se conoce de antemano una solución. De Guzman (1991) nos dice; Es cuando me encuentro en una situación desde la que quiero llegar a otra, unas veces bien conocida, otras un tanto confusamente perfiladas, y no conozco el camino que me puede llevar de una a otra situación. Polya (1945) establece que la resolución de problemas es una característica esencial que distingue a la naturaleza humana y cataloga al hombre como "el animal que resuelve problemas", distingue cuatro fases en la resolución de problemas: comprender el problema, diseñar un plan; ejecutar el plan y examinar la solución obtenida. Schoenfeld (1985) profundiza y complementa el trabajo de Polya; incorpora y justifica la dimensión cognitiva en el proceso de resolución de problemas. A su vez en diferentes documentos del NCTM (1980, 2000) se destaca la importancia de considerar la resolución de problemas como el eje central de las matemáticas escolares y se promueve el desarrollo de estudios e investigaciones relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas**.** Un problema exige movilizar varias capacidades matemáticas para realizar una serie de tareas que nos permitan encontrar una respuesta o solución a la situación planteada. En contraposición contrario un ejercicio consiste en el desarrollo de tareas matemáticas, fundamentalmente las que están vinculadas al desarrollo de operaciones. Muchas veces estas actividades tienen la característica de ser sencillas y de repetición, por lo cual las llamamos "tareas rutinarias". (Ministerio de Educación, 2013)

El enfoque centrado en la resolución de problemas, según el Ministerio de Educación**,** surge como una alternativa de solución para enfrentar en nuestro quehacer docente: a) Las dificultades para el razonamiento matemático. b) Las dificultades para promover la

significatividad y funcionalidad de los conocimientos matemáticos. c) El aburrimiento, desvaloración y falta de interés por la matemática. d) Las dificultades para el desarrollo del pensamiento crítico en el aprendizaje de la matemática y e) El desarrollo de un pensamiento matemático descontextualizado. Este enfoque consiste en promover formas de enseñanza-aprendizaje que den respuesta a situaciones problemáticas cercanas a la vida real (Ministerio de Educación, 2013). Asimismo, la Matemática cobra mayor significado y se aprende mejor cuando se aplica directamente a situaciones de la vida real (Ministerio de Educación, 2013), nuestros estudiantes sentirán mayor satisfacción cuando puedan relacionar cualquier aprendizaje matemático nuevo con algo que saben y con la realidad cotidiana. Como lo expresa Gaulin (2001) citado por Minedu, este enfoque adquiere importancia debido a que promueve el desarrollo de aprendizajes "a través de", "sobre" y "para" la resolución de problemas. El enfoque es el punto de partida para enseñar y aprender matemática (Ministerio de Educación, 2015). Los rasgos más importantes de este enfoque son los siguientes. La resolución de problemas debe de plantearse en situaciones de contextos diversos lo que desarrolla el pensamiento matemático. La resolución de problemas orienta al desarrollo de competencias y capacidades matemáticas. Sirve de contexto para comprender y establecer relaciones entre experiencias, conceptos, procedimientos y representaciones matemáticas. Los problemas deben responder a los intereses y necesidades de los estudiantes (Ministerio de Educación, 2015). Por su parte Donovan y otros (2000), citado por Minedu. (2015), basado en trabajos de investigación en antropología, psicología social y cognitiva, afirman que los estudiantes alcanzan un aprendizaje con alto nivel de significatividad cuando se vinculan con sus prácticas culturales y sociales.

Las Rutas de Aprendizaje (2013) asume la resolución de problemas como práctica pedagógica en aula en el enfoque centrado en resolución de problemas como marco pedagógico para el desarrollo de las competencias y capacidades matemáticas, por dos razones: a) La resolución de situaciones problemáticas es la actividad central de la matemática, b) Es el medio principal para establecer relaciones de funcionalidad matemática con la realidad cotidiana. (Ministerio de Educación, 2013). Por tanto este enfoque supone cambios pedagógicos y metodológicos muy significativos, pero sobre todo rompe con la tradicional manera de entender cómo es que se aprende la matemática.

Papel del docente en el enfoque, no sólo permite a los estudiantes adquirir habilidades duraderas de aprendizaje y meta-aprendizaje de la matemática, sino que modifica

totalmente el papel del docente (Ministerio de Educación, 2013), a los docentes nos toca ahora guiar, explorar y respaldar las iniciativas de sus estudiantes, sin dar la clase de manera frontal tipo conferencia.

El papel de estudiante en este enfoque es que dedique un tiempo a la comprensión de la situación, diseñe estrategias, las desarrolle y evalúe sus resultados y consecuencias. (Ministerio de Educación, 2013). Los estudiantes aprenden por sí mismos cuando son capaces de autorregular su proceso de aprendizaje y de reflexionar sobre sus aciertos, errores, avances y dificultades, que surgieron durante el proceso de resolución de problemas (Ministerio de Educación, 2017). Los estudiantes se interesan en el conocimiento matemático, le encuentran significado, lo valoran más y mejor, cuando pueden establecer relaciones de funcionalidad matemática con situaciones de la vida real o de un contexto científico (Ministerio de Educación, 2013).

Estrategias heurísticas para resolver problemas;

En las rutas de aprendizaje (2013) presenta usos de estrategias heurísticas para resolver problemas las cuales de detalla a continuación:

1. Utilizar el ensayo y error: Tantear es una estrategia muy útil cuando se realiza de forma organizada y evaluando cada vez los ensayos que se realizan. En realidad, algunos métodos específicos de solución como el de regulación o el de aproximaciones sucesivas se basan en el uso sistemático de numerosos ensayos y sus respectivas correcciones. La idea es que cada rectificación conduzca a un ensayo que se acerque más a la respuesta.

2. Hacer una lista sistemática: En los casos en que requiere la enumeración de objetos matemáticos, es conveniente realizar un conteo o listado organizado con el fin de no dejar de lado ninguna posibilidad. Esta estrategia es muy útil al buscar soluciones en una ecuación, para encontrar espacios muestrales o resolver problemas de permutaciones o combinaciones.

3. Empezar por el final: La estrategia de utilizar el pensamiento regresivo se da mayormente en problemas en los cuales tenemos información de una situación final y también para demostrar desigualdades. La combinación de métodos progresivos y regresivos es una potente técnica para demostrar teoremas.

4. Razonar lógicamente: El razonamiento lógico es muy importante, pues gracias a él podemos engarzar los pasos y comprender las secuencias y cadenas que se producen para el desarrollo y resolución de problemas.

5. Particularizar: Conviene siempre utilizar casos particulares para familiarizarse con el problema, de este modo es posible observar algún camino que guíe hacia la solución de un problema genérico.

6. Generalizar: En algunos problemas puede ser muy útil averiguar si lo que se pide se refiere a un caso particular de alguna propiedad general. A esto se le conoce como la paradoja del inventor.

7. Buscar patrones: En algunos problemas es necesario experimentar con varios casos con el fin de encontrar pautas o regularidades que después se podrían emplear para llegar a la solución.

8. Plantear una ecuación: Una de las técnicas de modelación por excelencia a nivel elemental lo constituye el planteo de ecuaciones. Lo primordial para poder aplicarla con éxito es el entrenamiento en la traducción del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico.

9. Resolver un problema semejante pero más simple: Algunas veces, utilizar un método que nos dio resultado con un problema más simple que el propuesto nos conduce a la solución del problema original.

Aspectos metodológicos

La Institución Secundaria Comercial 45 “Emilio Romero Padilla” ubicada en la ciudad de Puno a 3826 msnm, a orillas del lago sagrado de los incas, cuenta con 1023 estudiantes de primero a quinto grado de Educación Secundaria, estudiantes de 11 a 17 años de edad. La experiencia concuerda con los Instrumentos de Gestión Escolar como el Proyecto Educativo Institucional, de donde se toma el diagnóstico, del Plan Anual de Trabajo se tomó la actividad, del cuidado del medio ambiente, luego de la Propuesta pedagógica del Proyecto Curricular de IE, el cuadro de situaciones priorizadas, en donde se elige el reciclaje de papel, la que aprovechamos para realizar la experiencia, que está lógicamente establecido en la Programación Curricular Anual, Unidades Didácticas y Sesiones de Aprendizaje.

La hoja de papel A4, podemos utilizar en diversas situaciones didácticas como juegos, origami o papiroplexia, dobleces, etc. como por ejemplo construcción de conceptos matemáticos haciendo geometría, trazos, división de una hoja en dos, tres, cuatro, … partes iguales para reconocer la igualdad, semejanza, congruencia y simetría comparación de áreas, entre otros. En la experiencia se ha planteado algunos problemas las cuales presento.

1. Halle el área y el perímetro de la hoja de papel A4

Realmente esta pregunta abierta se convirtió en un problema, algunos estudiantes no hallaban qué hacer al no encontrar datos, otros tenían problemas en los conceptos matemáticos área y perímetro, luego en las mediciones hubo muchos errores, por ello se aplicó el error constructivo que plantea el Currículo Nacional (2017), que especifica, el error suele ser considerado solo como síntoma de que el proceso de aprendizaje no va bien y que el estudiante presenta deficiencias. Desde la didáctica, en cambio, el error puede ser empleado más bien de forma constructiva, como una oportunidad de aprendizaje, propiciando la reflexión y revisión de los diversos productos o tareas, tanto del profesor como del estudiante. El error requiere diálogo, análisis, una revisión cuidadosa de los factores y decisiones que llevaron a él. Esta forma de abordarlo debe ser considerada tanto en la metodología como en la interacción continua profesor- estudiante. (Ministerio de Educación, 2017).

2. Cómo podríamos calcular el grosor de la hoja de papel A4 (volumen)

Este problema es consecuencia de lo anterior, pero la dificultad fue encontrar la altura o el grosor del papel, esto implicó la Generación del conflicto cognitivo, según el Ministerio de Educación (2017), requiere plantear un reto cognitivo que le resulte significativo al estudiante cuya solución permita poner en juego sus diversas capacidades. Puede tratarse de una idea, una información o de un comportamiento que contradice y discute sus creencias. Se produce, entonces, una desarmonía en el sistema de ideas, creencias y emociones de la persona. En la medida que involucra su interés, el desequilibrio generado puede motivar la búsqueda de una respuesta, lo que abre paso a un nuevo aprendizaje.

3. ¿Cuánto mide la diagonal de la Hoja A4?

Aparentemente este problema, los estudiantes lo vieron como fácil, sin embargo, hubo dificultades en la precisión, algunos empezaron a medir por lo que el resultado no fue exacto para algunos estudiantes.

4. En la industria papelera, los tamaños de papel estándar de la serie A se denominan A0, A1, A2, A3, A4, A5, A6, etc.

Se sabe que el de mayor tamaño tiene una superficie de 1 m2 y cada uno de los demás mide la mitad del anterior. Jesús estudiante de quinto grado. Él necesita un estante para colocar papeles A0 y A4. Previamente debe determinar las medidas exactas y aproximadas de dichos papeles. ¿Cómo lo hará?. (Ministerio de Educación, 2016)

Este el problema planteada en el texto de quinto grado, los estudiantes vivenciaron las actividades en forma activa.

5. Para hacer cilindros de distintos tamaños, las tres piezas (cara lateral y dos bases) pueden cortarse de una misma hoja rectangular de varias maneras (ver figura 1 a continuación) Por ejemplo, usando una hoja de papel A4 ¿cuál es el corte que permite construir el cilindro con mayor volumen? ¿Cuáles serían sus dimensiones? Para simplificar supongamos que una hoja A4 mide 21 cm x 30 cm.

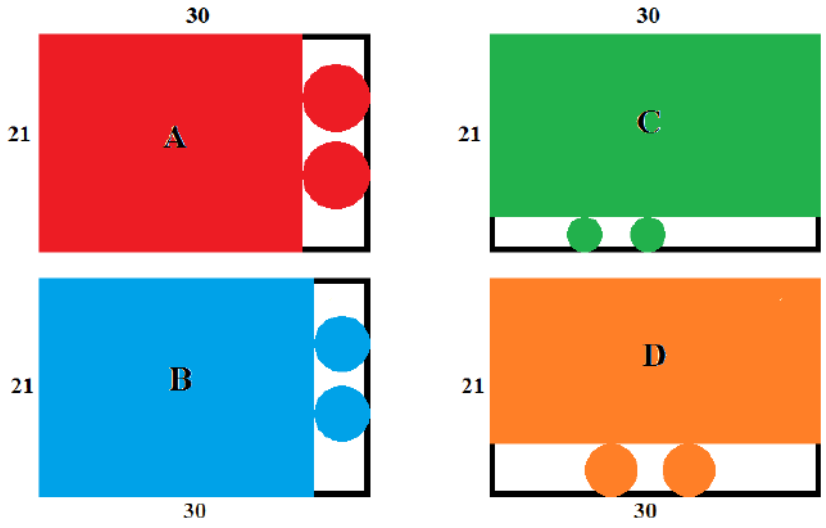


Figura 1: Construcción de cilindro de mayor volumen

6. Toma una hoja de papel formato DIN A4. Si la doblas por la mitad consigues dividir la hoja en dos partes iguales, si vuelves a doblar por la mitad conseguirás cuatro partes iguales. ¿En cuántas partes quedará dividida la hoja después de diez pliegues?.

7. ¿Por qué en una hoja A4 los rectángulos obtenidos comparten la diagonal? ¿Esto será igual con cualquier hoja de papel?

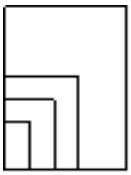


Figura 2: hoja A4 con la diagonal

8. Hasta dónde puedes llegar doblando papel. ¿Cuántas dobleces tendrías que hacerle para llegar a la luna suponiendo que dicho papel tiene un espesor de una décima de milímetro (0,1 mm)? Ten en cuenta que la distancia de la tierra a la luna es, aproximadamente, 384.400 km.

Resultados y conclusiones

- El enfoque Centrado en la Resolución Problemas, implica, cambiar la forma de enseñar y aprender en el área de Matemática en Educación Básica.

- Entendida que la Matemática es producto cultural dinámico, entonces de debe enseñar y aprender con los estudiantes de igual modo.

- Partir de situaciones significativas que respondan a las necesidades, intereses, problemas y expectativas de los estudiantes, es más cómodo lograr el desarrollo de las competencias y capacidades, porque se relaciona con los saberes y la vida cotidiana.

- Los estudiantes son muy creativos, imaginativos, cuando se les da confianza, flexibilidad, y usan diversas estrategias y conocimientos matemáticos, para la solución de problemas. Entonces el aprendizaje es más significativo cuando se relaciona más con los sentidos y que el estudiante encuentra sentido entre sus saberes previos y el nuevo aprendizaje, considerando el error como oportunidad de aprendizaje.

Referencias

Alsina, A. (2006). *¿Para qué sirven los problemas en la clase de matemáticas?*. Uno. [Versión electrónica]. Revista Uno 43

Guzmán, M. de (1.991). *Para Pensar Mejor*. Edit. Labor. Barcelona.

Guzmán, M. de, Gil D. (1.993). *Enseñanza de las ciencias y la matemática*. Tendencias e Innovaciones. Edit. Popular. Madrid.

Guzmán, M. de (1.994).“El ordenador en la Educación Matemática". Vela Mayor, *Revista de Anaya Educación* (nº 3).

Ministerio de Educación. (2013). *Rutas de aprendizaje. Hacer uso de saberes matemáticos para afrontar desafíos diversos, fascículo general 2.* Lima: Corporación Gráfica Navarrete S.A.

Ministerio de Educación. (2013). *Rutas de aprendizaje: ¿Qué y cómo aprenden nuestros adolescentes?, Fascículo 1 VII ciclo.* Lima: Corporación Gráfica Navarrete S.A.

Ministerio de Educación. (2015). *Módulo de Resolución de Problemas - Resolvamos 1*. Lima: Consorcio Corporación Gráfica Navarrete S.A., Amauta.

Ministerio de Educación. (2015). *Módulo de Resolución de Problemas - Resolvamos 2*. Lima: Consorcio Corporación Gráfica Navarrete S.A., Amauta.

Ministerio de Educación. (2015). *Rutas de aprendizaje. Versión 2015, Qué y cómo aprenden nuestros estudiantes.* Lima: Quad/Graphics Perú S.A.

Ministerio de Educación. (2017). *Currículo Nacional*. Lima: Calle Del Comercio 193, San Borja.

Ministerio de Educación. (2017). *Programa Curricular de Educación Secundaria.* Lima.

Ministerio de Educación del Perú. (2017). *Programa Curricular de Educación Secundaria* (Primera Edición ed.). Lima: Minedu.

Pólya, G. (1990). Cómo plantear y resolver problemas. México: Trillas.

Schoenfeld, A. (1985). Mathematical Problem Solving. Orlando: Academic Press.

Volver al índice de autores

1.3.3. Libre Matemáticas con un enfoque químico biológico

Pablo Flores Jacinto
María Catalina Cárdenas Ascención
Enrique García Leal
Facultad de Estudios Superiores Zaragoza, UNAM, México

Resumen

El propósito de este trabajo es contextualizar la materia de matemáticas 1, para los alumnos de la carrera de Químico Farmacéutico Biológico (QFB) de la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza de la Universidad Nacional Autónoma de México utilizando ejemplos cotidianos de la carrera con lo que se busca favorecer el aprendizaje significativo. La metodología empleada fue: recopilación y desarrollo de ejercicios con enfoque químico biológico en los diversos tópicos que componen el programa de la materia. Los resultados obtenidos fueron la elaboración de un libro titulado "Matemáticas 1, con un enfoque químico biológico" impreso y digital, los cuales se podrán consultar en papel o en línea.

Propósito

El programa de matemáticas 1, de la carrera de Química Farmacéutico Biológica, cuenta con 14 créditos (de un total de 44 del área de matemáticas y estadística), el objetivo de la asignatura es "Adquirir los conceptos básicos de álgebra y cálculo diferencial de una y más de una variable independiente para comprender, analizar, plantear y manejar modelos físicos, químicos, biológicos y fisicoquímicos en el área de la salud", lo cual se plantea en cuatro unidades para un total de 128 horas de las cuales el 25% está dispuesto para taller, en el cual se deben de dedicar a resolver ejercicios aplicados al ámbito de la carrera de QFB, la principal problemática es que la existencia de material con aplicaciones a esta área es de escasa a nula, sabemos que la integración de las matemáticas a otras áreas del conocimiento y su interés a la aplicabilidad mejora la aprehensión de los conceptos matemáticos entre otros (Salett & Heien, 2004), otra insuficiencia es la carencia del perfil químico de algunos docentes ya que la aplicación exige una interrelación y vinculo con aéreas como la química analítica, la fisicoquímica, síntesis de medicamentos etc., otra es la negación de la realidad tecnológica que tienen algunos docentes debido a que las sesiones de matemáticas son muy tradicionalistas y éstas normalmente son independiente a la

innovación tecnológica, por lo que la necesidad de integrar la formación del profesorado con los procesos de cambio, innovación y desarrollo curricular (Sanabria, 2004) es la piedra angular.

Aplicaciones incorporadas requeridas por el programa de Matemáticas 1

Los temas del mapa curricular que exigen aplicaciones en el orden de aparición son:

Tabla 1 Temas de aplicaciones en el programa de Matemáticas 1 de la FES Zaragoza, UNAM.

Unidad	Nombre	Aplicaciones
1	Conjuntos, números reales y funciones.	• Funciones potenciales. • Funciones exponencial y logarítmica. • Funciones periódicas.
3	Cálculo diferencial en una variable real.	• Máximos y mínimos. • Razón de cambio y diferenciales.
4	Cálculo diferencial en dos o más variables reales	• Regla de la cadena • Diferencial total • Máximo y mínimos • Multiplicadores de Lagrange

(Zaragoza, 2017)

Para ello se desarrollaron problemas con un enfoque químico biológico para darle contexto a la materia de Matemáticas 1, las aplicaciones son:

Unidad 1. Conjuntos, números reales y funciones

El objetivo de esta unidad es comprender los conceptos de conjuntos, números reales y funciones, las aplicaciones integradas son las siguientes:

1.- *Función potencia* que son expresiones de la forma $f(x) = kx^a$ donde a y k son constantes diferentes de cero, las cuales permiten modelar situaciones y fenómenos de distintas áreas como biología, economía, geología, crecimiento demográfico entre otros. Un ejemplo clásico es la reproducción de bacterias (Portal educativo, 2015). Por lo que se integraron ejercicios de crecimiento de bacterias como la *E-coli,* para establecer la función potencia y el cálculo del Índice de Calidad del Agua (ICA) que utiliza ecuaciones potenciales por ejemplo el subíndice de calidad de la Demanda Bioquímica de Oxigeno es: $I_{DBO} = 120[DBO]^{-0.673}$.

2.- *Funciones Exponenciales y Logarítmica* tienen aplicaciones en crecimientos y decrementos y normalmente utilizadas en ciencias de la salud en microorganismo y hongos como el *Penicillium.* Pero también para el crecimiento poblacional con la ecuación más utilizada: $P = P_0(1 + I)^t$, donde *t* es tiempo y *P* es población. Respecto a las funciones logarítmicas se incorporaron algunos usos como la Velocidad de desintegración $\left(2.3log\frac{N_1}{N_2} = kt\right)$, Constante de equilibrio $\left(lnK_t = -\frac{1}{R}\left(\frac{\Delta G_r - \Delta H_r}{298} + \frac{\Delta H_r}{T}\right)\right)$, Presión de vapor $\left(logP = A - \frac{B}{T+C}\right)$, Ecuación de Nernst $(E = E^0 - \frac{2.303RT}{nF}logK)$ y Potencial de hidrogeno $\left(pH = pKa + log\frac{[A^-]}{[HA]}\right)$.

3.- Funciones periódicas se refieren a aquellas que tienen repetición uniforme en el dominio (Buendia & Ordoñez, 2009), éstas son seno y coseno principalmente; se integraron ejercicios que relacionan a los fenómenos naturales (que son cíclicos) con estas funciones, por ejemplo el metabolismo basal de un organismo se puede representar con la ecuación: $M = 0.4 + 0.2Sen\left(\frac{\pi t}{12}\right)$.

Unidad 2. Cálculo diferencial en una variable real

El objetivo de esta unidad es comprender el concepto de derivada y sus aplicaciones en el ámbito de la carrera de Química Farmacéutica-Biológica, de igual forma se incorporaron ejercicios de aplicación tales como:

1.- Máximos y mínimos en cálculo diferencial se emplea para conocer por ejemplo la obtención máxima o mínima de algún producto en una reacción química, un ejemplo es la determinación de los tiempo de coagulación de una serie de fármacos en función del peso molecular es: $t = 4 \times 10^{-7}P^2 - 0.0048P + 18$, donde *P* es el Peso molecular y *t* el tiempo en horas.

2.- Razón de cambio y diferenciales es el cambio instantáneo con respecto al tiempo de una cantidad, la explicación de este tópico se abordó desde la perspectiva de la siguiente reacción química: $Al(OH)_3 + 3HCl \rightarrow AlCl_3 + 3H_2O$. En donde reacciona una molécula de hidróxido de aluminio [$Al(OH)_3$] con tres de ácido clorhídrico [HCl] para producir una de cloruro de aluminio [$AlCl_3$] y tres moléculas de agua. Para el consumo del ácido clorhídrico se tiene: $\frac{dC_{HCl}}{dt} = -3\frac{mol\ HCl}{tiempo}$

La ecuación se interpreta como: se consumen tres moles de ácido clorhídrico por unidad de tiempo. Se incluyeron ejercicios de razón de cambio en agometría, expansión adiabática, diseño de tolvas para producir material cerámico, derrame de sustancias químicas a un lago y ángulo de reposo.

Unidad 4. Cálculo diferencial en dos o más variables reales

Finalmente, el objetivo de esta unidad es comprender el concepto de función de n variables, de derivadas parciales y sus aplicaciones en el ámbito de la Carrera Química Farmacéutico Biológica, por lo que se introdujeron ejercicios de aplicación de:

1.- Regla de la cadena no es más que la resultante de la derivada de la composición de dos funciones, a esto también se le conoce como composición de funciones (Ingenieriaelectronica.org, 2016), la aplicación de ejercicios de este tópico fue con derivadas parciales de ecuaciones polinomiales de dos variables.

2.- Diferencial total para varias variables es la suma de las derivadas respecto a cada una de ellas $\left(dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)$, el ejercicio de aplicación que se plasmo fue con una representación de la ecuación de gas ideal ($PV_m = kT$) utilizada con mucha frecuencia en termodinámica, en donde se busca estimar el error porcentual.

3.- Máximos y mínimos para varias variables se tuvieron aplicaciones de problemas en tres dimensiones para encontrar el máximo o mínimo, aunado a esto se utilizó la aplicación móvil de Geogebra® para visualizar funciones de dos variables y verificar de forma visual el máximo y mínimo.

4.- Multiplicadores de Lagrange son utilizados para maximizar (o minimizar) una función multivariable $f(x, y, \dots)$ sujeta a una restricción definida por otra función multivariable $g(x, y, \dots)$ (KhanAcademy, 2018). En este aspecto aun se necesita reforzar con ejercicios con un enfoque químico ya que los ejercicios planteados son meramente matemáticos.

Aplicaciones incorporadas no requeridas por el programa de Matemáticas 1

Los temas del mapa curricular que se encuentra sin aplicaciones en Matemáticas 1, que fueron incorporados debido a su relevancia en el requerimiento por algunas asignaturas posteriores son los siguientes:

Tabla 2 Temas de aplicaciones incorporadas en el programa de Matemáticas 1 de la FES Zaragoza, UNAM.

Unidad	Nombre	Aplicaciones
1	Conjuntos, números reales y funciones	• Operación de conjuntos • Clasificación general de las funciones
2	Números complejos, teoría de ecuaciones y elementos de algebra lineal	• Números complejos • Teoría de ecuaciones • Elementos de algebra lineal

Unidad 1 Conjuntos, números reales y funciones

Para esta unidad se retomó el tema de operación de conjuntos y clasificación general de las funciones, planteando ejercicios que demuestran la utilidad y conexión con la investigación y áreas de la química analítica.

1. *Operación de conjuntos*, estas son la unión, intersección, diferencia y complemento que tradicionalmente se enseña con números como elementos, el hecho de que la teoría de conjuntos se aplique a la caracterización matemática de unión de péptidos (Rodriguez, 2011), hizo que su incorporación como una aplicación se efectuara.

2.- *Clasificación de funciones*, estas se pueden agrupar como lineal, cuadráticas, cubicas, raíz, exponencial, logarítmica, trigonométricas, entre otras; para la función lineal se introdujeron problemas de energía de activación, electronegatividad, peso molecular de una muestra para obtener el número aproximado de aminoácidos y la curva de calibración (muy utilizada en laboratorios de la carrera). Para las funciones cuadráticas se incorporó un ejercicio para la síntesis de amoniaco.

Unidad 2. Números complejos, teoría de ecuaciones y elementos de algebra lineal

El objetivo de esta unidad es resolver sistemas de ecuaciones y polinomios de grado n, las aplicaciones que se acoplaron son para números complejos y para teoría de ecuaciones, debido al raquítico vinculo de los números complejos con la química así como el uso de las raíces de polinomios y las matrices.

1. *Números complejos*, son combinaciones de la forma $a + bi$, donde a y b son números reales e i es la unidad imaginaria que satisface $i^2 = 1$ (UNAM, 2016). Salvo la ecuación de onda de Schrödinger $\left(H\Psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi\right)$ donde se utiliza los números imaginarios, no había algún ejercicio que conectará con este tema, por lo que se desarrollo un ejemplo de un mezclador para un jarabe antitusivo, utilizando la teoría de líneas de corriente equipotencial para sumideros.

2. *Teoría de ecuaciones,* es un resumen de las diferentes clases de ecuaciones (primer, segundo grado, polínomial, racional, irracional, etc.) (Gutierrez, 2013). La aplicación de este tema es el uso de raíces polinomiales en equilibrio químico, por ejemplo, en una reacción con una constante de equilibrio (K) se tiene:

	Cl_2	$+ F_2$	$\leftrightarrow$	2ClF
Mol al equilibrio	0.5-x	0.2-x		2x

La ecuación que se puede plantear es:

$$K = \frac{(2x)^2}{(0.5 - x)(0.2 - x)}$$

La solución de esta ecuación proporciona la concentración tanto de los reactivos como del producto.

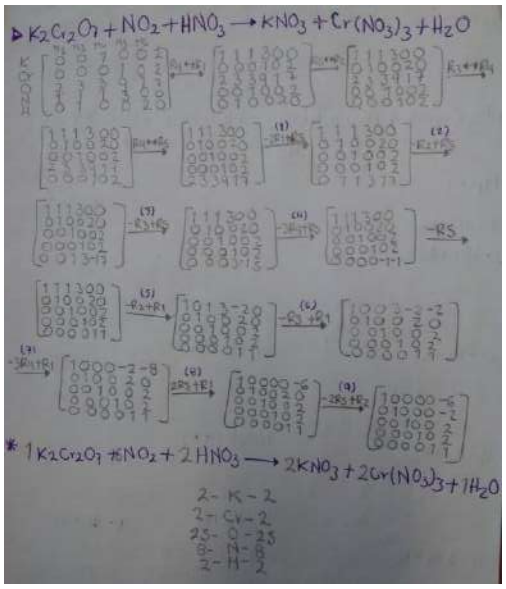
3. *Elementos de algebra lineal*, son los determinantes, las matrices, las ecuaciones lineales, los espacios vectoriales, entre otros (Blas, 2018). La aplicación que se introdujo en este tema es el balance de reacciones utilizando matrices con una característica o restricción que es una molécula mas con respecto a la cantidad de elementos químicos, en el ejemplo se analizó la reacción: $HNO_3 + H_2S \rightarrow S + NO + H_2O$, en donde se tiene cuatro elementos (H, Hidrogeno; N, Nitrógeno; S, Azufre; O, Oxígeno) y cinco moléculas (HNO_3, Ácido nítrico; H_2S, Acido sulfhídrico; S, Azufre; NO, Monóxido de nitrógeno; H_2O, Agua).

Resultados

El proyecto fue presentado en la convocatoria 2017 del Programa de Apoyo a Proyectos para la Innovación y Mejoramiento de la Enseñanza (PAPIME), de la Dirección General de Asuntos del Personal Académico de la Secretaria General de la UNAM, cuyas directrices son generar publicaciones (artículos, libros, manuales, etc.) que apoyen a la mejora del aprendizaje en el ámbito matemático, el presente programa privilegia los proyectos que propongan la elaboración de manuales, programa y aplicaciones digitales, asociados a los planes de estudios vigentes (DGAPA, 2016), el resultado de la evaluación fue favorable y se acepto, generando el expediente con clave PE100818 y otorgando la UNAM un monto presupuestal de 126,295 $ M.N., repartido en 5 partidas presupuestales. El proyecto al momento tiene la generación de un libro titulado "MATEMÁTICAS 1 CON UN ENFOQUE QUÍMICO BIOLÓGICO", en dos volúmenes, el primero con 272 páginas contempla el estudio de teoría de conjuntos, números y teoría de ecuaciones y el segundo con 220 páginas abarca el estudio del cálculo diferencial de una y dos y más variables (con registro de ISBN en trámite).

Los ejercicios ya se han aplicado a dos grupos de la carrera de QFB de la FES Zaragoza de la UNAM, la siguiente imagen muestra un ejercicio de aplicación que corresponde al balanceo de una reacción química por el método matricial.

Imagen 1. Tarea presentada de un alumno del grupo 2113 de la carrera de QFB en donde se utilizan las matrices para balancear una reacción química.



Esto representa el inicio de la contextualización del programa de matemáticas 1 de la carrera de QFB, el cual responde la pregunta eterna de los alumnos ¿Y esto para que me sirve?

Referencias

Albores, P. (s.f.). *psicoPedagogia.com*. Recuperado el 07 de mayo de 2018, de Psicologia de la educacion para padres y profesionales: http://www.psicopedagogia.com/articulos/?articulo=302

Blas, M. J. (2018). *Aplicación de algebra lineal a la ingeniería industrial.* Recuperado el 08 de mayo de 2018, de http://www.academia.edu/10816101/APLICACION_DE_ALGEBRA_LINEAL_A_LA_INGENIERIA_INDUSTRIAL

Buendia, G., & Ordoñez, A. (2009). El comportamiento periodico en la relación de una función y sus derivadas: significados a paratir de la variación. *Red de Revistas de América Latina y el Caribe, España y Portugal* , 28.

DGAPA. (01 de agosto de 2016). *unam.mx.* Recuperado el 08 de mayo de 2018, de http://dgapa.unam.mx/images/papime/2017_papime_convocatoria.pdf

Gutierrez, W. (08 de agosto de 2013). *SlideShare.* Recuperado el 08 de mayo de 2018, de https://es.slideshare.net/widmang/teora-de-las-ecuaciones

Ingenieriaelectronica.org. (16 de febrero de 2016). *ingenieriaelectronica.org*. Recuperado el 08 de mayo de 2018, de https://ingenieriaelectronica.org/regla-de-la-cadena-definicion-ejemplos-y-ejercicios-resueltos/

KhanAcademy. (2018). *Khanacademy.org*. Recuperado el 08 de mayo de 2018, de https://es.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/applications-of-multivariable-derivatives/constrained-optimization/a/lagrange-multipliers-examples

Portal educativo. (03 de Julio de 2015). *Portal educativo*. Recuperado el 07 de mayo de 2018, de Conectando neuronas: https://www.portaleducativo.net/cuarto-medio/23/funcion-potencia-situaciones

Rodriguez, J. V. (2011). Teoría de conjuntos aplicada a la caracterización matemática de unión de péptidos al HLA clase II. *Ciencia Salud* , 9-15.

Salett, B. M., & Heien, N. (2004). Modelacion Matematica y los desafios para enseñar matematica. *Educacion matematica* , 105-125.

Sanabria, M. L. (2004). *La formación permanente del profesorado para la integración de las tecnologías de la formación y la comunicación en la Comunidad Autonoma de Canarias.* Comunidad Autónoma de Canarias: Universidad de la Laguna.

UNAM. (08 de febrero de 2016). *Mate UNAM* . Recuperado el 08 de mayo de 2018, de http://www.matem.unam.mx/max/VC/N1.pdf

Zaragoza, F. (06 de noviembre de 2017). *QFB: INFORMACIÓN ACADÉMICA*. Recuperado el 07 de mayo de 2018, de https://www.zaragoza.unam.mx/portal/wp-content/Portal2015/Licenciaturas/qfb/programas_academicos/Matematicas-I.pdf

Volver al índice de autores

1.3.4. Guerra de los números enteros

Héctor Manrique Velarde
I.E. José María Arguedas Lircay – Angaraes, Huancavelica, Perú

Resumen

El propósito del juego es ayudar a los estudiantes del VI Ciclo de EBR, a operar en adición y sustracción de enteros, pues, tienen dificultades con la Ley de Signos. Siguiendo el método Polya (1945), se ideó el juego denominado GUERRA DE LOS NÚMEROS ENTEROS que consiste en formar dos sub conjuntos del salón "enemigos" entre sí. El encuentro de personas del mismo grupo, da como resultado la unión de ellos (suma) y, el encuentro con personas del grupo adversario, termina en "matanza" de rivales (resta) donde ganan los que tienen mayor cantidad de personas, quedando "vivos" la diferencia de cantidades. Se juega hasta que asimilen que la guerra la ganan, siempre, aquellos que tienen mayor cantidad de personas. Esta experiencia, se viene trabajando y mejorando desde 1992, con resultados óptimos de aprendizaje significativo. Por la experiencia se puede afirmar que para enseñar a sumar y restar números enteros, no es prudente adelantar la Ley de Signos correspondiente. Ésta se logra jugando la GUERRA DE LOS NÚMEROS ENTEROS. Desde el punto de vista metodológico, este juego es un valioso aporte a la didáctica de la matemática. Esta experiencia, debe ser masificada en docentes del área de Matemática y estudiantes del VI Ciclo.

DESARROLLO DEL TRABAJO

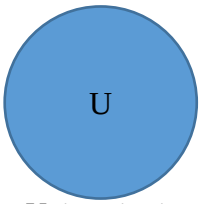
El docente comunica a los estudiantes que se va jugar a la guerra de dos grupos (sub conjuntos del aula) enemigos entre sí.

Consulta el nombre que han de llevar los adversarios. Según el contexto, pueden ser:

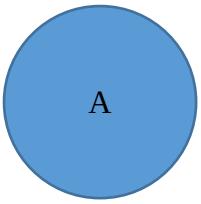
- Dos barrios rivales del pueblo, los cuales, a veces, tienen sobrenombre y les es muy familiar.
- El pueblo vecino, rival del nuestro.
- Los clubes más representativos de la comunidad.
- Hinchas de Alianza Lima y Universitario de Deportes.
- Perú Vs Chile.
- Guerra Perú – Ecuador (cuando hubo el conflicto con ellos)
- Pandillas rivales de la ciudad o de las comunidades.

- Leones y cobras del programa “Esto es Guerra”.
- Otros contrincantes que el grupo apruebe por consenso.

Se forman dos grupos “enemigos” de estudiantes. Para esta exposición usaremos como ejemplo a los malos hinchas pandilleros de la U y Alianza Lima. Se aprovecha el momento para dar orientación sobre las inconductas que se ven en televisión.



Universitario



Alianza Lima

El docente hace conocer las reglas de la guerra de hinchas:

- Cada miembro del grupo tiene el mismo valor que otro; sea del suyo o del contendor. No hay super hombres ni super héroes.
- La lucha de uno contra uno, hace que ambos “mueran”. También dos contra dos, cien contra cien, u otras cantidades. Ejemplo:

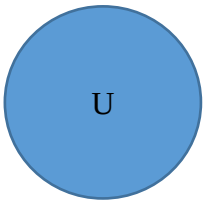
  Se pone en el escenario de juego a dos estudiantes de cada grupo. Fingen que se matan entre sí. Se simboliza así:

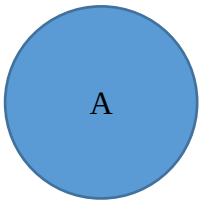
  2U vs 2A = 0

  Igual con:

  7A vs 7U = 0

- Al encontrarse hinchas del mismo club, no pelean, se unen y siguen perteneciendo al mismo grupo.





20U vs 10U

8A vs 21A





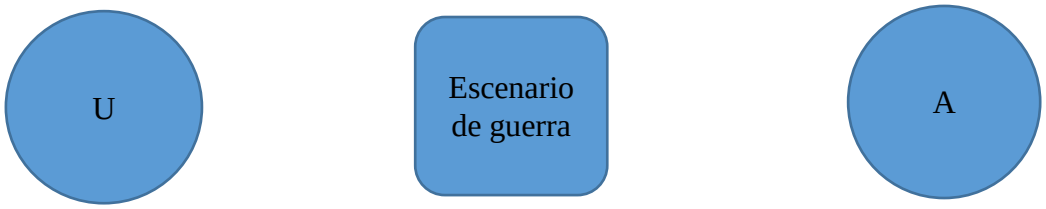
30U

29A

- Al encontrarse hinchas rivales, pelean. Mueren cantidades iguales de cada conjunto; el resto sobrevive; gana el que tiene más gente.

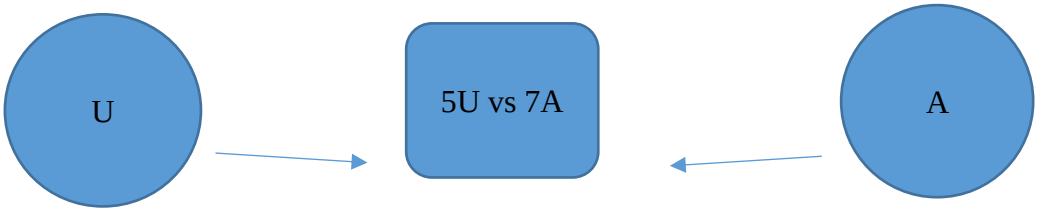
Luego de explicar las reglas de juego, en aula o en el patio, se forman dos círculos con hinchas de ambos sub conjuntos o clubes.

Se genera otro espacio o escenario donde se producirá la guerra de hinchas.



Al azar, se extraen grupos de estudiantes de cada círculo, los cuales, pasan al escenario de la guerra a pelear. Se reitera la explicación de las reglas de juego establecidas. Se repite el juego con otros grupos, incluyendo empates donde el resultado es cero.

Ejemplo: en una esquina, de pronto, se encuentran cinco hinchas de Universitario con siete hinchas de Alianza:

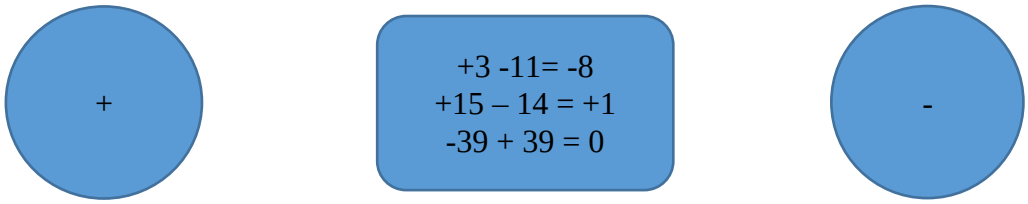


Del combate entre los cinco hinchas de la U contra los siete de Alianza, resultan vivos dos de Alianza, por ser el grupo de mayor cantidad; es decir, sobreviven 2A

Se ejecutan varios de estos juegos con diferentes cantidades.

Los demás, van anotando los resultados en una ficha.

Luego del juego, recién, se introduce el signo "+" para reconocer al primer grupo y el signo " - " para reconocer al segundo grupo. Se repiten algunos enfrentamientos más, cuyos resultados ya no llevan U ni A, si no, los signos + ó -



En la pizarra, se simbolizan todos los enfrentamientos. Ejemplo:

-5 y -3 son -8. Se explica: 5 hinchas se encuentran con 3 de su grupo, no pelean, se juntan, llegando a ser ocho negativos.

+4 y +20 son +24. Se explica: 4 personas se encuentran con 20 de su grupo, no pelean, se juntan, llegando a ser 24 positivos.

-10 y +7. Se explica: ganan los negativos (porque tienen más gente) quedando vivos -3

+12 y -10. Se explica: ganan los positivos (porque tienen más gente) quedando vivos +2

-55 y +55. Se explica: hay empate, mueren todos, quedando como resultado 0

Sutilmente, se ha introducido la Ley de Signos; por lo que, ya estamos en condiciones de preguntar: ¿qué resulta de pelear

- 4 – 6? Ellos responderán -10

-11 + 8 = -3

+ 12 – 14 = -2

-1 + 15 = +14

-48 + 48 = 0

Etc.

Luego que hayan jugado con varios ejemplos, los estudiantes construyen la regla de los signos para sumar y restar números enteros. El profesor confirma y refuerza sus conclusiones.

El docente aclara que, para multiplicar y dividir enteros, harán otro juego aún más fácil. De esa manera, deja abierta la expectativa para ingresar a dicho contenido.

Referencias

Polya, George (1965- castellano). *Cómo resolver problemas*. Edit. Trillas.

Volver al índice de autores

1.3.5. Máximos y mínimos con una restricción. Método multiplicadores de Lagrange

Nélida Salomé Medina García
Pontificia Universidad Católica del Perú-IREM, Perú

Resumen

El contenido del curso Análisis en Varias Variables Reales en Maestría de la Enseñanza de la Matemática de la Escuela de Posgrado incluye temas como valores extremos relativos y condicionados de funciones reales de varias variables reales. Los conceptos de valores extremos relativos y condicionados son importantes tanto en la parte teórica como en las aplicaciones, deben ser comprendidos y analizados cuidadosamente por los estudiantes. Si dichos conceptos quedan claros, la aplicación del Método de los Multiplicadores de Lagrange se hará en forma inmediata, así como la formulación del correspondiente sistema de ecuaciones. Para lograr estos objetivos comenzamos resolviendo el caso particular de optimizar una función real de dos variables reales sujeta a una restricción. Utilizamos el método de resolución de problemas, trabajo colaborativo con grupos de tres alumnos y nos apoyamos en recursos tecnológicos (Programa Mathematica) para visualizar los objetos matemáticos, relaciones entre ellos y formular conjeturas, Con este modo de presentar el tema de valores extremos condicionados de funciones reales de dos variables reales logramos integrar conocimientos, análisis cuidadoso de las condiciones de objetos matemáticos, visualizar estos objetos y sus relaciones

Desarrollo de la experiencia

Se plantea el siguiente problema.

Problema: Calcule las dimensiones del rectángulo de área máxima que es posible inscribir en la elipse E: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$.

Solución. Representamos geométricamente el enunciado del problema

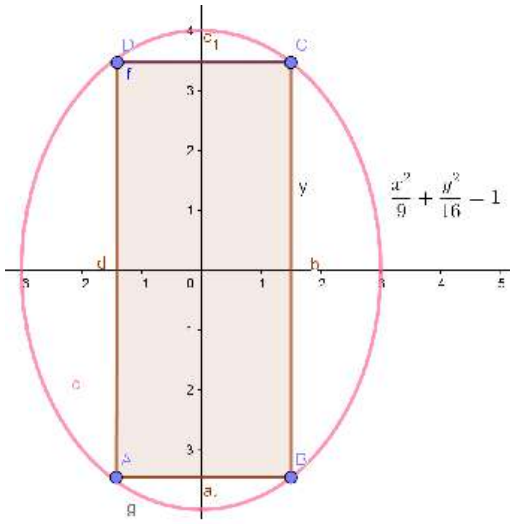


Figura 1. Rectángulo inscrito en la elipse E.

Planteamos la solución del problema considerando la simetría de la región limitada por el rectángulo y la elipse E respecto a los dos ejes coordenados. Debemos optimizar la función

$$f(x,y) = 4xy,$$

cuando el punto (x,y) está en la elipse

$$E\colon \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1,\ \ 0<x<3,\ \ 0<y<4.$$

Se guía a los alumnos con el fin de obtener una solución aplicando las herramientas que conocen. Los alumnos sugieren que a partir de la ecuación de la elipse E escribamos y como función de x, y después optimizar la función real de una variable real

$$h(x) = \frac{4}{3}\, x\, (9-x^2)^{1/2},\ \ 0<x<3.$$

Se forman grupos de trabajo integrados por tres alumnos. Aplicando el Criterio de la primera derivada obtenemos $x = \frac{3}{2}\sqrt{2},\ \ y = 2\sqrt{2}.$

Solución del problema: Las dimensiones del rectángulo son: ancho=$3\sqrt{2}$, altura $4\sqrt{2}$ y el área máxima es 24 unidades cuadradas.

Luego comentamos que el proceso usado involucra que una de las variables se escriba como función explícita de la otra variable.

Dada una ecuación $F(x,y)=0,\ (x,y)$ en un subconjunto de R^2, no siempre es posible escribir una variable como función de la otra.

Realizando preguntas adecuadas y mostrando la Figura 2 se logra la siguiente pregunta para resolver el problema:

Encontrar los valores extremos de la función real de dos variables reales

$$f(x,y)=4xy, \qquad x>0,\ \ y>0,$$

cuando (x,y) está en la elipse E: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1,$ es decir cumple la restricción

$$g(x,y)=\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}-1=0.$$

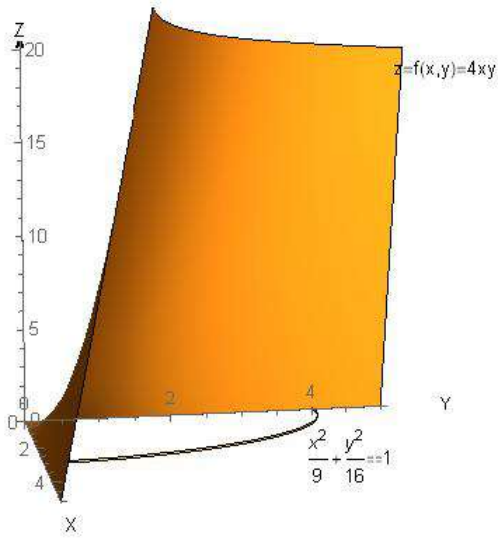


Figura 2 Gráfica de f y del dominio de la restricción g.

Estos valores extremos de la función f se llaman en general extremos condicionados de una función.

Fijamos nuestra atención en las curvas de nivel de la función por optimizar

$$\Gamma_c: 4\,xy = c\,.$$

Revisamos la forma de obtenerlas, usando la Figura 3. A continuación graficamos un conjunto de curvas de nivel de la función f y la restricción g. Sabemos por la parte teórica que el vector gradiente $\nabla f(x,y)$ es ortogonal a las curvas de nivel $f(x,y) = c$.

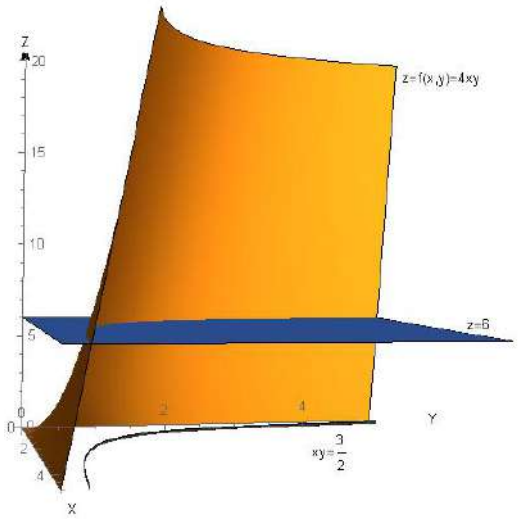


Figura 3.Curva de nivel de f correspondiente a $c = 6$.

Notamos que la curva de nivel Γ_{24} es tangente a la elipse E en el punto $P = (\frac{3}{2}\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$ en el cual la función f asume un valor extremo condicionado.

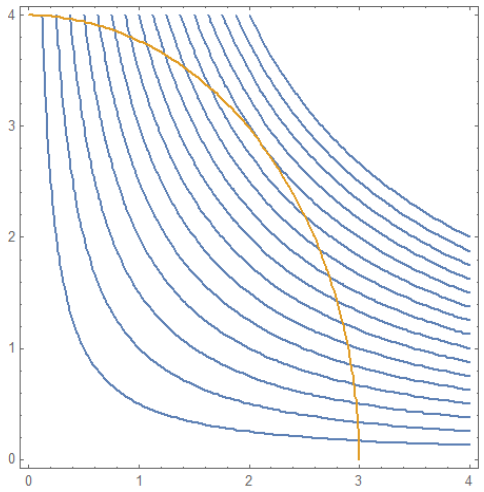


Figura 4. Gráficas de Curvas de nivel de f y la restricción g.

Estas curvas tienen una recta tangente común en el punto $(\frac{3}{2}\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$.

Calculamos los vectores gradiente de las funciones f y g en el punto $(\frac{3}{2}\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$ y averiguamos la continuidad de las derivadas parciales de primer orden de estas funciones.

Obtenemos:

$$\nabla f(\tfrac{3}{2}\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}(4,3),\quad \nabla g(\tfrac{3}{2}\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}) = \tfrac{\sqrt{2}}{12}(4,3),$$

Concluimos que $\nabla f(\frac{3}{2}\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$ y $\nabla g(\frac{3}{2}\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$ son vectores paralelos, es decir existe un número real λ tal que

$$\nabla f(\tfrac{3}{2}\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}) = \lambda\, \nabla g(\tfrac{3}{2}\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}).$$

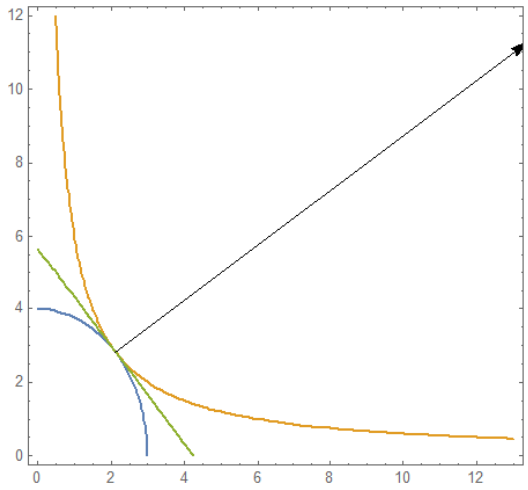


Figura 5. Gráfica de vector Gradiente $\nabla f\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$.

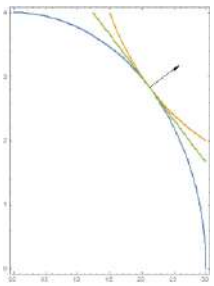


Figura 6. Gráfica de $\nabla g\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$.

En general, tenemos un problema de optimizar una función $f: U \subset R^2 \to R$ sujeta a la restricción $g: U \subset R^2 \to R$, donde U es un conjunto abierto del plano y las funciones f, g tienen derivadas parciales de primer orden continuas en U. Con un razonamiento análogo al anterior conjeturamos que en el punto en el cual f asume su valor extremo condicionado los vectores gradiente son paralelos

Método de los Multiplicadores de Lagrange

Teorema (Leithold, 1999. P. 1004)

Sean $f: U \subset R^2 \to R$, $g: U \subset R^2 \to R$ funciones cuyas primeras derivadas parciales son continuas en un conjunto abierto U. Si f tiene un extremo relativo en el punto

$(x_0,\ y_{0,}\ , f(x_0, y_0))$ sujeto a la restricción $g(x, y) = 0$ y $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$, entonces existe un número real llamado multiplicador de Lagrange tal que

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda\, \nabla g(x_0, y_0).$$

Finalmente, planteamos el siguiente problema. Los grupos de alumnos proponen soluciones, las que se discuten y se acuerda una propuesta de solución.

Problema.

Halle los puntos de la superficie $S: z = \frac{1}{x\,y},\ x \neq 0,\ y \neq 0$, más próximos al origen del espacio R^3.

Solución

La función por optimizar es

$$D(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2,$$

sujeta a la restricción

$$g(x, y, z) = \ z - \frac{1}{x\,y} = 0, \quad x \neq 0, \qquad y \neq 0.$$

Las funciones D y g satisfacen las condiciones del Teorema. Por tanto, existe un multiplicador de Lagrange λ tal que

$$\nabla\, D(x_0\,, y_0,\ z_0\,) = \lambda\, \nabla g(x_0, y_0,\ z_0)$$

y significa

$$(2x, 2y, 2z) = \lambda\left(\frac{1}{x^2 y}\,, \qquad \frac{1}{x\ y\hat{}2}, \qquad 1\right)$$

que implica resolver el sistema de ecuaciones

$$2x = \lambda\ \frac{1}{x^2 y}$$

$$2y = \lambda \frac{1}{x\, y^2}$$

$$2z = \lambda$$

$$z - \frac{1}{x\, y} = 0.$$

El o los puntos $(x_0\,, y_0,\ z_0\,)$ se encuentran en las soluciones de este sistema de ecuaciones.

Referencias

Leithold, L. (1999). El Cálculo. Oxford, University Press. *Multiplicadores de Lagrange*. Capítulo 12.9, pp.1004-1012. México.

Thomas G. (2005). Cálculo, varias variables. Pearson Education de México.

Multiplicadores de Lagrange. Capítulo 14.8, pp 1038-1047. México.

Revista de Investigación Educativa (2000). Metodología para la Enseñanza de la Matemática a través de la Resolución de Problemas: Un Estudio Evaluativo.

Volver al índice de autores

1.3.6. El trabajo escolar de tipos de sucesos aleatorios a través de la vida cotidiana de los estudiantes

Angélica Giovanna Ramos Rosas
Augusta Osorio Gonzales
Pontificia Universidad Católica del Perú, IREM, Perú

Resumen

La experiencia a presentar en este artículo busca mostrar el trabajo que se puede realizar con los alumnos del nivel IV del nivel primario cuando se quiere trabajar los desempeños de la competencia Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre. La incertidumbre es uno de los siete saberes necesarios para la educación del futuro, Morín (1999) y el trabajo con los tipos de sucesos aleatorios es necesario para que los alumnos puedan comprender la aplicación de estos conceptos en la vida cotidiana

Antecedentes

Los cambios del sector educativo en los diferentes países en cuanto a paradigmas, corrientes, teorías, currículos, enfoques y modelos, exigen nuevos roles del docente y del estudiante en cuanto a la enseñanza y el aprendizaje. En especial en el Perú que está transitando por un proceso de reajuste curricular.

En la enseñanza el conocimiento más dominado por los profesores es el que predomina en las prácticas educativas, pero también tenemos contenidos que son evitados o poco profundizados por falta de dominio pedagógico y didáctico. De tal manera que las actividades habituales que realiza el maestro en clases dependen en gran medida de su nivel de conocimiento matemático, lo que implica un dominio del tema en este caso de probabilidad, Paucar (2015).

La importancia del conocimiento matemático de la probabilidad en educación primaria no es reconocida por los propios docentes. Al respecto Vásquez y Alsina (2014), destacan la utilidad de la probabilidad y su presencia en diferentes situaciones de la vida diaria en la que se debe disponer del razonamiento crítico que permite interpretar y comunicar distintos tipos de información; así mismo, es una oportunidad para realizar un trabajo interdisciplinario en el nivel de educación primaria. En el Perú, gran parte de la educación

es de tipo polidocente, es decir un profesor se encarga de una sola sección, ventaja que debe ser aprovechada con actividades cotidianas.

Coincidimos con Godino (2009), Mohamed (2013), Vásquez y Alsina (2014) y Osorio (2015), cuando afirman que los profesores de educación primaria que ejercen actualmente la profesión y los que están formándose, presentan insuficiente conocimiento matemático del contenido de probabilidad; ellos proponen que se debe contar con profesores preparados en el conocimiento matemático y didáctico de la probabilidad. Igualmente, Serrado, Azcarate y Cardeñoso (2006) en Vásquez y Alsina (2014), manifiestan que el contenido de probabilidades se evita por falta de información y preparación.

La tarea del profesor es planificar situaciones de enseñanza para que el estudiante desarrolle el razonamiento probabilístico, razón que nos motiva a diseñar y aplicar la actividad sobre tipos de sucesos aleatorios con el propósito de mostrar la utilidad de situaciones cotidianas en la enseñanza de la probabilidad en el nivel de educación primaria. Al respecto, es conveniente afirmar que "no existe una vía única para promover el aprendizaje, es necesario que el docente, mediante un proceso de reflexión sobre el contexto y las características de su grupo, decida que es conveniente" (Díaz & Hernández, 2010, p. 7).

Ortiz (1999), en Gea, Batanero, Contreras y Arteaga (2017), manifiestan que la enseñanza de probabilidades empieza por reconocer en el entorno algunas situaciones aleatorias que ocurren: cuántos alumnos asistirán mañana a clases, qué estará haciendo mamá en casa, cuánta propina me darán el fin de semana, qué haré el domingo por la tarde, qué alimentos tendré en mi lonchera, dónde iremos de viaje de promoción, cómo se llamarán los nuevos compañeros y otras actividades reales que son cercanas a la vida escolar y familiar del estudiante. Todo esto genera incertidumbre y un conjunto de posibilidades o sucesos y algunos de ellos son más probable de suceder, Osorio (2012).

Ante los sucesos o eventos que ocurren a diario en el contexto escolar y familiar del estudiante se diseñó una actividad significativa aplicada en una jornada pedagógica con los estudiantes del IV ciclo de educación primaria. Se precisó el desempeño: expresa la ocurrencia de acontecimientos cotidianos usando las nociones "seguro", "más probable" y "menos probable" de la competencia resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre del área de matemática del Programa Curricular del Ministerio de Educación del Perú (2017).

Siguiendo a Osorio (2012) y Paucar (2015) definimos los tipos de sucesos:

Suceso Posible, son todas las posibilidades del espacio muestral de una situación aleatoria.

Suceso Imposible, es una posibilidad que nunca va a ocurrir dentro de la situación aleatoria dada y por tanto no está incluido en el espacio muestral.

Suceso más probable, es el evento o suceso que tiene más probabilidades de ocurrir.

Suceso menos probable, es el evento que tiene menos probabilidades de ocurrir.

El suceso seguro tiene un tratamiento especial y demanda de mayores actividades y capacidad de generalización en el estudiante y será un próximo artículo a escribir.

Desarrollo de la experiencia

Situación: Deportes que se juegan un domingo en la tarde en un parque infantil

La situación aleatoria que se presenta a los estudiantes es juegos a practicar en una loza deportiva un domingo por la tarde. Al redactar el problema nos aseguramos que el parque donde sucederán las acciones a describir es un lugar conocido y familiar para la mayoría de los estudiantes, ello respetando la etapa concreta del estudiante y objetividad de las acciones. La actividad empieza con un diálogo sobre las actividades que se realizan los fines de semana, donde espontáneamente emerge lo que es posible hacer un día domingo: ayudar arreglar la casa, ir al mercado, visitar a los familiares, pasear con la mascota, irse de viaje y diversas actividades más. Oportunamente se aprovecha este momento para preguntar por las cosas posibles y las imposibles de realizar los días domingos.

Al expresar las diversas actividades que se pueden realizar surgen confusiones que es necesario aclarar; este momento es oportuno para construir conceptos con los estudiantes. Posible, es lo que a veces puede ocurrir: como tener un accidente, un robo, que llueva; un temblor, terremoto, interrupción de clases; y lo imposible es algo que nunca ocurrirá como ver al hombre de las cavernas, comer sopa de piedras, ver dragones vivos, que un gorila me lleve al colegio y otros ejemplos más propuestos por los estudiantes. Esta actividad resulta altamente significativa por el contexto cotidiano del escolar. “La finalidad última de la intervención pedagógica es desarrollar en el alumno la capacidad de realizar aprendizajes

significativos por sí solo en una amplia gama de situaciones y circunstancias" (Coll, 1988 en Díaz & Hernández, 2010, p. 27).

Después de haber logrado que comprendan suceso posible y suceso imposible, lo siguiente es que los apliquen; para ello se presenta y leen un problema a resolver.

El día domingo algunos estudiantes de 4° grado fueron al parque infantil de su barrio, allí hay una loza deportiva mediana, sembrada con pasto, techada con malla de protección solar, cercada con malla metálica, tiene un letrero que menciona: La entrada es solo para niños y niñas menores de 12 años. Puedes expresar todos los deportes que se pueden jugar en esa loza deportiva los días domingos por la tarde, también debes expresar los deportes más probables que se pueden jugar en esta loza deportiva y los menos probables.

Se registra en la pizarra todos los deportes nombrados por los alumnos, luego se realiza un análisis de la relación teniendo en cuenta algunas restricciones de la situación como edad, tamaño de la loza deportiva y la existencia del cercado, restricciones que se nombran en el problema. Se inicia el dialogo basado en preguntas y contrapreguntas, importante en la actividad, porque desarrollan la capacidad de análisis y nos asegura la comprensión del problema, es decir, no solo estamos haciendo estadística también estamos trabajando otras áreas como comunicación y educación física.

Es importante no desestimar ningún dato que nombran los estudiantes, es posible que se equivoquen, esto nos lleva a una conexión con sus saberes previos; ellos nombran deportes que ni siquiera se nos hubieran ocurrido al planificar la actividad como Hockey, e incluso son capaces de corregirnos. Al detenernos a analizar cada deporte de la relación, nos damos cuenta que pueden diferenciar el fútbol del fulbito y cuál de ellos se puede jugar según el tamaño de la cancha o el hockey deporte que necesita una pista de hielo. De esa manera, se empieza a filtrar la relación de la pizarra teniendo en cuenta la situación planteada y las restricciones. Cabe destacar que es un momento de construcción de conocimientos entre los saberes previos, la información de la profesora y de los estudiantes que saben del tema, es ocasión para recordar a Vigostky el aprendizaje se da en interacción social. Finalmente, nos quedamos con todo lo posible y lo imposible es anulado después de un debate.

La lista final de todo lo posible es el espacio muestral de la situación, para determinar el deporte más probable y menos probable a jugar en el parque un domingo por la tarde; tenemos fulbito, vóley, futsall, karate, tae kwon do. Se determina cual es el deporte más

probable a jugar en el parque un domingo en la tarde, quedando fulbito y vóley, porque son los deportes más populares que se juegan en los parques. Los menos probables son futsall, karate, tae kwon do, porque el primero no es tan popular, y los otros deportes son casi individuales y personales en ambientes casi cerrados. Para determinar los más probables y los menos probables los estudiantes tuvieron que argumentar, capacidad compartida con el área de comunicación.

Conclusiones

La enseñanza y aprendizaje de la actividad con sucesos cotidianos en una jornada pedagógica genera el uso de las nociones posible, imposible, más probable y menos probable en otros contextos no necesariamente matemáticos, es un trabajo interdisciplinario que permite la conexión con otras áreas curriculares, el uso de estas nociones depende de la frecuencia con que serán usados en cualquier suceso o evento de la vida cotidiana y posteriormente formarán parte del vocabulario cotidiano del estudiante.

La experiencia con sucesos cotidianos puede ser replicada por los profesores del nivel primario, que necesitan de actividades programadas como esta, para desarrollar el razonamiento probabilístico, el requisito es que profesor y estudiante conozcan el tema para ser fluido, natural y espontáneo, la participación es casi total y significativa.

La actividad permite que los estudiantes desarrollen otras competencias y capacidades como comprensión, argumentación, debate, trabajo en equipo, respeto a las ideas de otros compañeros y la construcción de sus aprendizajes, a través de los saberes previos y la nueva información.

Referencias

Díaz, F. y Hernández G. (2010). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo Una interpretación constructivista.* (3ra ed). México: McGraw Hill.

Gea, M. Batanero, C. Contreras, J. y Arteaga, P. (2017). *Paradojas como recurso didáctico en la probabilidad.* Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 30, 385-393. Recuperado de http://clame.org.mx/uploads/actas/alme30.pdf

Godino, J. (2009). *Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas.* Revista Iberoamericana de Educación Matemática. 20, 13-31.

Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/eos/JDGodino%20Union_020%202009.pdf

Mohamed, N. (2012). *Evaluación del conocimiento de los futuros profesores de educación primaria sobre probabilidad.* (Tesis doctoral en didáctica de la matemática). Universidad de Granada. España

Morin E. (1999). *Los siete saberes necesarios para la educación del futuro.* Editorial Santillana. Recupera de http://unesdoc.unesco.org/images/0011/001177/117740so.pdf

Osorio, A. (2012). *Estadística y Probabilidad. Módulo 5* Diplomatura de especialización en Didáctica de la Matemática para la Educación Primaria *PUCP* Lima.

Osorio, A. (2012). *Análisis de la idoneidad de un proceso de instrucción para la introducción del concepto de probabilidad en la Enseñanza Superior*. (Tesis de maestría en Enseñanza de las Matemáticas). *Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima, Perú. Recuperado de* URI: http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/4658

Osorio, A y Advincula, E. (2015). *Strengthening the basic knowledge of statistics and probability for teachers of basic education*. En *IASE Satellite Conference 2015* . IASE. Recuperado de: http://iase-web.org/Conference_Proceedings.php?p=Advances_in_Stats_Education_2015

Paucar, E. (2015). *El uso de situaciones de incertidumbre de la vida cotidiana para verificar el uso de noción de suceso aleatorio desde la teoría de las situaciones didácticas.* (Tesis de maestría en Enseñanza de las Matemáticas). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú. Recuperada de http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/6746

Perú, Ministerio de Educación (2016). *Programa Curricular de Educación Primaria. Lima. Recuperado de* http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/programa-primaria-16-marzo.pdf

Vargas, G. y Guacheta, E. (2012). *La pregunta como dispositivo pedagógico.* Recuperado de https://profesorvargasguillen.files.wordpress.com/2012/11/la-pregunta-como-dispositivo-pedagc3b3gico.pdf

Vásquez, C y Alsina A. (2014). *Enseñanza de la Probabilidad en Educación Primaria. Un desafío para la Formación Inicial y Continua del Profesorado.* NUMEROS, 85, 5-23.

Volver al índice de autores

1.4. Talleres

1.4.1. Gestión de datos: estudio y resolución de problemas de control de calidad y eficiencia de procesos mediado por software minitab

Jesús Vilchez Guizado
Julia Ángela Ramón O.
Universidad Nacional Hermilio Valdizán, Huánuco, Perú

Resumen

Este taller teórico-práctico busca en los participantes comprender y aplicar la teoría estadística en la gestión de procesos y mejora de la calidad, mediante la resolución de problemas de contexto, teniendo como herramienta de procesamiento y presentación de resultados el Minitab. La metodología a seguir será el constructivista de aprendizaje interactivo sustentado en el tratamiento de datos mediado por el software estadístico, con énfasis en la presentación e interpretación de los resultados. El taller se inicia con la dación de algunas pautas referidas a la metodología Six Sigma y eficiencia de procesos centrado en datos contextualizados. Luego, se continuará con un trabajo interactivo y dinámico las etapas de medición, análisis, mejora y control en la búsqueda de la eficiencia de los procesos, incidiendo en la interpretación de los resultados obtenidos a partir de los datos fácticos. Durante el taller se proporcionará guiones orientados a la ejecución de las tareas propuestas para resolverlos en forma interactiva con el Minitab 18. Al finalizar el taller los participantes se empoderarán del uso del software estadístico en la mejora de la calidad mediante la optimización de procesos, en la búsqueda de la calidad de productos y de servicios hasta niveles cercanos a la perfección

Introducción

La estadística es inseparable de sus aplicaciones, y su justificación final es su utilidad en la resolución de problemas de la realidad y de la propia estadística. Por otro lado, hay que diferenciar entre conocer y ser capaz de aplicar un conocimiento. La habilidad para aplicar los conocimientos estadísticos es frecuentemente mucho más difícil de lo que se supone, porque requiere no sólo conocimientos técnicos (tales como preparar un gráfico o calcular un promedio), sino también conocimientos estratégicos (saber cuándo hay que usar un

concepto o gráfico dado). En la mayoría de los casos, los problemas y ejercicios que se tratan durante el estudio de la estadística son conocimientos técnicos, mientras que los proyectos incluyen también conocimientos estratégicos, y aumentan la motivación del estudiante (Anderson y Loynes, 1987).

Según sostiene (Jiménez, 2010) la competencia estadística es el Proceso mediante el cual se implementan métodos y procedimientos para recolectar, sistematizar y analizar diferentes tipos de datos, así como para comprender y abordar fenómenos probabilísticos y realizar inferencias estadísticas que sirvan como instrumentos de juicio en la toma de decisiones y en la comprensión de los fenómenos económicos, políticos, sociales y del ejercicio profesional. En términos de cobertura, cumplimiento, interpretabilidad, oportunidad, transmisión de datos y metadatos para abordar aspectos del Marco de Calidad sustentado en actividades Estadísticas.

El pensamiento estadístico es importante y necesario para el desarrollo de una cultura estadística e investigativa, haciendo uso de los recursos que ofrece la tecnología para el tratamiento de datos. Según (Gutiérrez, 2009) este pensamiento se desarrolla bajo tres principios: el primer principio está referido a procesos interconectados para enfatizar que los procesos no operan de manera aislada, más bien, interactúan con el resto del sistema; el segundo principio reconoce que los resultados de todos los procesos son variables; y, el tercer principio está referido a reducir la variabilidad hasta lograr el nivel de calidad Six Sigma. Por ello, el gran reto actual es que las empresas u organizaciones logren profundizar el pensamiento estadístico, ya que eso le ayudará a conocer la realidad (con variación), pero también le permitirá dirigir más adecuadamente sus esfuerzos de mejora, sustentado en datos.

Los datos constituyen el insumo fundamental para la realización de cualquier actividad humana y la producción de la información, en particular el profesor de matemática debe ser capaz de manejar el lenguaje estadístico y tener habilidades para construir argumentos estadísticos basados en hechos (datos), explotando al máximo los beneficios de la estadística, su trascendencia y su alcance, se podrá incrementar su aplicación en la gestión de eficiente de procesos productivos y de servicios.

En la actualidad (era del conocimiento y de la información) debe promoverse el pensamiento estadístico haciendo uso de los recursos que nos brinda la tecnología digital, siendo insoslayable el uso de software especializado como el Minitab que nos ofrece una

amplia gama de herramientas para el procesamiento de datos con fines diversos, poniendo más énfasis en el proceso de evaluación de la calidad de los productos y servicios sustentado en datos de la realidad, mediante gráficas de control, herramientas de planificación y análisis de sistema de medición, capacidad de procesos y análisis de confiabilidad o supervivencia.

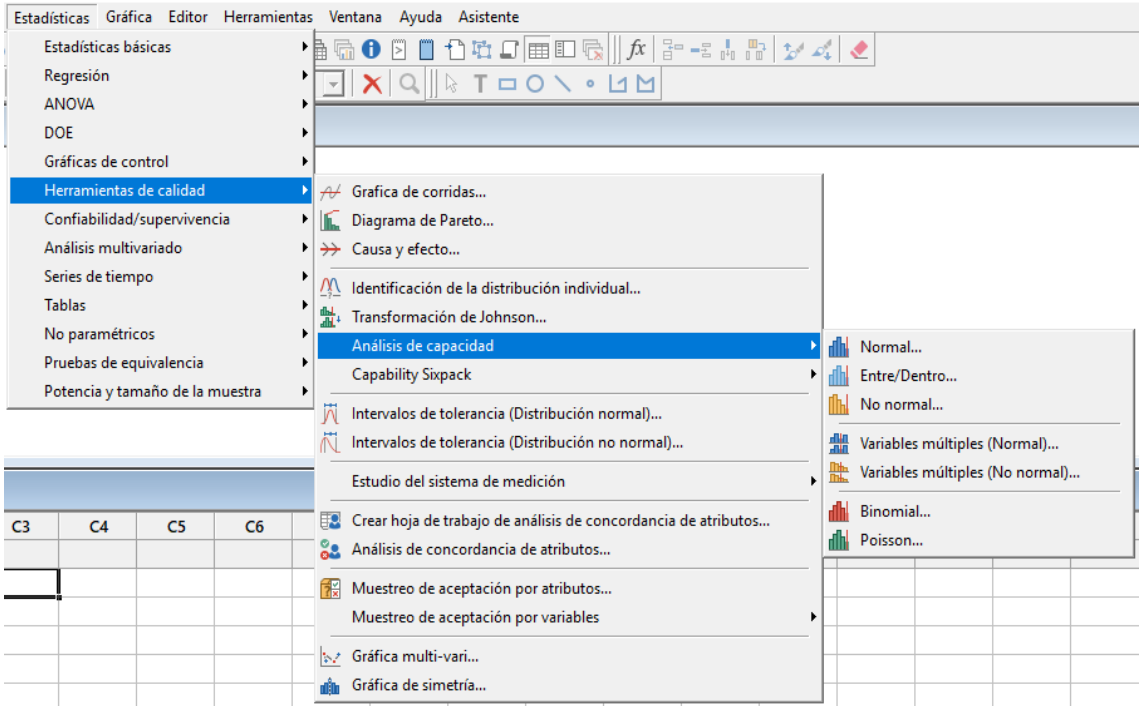


Figura 1. Ventana de trabajo y opciones del software Minitab para el estudio de la calidad.

Un tema de actualidad en la educación superior es la gestión y la búsqueda de calidad permanente de productos y servicios, ello puede ser tratado con objetividad estadísticamente, siendo una de las metodologías para el estudio eficiente de temas relacionados al análisis de calidad con el método Six Sigma, que nos permite identificar el nivel o grado en que los productos o servicios satisfagan la necesidad del cliente, cuyos objetivos de su abordaje incluyen la reducción de tasas de defectos, la fabricación de productos y la eficacia de la dación de servicios dentro de especificaciones previamente fijadas.

La estrategia Six Sigma es modelo de gestión empresarial basado en la mejora de procesos, usando el conocimiento derivado del proceso estadístico de datos, con el fin de determinar

las acciones oportunas para lograr una calidad que represente un índice final de defectos del producto de ***sólo 3.4 defectos por millón de oportunidades***. Para lograr excelentes niveles de producción y de servicios, la medida y la subsiguiente mejora de la calidad de los productos validados a través de los procedimientos de definición, medición, análisis, mejora y control.

Por ello, en una empresa u organización es fundamental analizar primero cuál es su nivel de calidad medido en sigmas en cada una de sus secciones a partir del número de defectos por millón de sus productos o servicios. Si una empresa reduce sus defectos por millón aumentará su nivel de calidad medido en sigmas en esta escala de nivel de calidad. Si logra el nivel 6 Sigma significará que sus productos o servicios tienen sólo 3.4 defectos en cada millón de oportunidades.

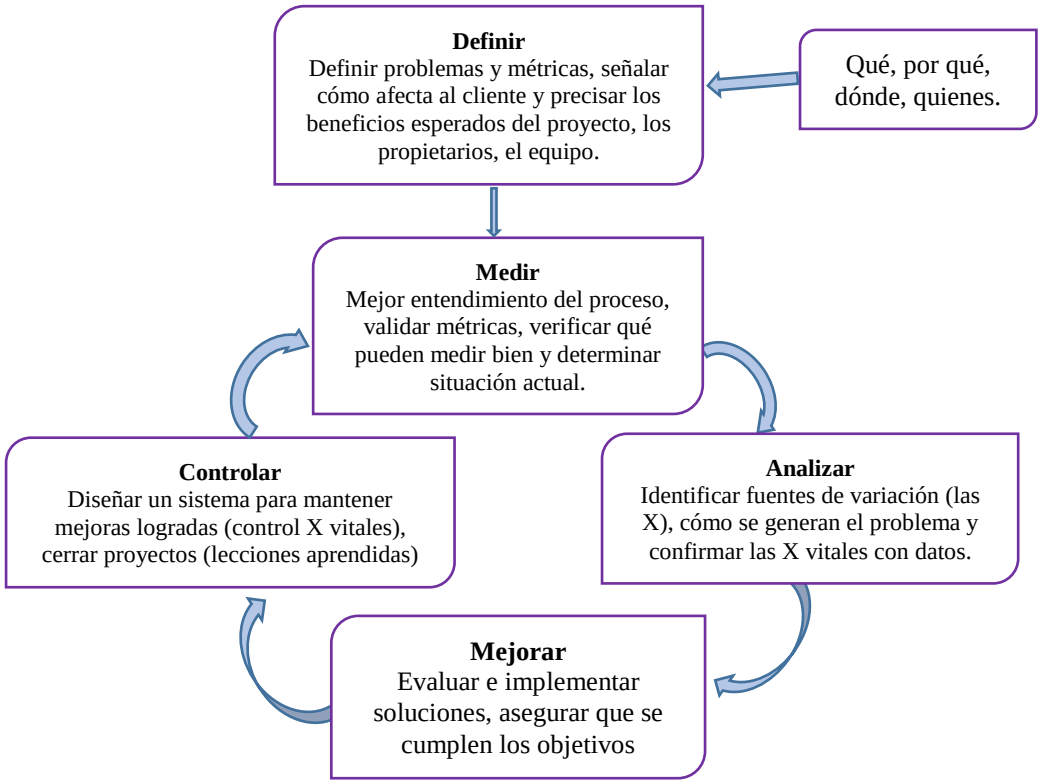


Figura 2. Fases de un proyecto 6σ, adaptación de Gutiérrez y De la Vara, 2009.

Este modelo puede resumirse en cuatro fases básicas, ya que la primera de las mencionadas, consiste en la etapa de diagnóstico, no es específicamente un modelo, ya que es necesario al implantar cualquier sistema, en el formato de la figura 3.

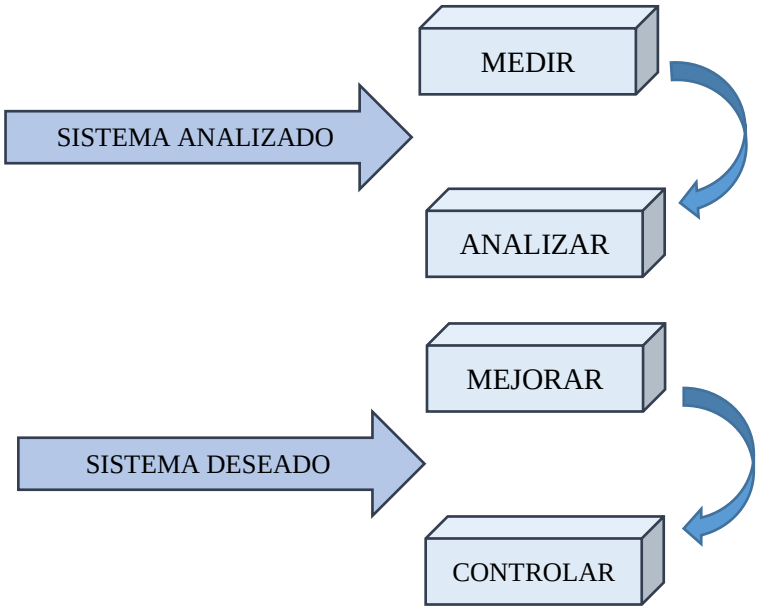


Figura 3. Fases operativas (para el trabajo con datos) de un proyecto 6σ.

Las cuatro fases del proceso Six Sigma se centran en reducir la variación o varianza en los resultados de la producción de los productos o servicios, más que en probar o inspeccionar los productos o servicios una vez terminados.

Propósito y alcance

El presente taller sobrepasa el estudio tradicional de la estadística durante la formación del docente de matemática, y tiene como propósito facilitar el tratamiento de datos conectadas al uso de la tecnología para el estudio y gestión de calidad. Sustentado en el desarrollo de capacidad para la búsqueda, manejo y exposición de información relevante de diversas fuentes, a través del modelado y análisis de datos provenientes del contexto que exige uno conocimiento teórico del tema, una elevada capacidad de abstracción, y el razonamiento crítico para hacer interpretaciones y establecer conclusiones y soluciones con rigor científico, haciendo uso pertinente de las herramientas del software Minitab.

El estudio se centrará en el tratamiento estadístico de la gestión de procesos y de la calidad sustentado en el tratamiento de datos: Descripción y síntesis de datos en forma numérica y gráfica; Ajuste de modelos estadísticos y de investigación educativa, a través de herramientas adecuadas; Análisis de resultados, interpretación y validación de modelos a

través de la interpretación, el ajuste y las diferencias entre ellos; Extracción de conclusiones analizando su utilidad y/o proponiendo la necesidad de otras orientaciones del estudio; Presentación y comunicación de resultados junto a las posibles soluciones a los problemas planteados por los demandantes del estudio en contextos diversos.

Para cumplir con los propósitos mencionados, se organizan los contenidos, criterios de evaluación en dos bloques: el primero, centrado en los procesos, métodos y actitudes frente al Software, en donde el participante realiza actividades interactivas con el Minitab; y el segundo, centrado en las aplicaciones de la estadística a estudios descriptivos, analíticos e inferenciales que se requiere para la mejora de procesos y la evaluación de la calidad.

El taller está orientado al logro de los siguientes objetivos:

Interactuar con los problemas que se plantean sustentado en datos provenientes del contexto y producidos en a situaciones concretas con modos propios de la actividad estadística, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista, la perseverancia en la búsqueda de soluciones, la precisión y el rigor en la presentación de los resultados, la comprobación de las soluciones, etc.

Aplicar los conocimientos estadísticos para identificar, procesar, comprender y analizar datos, utilizando métodos y procedimientos estadísticos para interpretar la realidad de manera crítica, representarla de forma gráfica y numérica, formarse un juicio y sostener conclusiones desde los resultados fácticos para la toma de decisiones.

Promover el desarrollo del pensamiento estadístico superior mediante el tratamiento e interpretación de datos, que potencien las competencias estadísticas a través del uso de la metodología Six Sigma a través de sus fases de medir, analizar, mejorar y controlar la calidad haciendo uso del software estadístico Minitab, en los estudiantes y profesores del área de matemática.

Método

El campo de la estadística proporciona principios y metodología para recopilar, procesar, interpretar los resultados sobre los datos provenientes de la variable en estudio. También sirve para sacar conclusiones y toma de decisiones de los hallazgos obtenidos en el estudio.

La propuesta de trabajo, se llevará a cabo en el IX Congreso sobre la Enseñanza de la Matemática con sede en la Universidad Nacional de Huancavelica. El taller se ejecutará durante dos sesiones, donde se aplicarán una serie de elementos y herramientas que podrán contribuir al desarrollo del pensamiento estadístico de los participantes, mediado por el software estadístico Minitab en el proceso de mejoramiento de procesos y el control de calidad a través de actividades interactivas, evaluaciones y actividades con apoyo del instructor.

En la primera sesión se dará una introducción control de calidad y la eficiencia de procesos, así como las etapas de la metodología Six Sigma; en la segunda sesión se realizarán actividades interactivas resolviendo problemas con datos de contexto, teniendo en cuanta las etapas de medición, análisis, mejora y control de procesos en forma interactiva mediada por el software estadístico, al final de la actividad se administrará una evaluación sobre algunos aspectos del taller con la finalidad de acoger opinión de los participantes.

Durante el taller, el docente tiene la función de: orientador, promotor y facilitador del desarrollo competencias estadísticas en el participante, a través de la dirección del trabajo interactivo en el laboratorio, haciendo del participante un sujeto activo y autónomo, consciente de ser responsable en el proceso de su aprendizaje; asimismo, tiene en cuenta los distintos ritmos y nivel de experticia en el manejo de recursos digitales para realizar trabajos interactivos y colaborativos, potenciando en los participantes la motivación por el estudio de la estadística a partir de datos del contexto, el reconocimiento y valoración de ellas en la vida cotidiana, en la realización de tareas o situaciones-problema, con uso pertinente de conocimientos, destrezas, actitudes y valores, para la resolución de problemas de calidad desde la metodología Six Sigma.

Desde la perspectiva del estudiante, El trabajo interactivo con el ordenador, mediado por el Minitab, favorece la resolución de problemas; desarrolla su empoderamiento con la tecnología, paradigma de aprendizaje, en una nueva manera de aprender de forma autónoma, desarrollando habilidades de buscar, observar, analizar, experimentar, comprobar y rehacer la información, realizar cálculos, consultas, comunicación e intercambio de información obtenidos a partir de los datos con procedimientos estadísticos.

Secuencia de actividades del taller

El taller está organizado para SEIS actividades secuenciales, con duración de 180 minutos que se dispone, las dos primeras actividades consisten en exposición teórica de contenidos y las cuatro restantes, de actividades interactivas con el Minitab.

ACTIVIDAD 1. Explicación de la metodología Six Sigma, sus fases y su importancia en la gestión de la calidad de productos y de servicios. Luego se da una explicación del interfaz de trabajo con el Minitab, dando una breve explicación de las principales herramientas que se utilizarán durante el taller.

ACTIVIDAD 2: **Fase de Definición**, se realiza una Investigación histórica: Éxitos y Fracasos en la ejecución de proyectos, las mismas que deben ser evaluados por la dirección de calidad para evitar la infrautilización de recursos. Se definen problemas y métricas, señalar cómo afecta al cliente y precisar los beneficios esperados del proyecto, los propietarios, selección del equipo más adecuado para el proyecto, asignándole la prioridad necesaria. Se da a través de tres acciones: identificar, investigar y traducir.

Identificar	Investigar	Traducir
Realizar un esquema o un listado de los clientes externos e internos. Expertos o críticos especializados en el tema. Los clientes propietarios.	Recolección de datos estadísticos del segmento de mercado a analizar. Recopilación de información mediante técnicas de muestreo. Despliegue de medios para obtener información a través de datos cualitativos y cuantitativos.	Las características de calidad de un bien o servicio que satisfaga al cliente. Entregables del producto o servicio final.

ACTIVIDAD 3: **Fase de Medición** consiste en identificar los requisitos clave de los clientes, identificar los procesos internos que influyen en las características críticas de la calidad (CTQ), definidos como tales por los clientes, y medir los defectos generados relativos a éstas. A partir de esta caracterización se define el sistema de medida y la capacidad del proceso para para su mejor comprensión, validar métricas, verificar qué pueden medir bien y determinar situación actual. Las herramientas estadísticas de esta etapa, destacan: histograma, *estadísticas descriptivas, gráfica de corridas, índice de capacidad y desempeño y de distribución de probabilidad.*

Ejercicio 1. Cálculo de medidas estadísticas y de capacidad de proceso para la muestra para una prueba de aptitud a la lectura aplicado a 40 estudiantes con calificativos de cero a cien.

15	88	35	78	91	55	42	44	65	63	77	45	59	66	78	39	88	66	71	27
83	73	72	40	30	53	70	80	85	90	94	55	32	45	39	96	57	75	53	84

Resultados

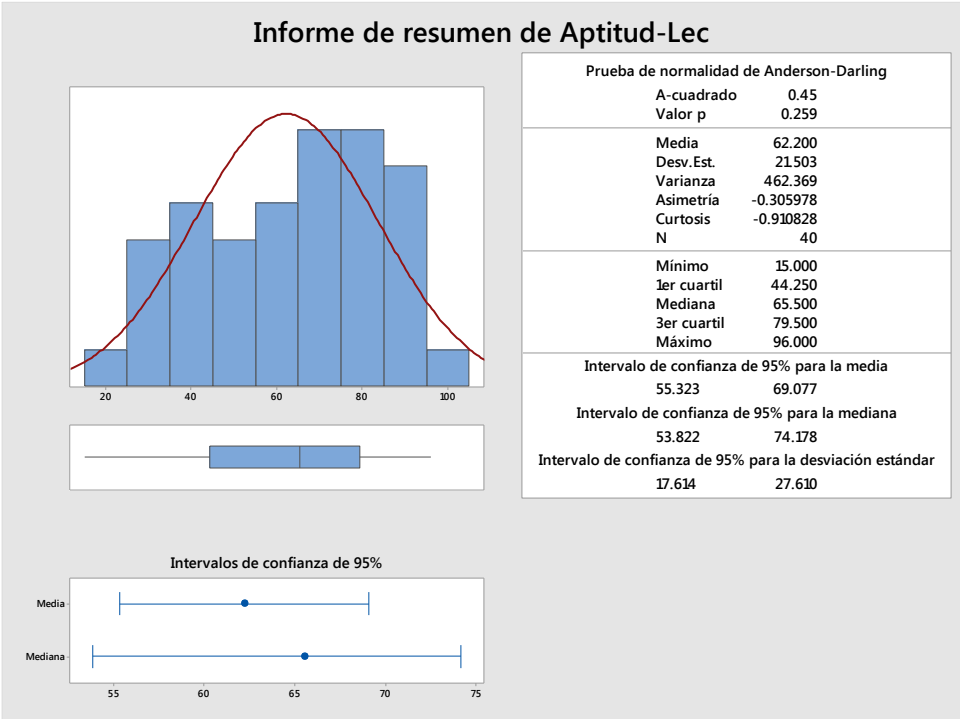


Figura 4. Principales estadísticos y gráfica de histograma para la variable aptitud lectora.

ACTIVIDAD 4: **Fase de Análisis**, se evalúa y analiza los datos de resultados actuales e históricos. Se desarrollan y comprueban hipótesis sobre posibles relaciones causa-efecto utilizando las herramientas estadísticas pertinentes. De esta forma el equipo confirma los determinantes del proceso, es decir las variables clave de entrada o "pocos vitales" X que afectan a las variables de respuesta del proceso Y, para identificar fuentes de variación (las X), cómo se generan el problema y confirmar las X vitales con datos. Las herramientas

estadísticas para el análisis destacan: *Diagrama de Ishikawa*, *análisis de regresión, estimación de intervalos de confianza, prueba de hipótesis y análisis de varianza.*

Ejercicio 2. Las ventas (en miles de Soles) y las ganancias (en miles de Soles) de 12 tiendas de rubro de ferretería al mes se resumen en el siguiente cuadro:

Ventas	55	18	22	63	51	44	20	15	28	48	33	58
Ganancia	5.5	4.2	2.5	7.0	6.2	4.5	3.3	2.7	4.7	8.4	6.6	8.5

Asuma como variable independiente ventas y variable dependiente ganancias: a) Trace el diagrama de dispersión, b) Calcule el coeficiente de correlación e interprete, c) Evalúe el coeficiente de determinación e interprete, d) Determine la ecuación de regresión, e) Predecir la ganancia para una venta de 10 y 67 nuevos soles.

Resultados

Análisis de regresión: Ganancia vs. Ventas

La ecuación de regresión es
Ganancia = 1.729 + 0.09528 Ventas

Correlación: Ventas; Ganancia

Correlaciones

Correlación de Pearson	0.801
Valor p	0.002

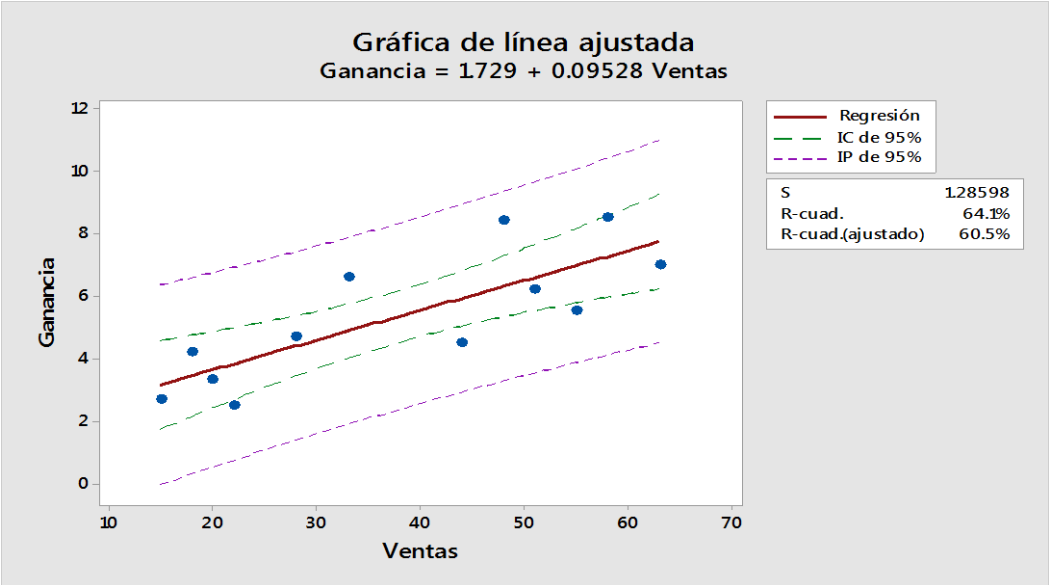


Figura 5. Gráfica de línea de regresión y de intervalos de confianza y predicción, para ventas vs ganancia.

Ejercicio 3. Los calificativos obtenidos en dos grupos de estudiantes en la asignatura de estadística, se clasifican por género:

M: 12, 15, 13, 17, 11, 16, 14, 12, 16, 10, 18, 15, 14, 16.

V: 13, 11, 10, 14, 16, 13, 17, 11, 15, 13, 14, 12, 16

¿Se puede afirmar que las mujeres y varones tienen promedios diferentes, un nivel de significancia de 4%?

Resultados:

Estimación de la diferencia		Prueba		
	IC de 96% para la	Hipótesis nula	$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$	
Diferencia	diferencia	Hipótesis alterna	$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$	
0.753	(-1.130; 2.635)	Valor T	GL	Valor p
		0.87	24	0.394

Conclusión: los promedios de calificación de las mujeres y los varones son aproximadamente iguales, con un nivel de confianza del 96%.

ACTIVIDAD 5: **Fase de Mejora,** procura determinar la relación causa-efecto (relación matemática entre las variables de entrada y la variable de respuesta de interés) para predecir, mejorar y optimizar el funcionamiento del proceso; también, para determinar el rango operacional de los parámetros o variables de entrada del proceso para asegurarse de corregir o reducir el problema; entre los recursos a utilizar en esta etapa son: *Diagrama de dispersión y correlación lineal, Regresión lineal simple, Regresión lineal múltiple, Optimización de procesos* (*superficie de respuesta*) *y Evaluación de las mejoras*.

Ejercicio 4. Los tiempos que demoran los estudiantes en resolver un problema matemático son: 15,5; 14,8; 13,0; 13,5; 14,6; 15,6; 15,4; 13,5; 15,3; 14,2; 14,7; 15,6; 15,3; 14,4; 16,7; 13;9; 16,5; 16,2; 12,5; 16,3; 17,5; 15,8; 16,2; 17,2; 16,5; 15,9; 14,0; 13,6; 16,0; 17,8.

Realizamos los ajustes de la capacidad a nivel sigma teniendo **como objetivo resolver el problema en 15 minutos**, mejorando la línea base, a partir de la *figura 6*. Los índices de desempeño y de capacidad del sistema.

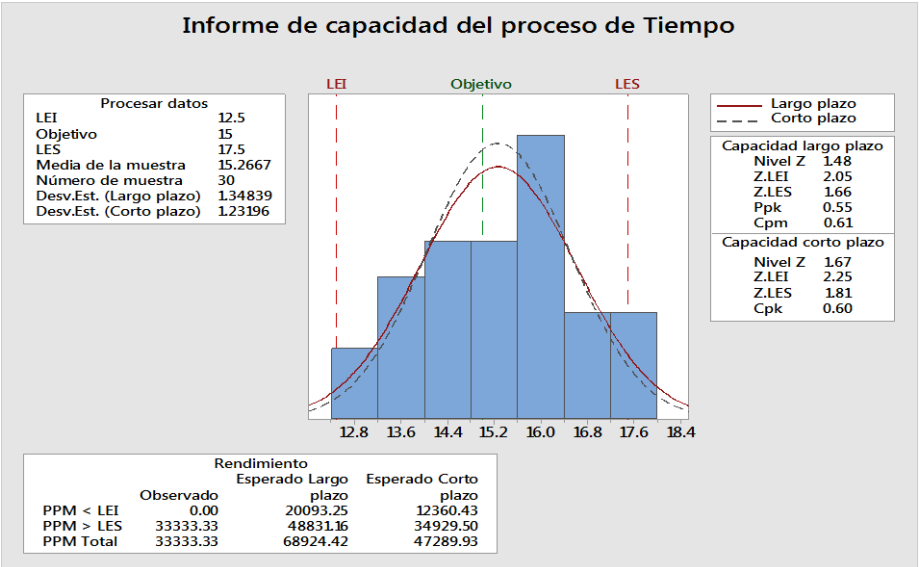


Figura 6. Gráfica de mejora de procesos para Tiempo empleado en resolución de un problema.

Ejercicio 5. Un docente de matemática realiza el siguiente experimento para determinar la mejor combinación de factores a la hora de administrar una prueba de matemática. El

objetivo Y deseado de la prueba es la obtención de notas que dependerá de tres factores X a dos niveles, que son:

A: Tiempo en resolver el cuestionario: 30 a 45 minutos.

B: Temas: álgebra y geometría.

C: Aprendizaje: Conceptual y procedimental.

No se tiene en cuenta generación de bloques, pero sí réplicas por experimento.

Solución:

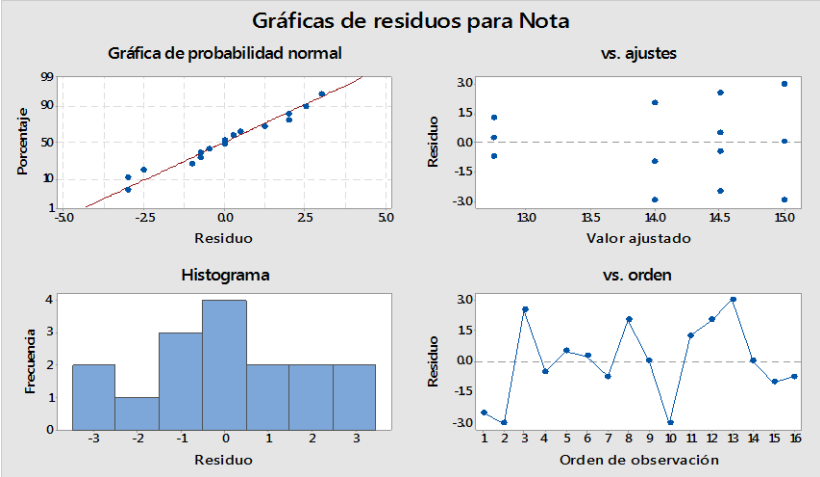


Figura 7. Gráfica de residuos para la variable Nota con interacción de tres factores.

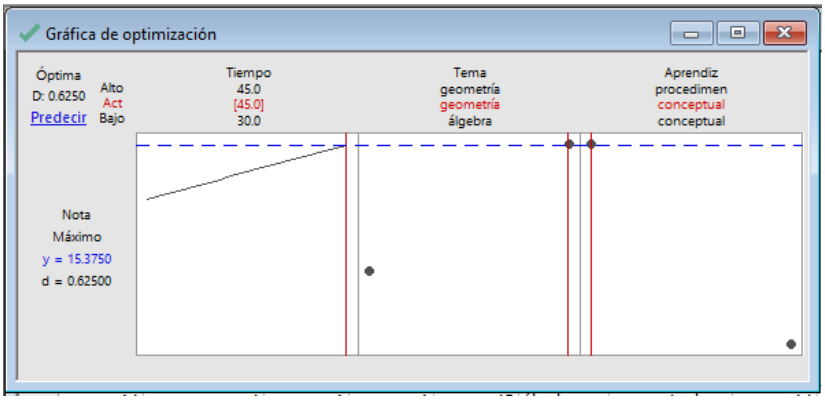


Figura 8. Gráfica de maximización para variable. Nota con interacción de tres factores.

ACTIVIDAD 6: **Fase de Control**, consiste en diseñar y documentar los controles necesarios para asegurar que lo conseguido mediante el proyecto Seis Sigma se mantenga una vez que se hayan implantado los cambios. Cuando se han logrado los objetivos y la misión se da por finalizada con el diseño de un sistema para mantener mejoras logradas (control X vitales), cerrar proyectos (lecciones aprendidas). Las acciones de control se darán en tres niveles: proceso, documentación y monitoreo. Entre las herramientas de esta fase, destacan: Niveles de control y el plan de control, Control estadístico de procesos, Cartas de control (continuas y de atributos), Límites de control *vs.* Tolerancias, etc.

Ejercicio 6. En un centro de salud se registran las edades de los pacientes atendidos por emergencia en los tres turnos que brinda. Se selecciona 20 muestras de cada turno. Las edades en años son las siguientes.

Turno M: 44, 39, 38, 20, 34, 28, 40, 36, 32, 29, 11, 51, 30, 22, 11, 49, 20, 26, 26, 34.

Turno T: 41, 31, 16, 33, 33, 23, 15, 36, 29, 38, 22, 34, 16, 21, 28, 25, 31, 18, 47, 29.

Turno N: 19, 21, 25, 26, 36, 39, 34, 34, 30, 34, 34, 39, 30, 35, 38, 36, 33, 36, 26, 32.

a) Determine los límites de control para la media y la amplitud de variación

b) Trace los límites de control para la media de la edad y para la amplitud de variación.

c) ¿Hay algunos puntos en el diagrama de media o de amplitud de variación, que están fuera de control? Comente respecto al diagrama.

Resultados de la prueba para la gráfica C de Edades de pacientes

PRUEBA 1. Un punto fuera más allá de 3.00 desviaciones estándar de la línea central.

La prueba falló en los puntos: 11; 12; 15; 16

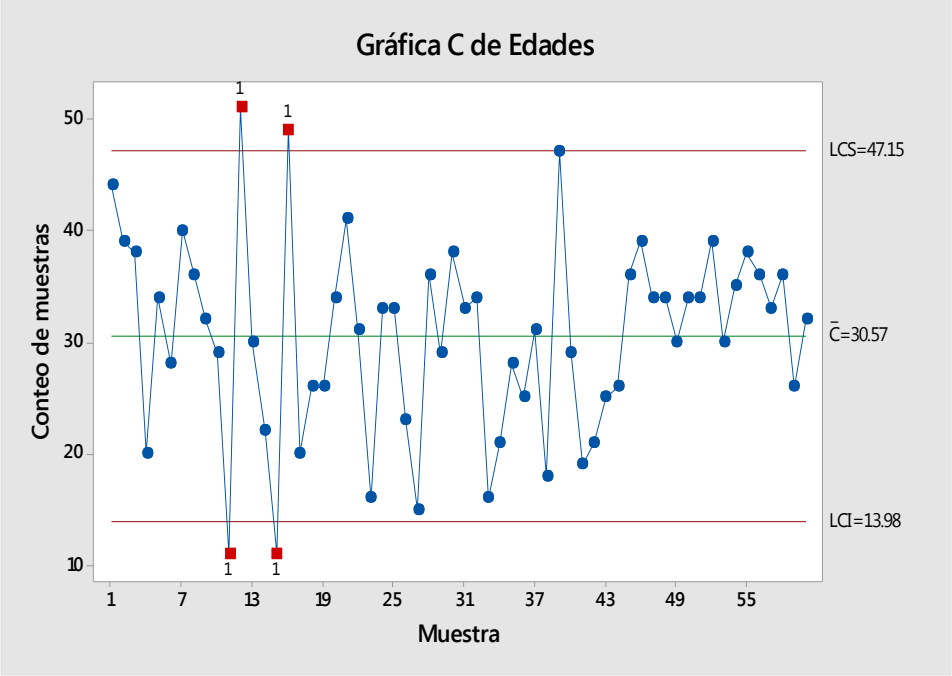


Figura 9. Gráficas de control C para edad de pacientes atendido pos turnos.

Resultados

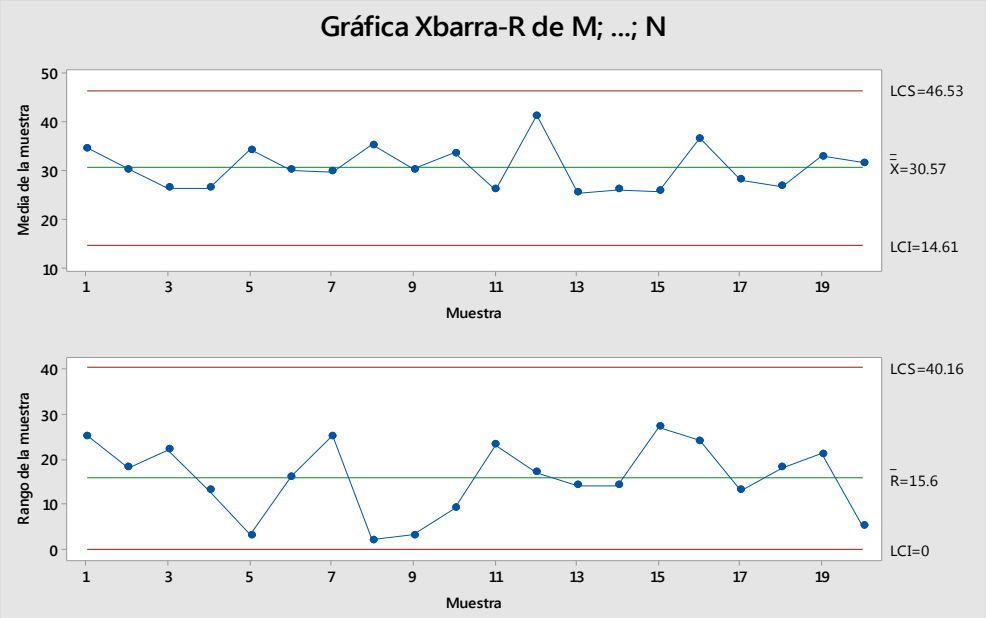


Figura 10. Gráficas de control para la media y la variabilidad de la edad de pacientes.

Referencias

Anderson, C. W. y Loynes, R. M. (1987). *The teaching of practical statistics*. New York: Wiley.

ANUIES (2000a). *La Educación Superior en el Siglo XXI. Líneas estratégicas de desarrollo. Una propuesta de la ANUIES*. Mexico: ANUIES

Azcarate, P., Cardeñoso, J.M y Porlàn, R.(1998). Concepciones de futuros profesores de primaria sobre la noción de aleatoriedad. Enseñanza de las Ciencias.

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística. grupo de investigación en educación estadística departamento de didáctica de la matemática*. Granada: Universidad de Granada.

Gutierrez, H y De la Vara, R. (2009). *Control estadístico de calidad y seis sigma*. México D.F. McGrawHill Educación.

Jimenez, M. (2010). *Competencias en matemática y estadística.* Santiago: INACP. Recuperado de https://www.inacap.cl/tportal/portales/tp4964b0e1bk102/ uploadImg/File/competenciasMatematicasEstadistica.pdf

Merriam, S. (2002). *Qualitative Research in Practice. Examples for Discussion and Analysis*. New York: Jossey-Bass.

Osorio, A. (2012). *Análisis de la idoneidad de un proceso de instrucción para la introducción del concepto de probabilidad en la enseñanza superior*. Tesis para optar el grado de Magister en Enseñanza de las Matemáticas PUCP.http://tesis. pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/4658.

UNESCO (2017). *Las TIC en la educación.* Recuperado de: http://www.unesco.org/ new/ es/unesco/themes/ icts/m4ed/

Volver al índice de autores

1.4.2. Argumentación en la resolución de problemas de geometría

Ángel Homero Flores S, Colegio de Ciencias y Humanidades-UNAM, México
Isabel Torres Céspedes, Universidad de Lima, Perú

Resumen

El estudio de la geometría en la escuela tiene potencial para fomentar en los estudiantes su pensamiento reflexivo y su habilidad para resolver problemas dentro y fuera del ámbito escolar. Uno de los principales obstáculos para que se dé lo anterior es el conocimiento matemático y la concepción de matemática de los profesores de los niveles básicos (preescolar-bachillerato); otro de los obstáculos es la desaparición paulatina que ha venido sufriendo el estudio de la geometría en las escuelas y el tratamiento de la demostración matemática como un contenido más a "enseñar". Esta tendencia se podría revertir si el profesor de matemática de los niveles básicos desarrolla su capacidad de pensamiento reflexivo y su habilidad para resolver problemas de geometría poniendo especial énfasis en la justificación de sus resultados. El propósito del taller es hacer una reflexión sobre el papel de la argumentación en la validación de resultados en actividades de resolución de problemas geométricos y sobre la manera en que éstos fomentan el pensamiento reflexivo; las actividades se llevarán a cabo siguiendo los lineamientos de una didáctica centrada en el aprendizaje en la que se privilegia el trabajo colaborativo y las discusiones grupales.

> *Si los niños en la escuela no consiguen adquirir una concepción de la geometría y del razonamiento a través del curso de geometría, entonces no obtienen nada, excepto, quizá, una incapacidad permanente para pensar correctamente y una propensión a llegar a conclusiones sin ningún sustento en la razón o en la cordura.* (Harold P. Fawcett, 1938)

En la obra, *La naturaleza de la demostración* (*The nature of proof*, Fawcett, 1938,), se afirma que el propósito del estudio de la demostración geométrica es cultivar el *pensamiento crítico y reflexivo*; después de una encuesta sobre la enseñanza de la geometría aplicada en Estados Unidos, el Tercer Comité sobre Geometría llegó a la conclusión de que

> "*…existe un acuerdo casi unánime en que la geometría demostrativa puede enseñarse de manera tal que desarrolle el poder de razonar lógicamente con más rapidez que otras materias escolares, y que el grado de transferencia de este entrenamiento lógico a situaciones fuera de la geometría es una medida justa de la eficacia de la educación. Sin embargo, la mayoría de los participantes se inclinan hacia una misma opinión: la pregunta, ¿los maestros de geometría por lo general enseñan de manera tal que se asegura la transferencia de aquellos métodos, actitudes y apreciaciones que comúnmente se dice que son más fáciles de transferir?, provoca un casi unánime y desencantado 'No'*". (p. 8, traducción propia).

En la cita, la geometría demostrativa es aquella que pone el énfasis en el planteamiento de teoremas y su demostración, en oposición a la geometría fáctica que sólo se encarga de la aplicación de los teoremas y en la resolución de problemas geométricos. El pasaje anterior apunta a dos cuestiones fundamentales en la problemática del estudio de la geometría en la escuela fundamental (nivel preescolar hasta preuniversitario):

- su carácter formativo como vehículo para fomentar un pensamiento reflexivo; y
- el problema de la formación docente.

Existen estudios y trabajos que resaltan la importancia de la demostración y las dificultades que tiene la escuela para desarrollar en los alumnos el pensamiento deductivo que es uno de los requisitos necesarios para entender la demostración geométrica y para adquirir la habilidad de hacer demostraciones (Balacheff, 2000; Duval, 1991; Fuys, Geddes y Tischler, 1988; Moore, 1994; Flores 2007, entre otros).

De acuerdo con los resultados de las investigaciones referidas, se infiere que las dificultades en el aprendizaje de la demostración tienen su origen en

- la concepción de la matemática en alumnos y profesores;

- la transición de una matemática práctica a una matemática formal;
- la forma en que se plantea su aprendizaje en los programas;
- el conocimiento matemático del profesor sobre la materia; y
- la capacidad del profesor para utilizar un razonamiento deductivo en la argumentación matemática y su habilidad para demostrar.

Nuestra posición es que la argumentación matemática, y la demostración como parte de ella, no son temas puntuales que se deban "enseñar" en el aula. Sino que son parte del proceso de validación de resultados en la resolución de problemas. Es el estudiante quien debe hacer la matemática con el fin de aprenderla (Flores 2010). Según Fawcett (1938):

> "Si el estudiante va a tener la oportunidad de *razonar a su modo sobre el contenido de la geometría*, no se debería plantear por adelantado ningún teorema, pues dicho planteamiento fija, en cierto grado, la dirección de su razonamiento y le priva del descubrimiento de las relaciones matemáticas que controlan la situación. Mientras que, en algunos casos, es necesaria la asistencia del profesor, éste debería considerarse sólo un guía que lleva al descubrimiento y desarrolla en el estudiante el poder creciente de hacer descubrimientos propios" (p. 62; traducción propia).

Lo anterior está en la base de una didáctica centrada en el aprendizaje, en la que el profesor pone las condiciones para que se dé el aprendizaje; monitorea y coordina las actividades que el estudiante lleva a cabo y organiza las actividades de evaluación que permitirán, entre otras cosas, mejorar el aprendizaje del estudiante mediante la retroalimentación de los resultados de la evaluación. Parte de la metodología de este tipo de didáctica implica que el estudiante debe validar los resultados obtenidos en la resolución de problemas a través de un proceso de argumentación (Flores 2017).

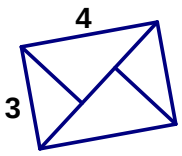
En este contexto, una argumentación válida que descansa en la teoría matemática y hace uso de un razonamiento deductivo se le considera una demostración, ésta puede servir para explicar un resultado (aclarar el por qué y cómo surge); para convencer a otros de la validez de un resultado; para comunicar resultados; y para sistematizar los resultados dentro del cuerpo de una teoría, de acuerdo con los planteamientos de Almeida (1995), quien afirma que la demostración en matemáticas es una dialéctica social que se da cuando se tiene la

convicción personal de que algún resultado es verdadero. Todas estas funciones de la demostración matemáticas están bien clasificadas por de Villiers (2002, pp. 4-8) como: verificación o validación, explicación, descubrimiento, comunicación, sistematización y reto intelectual.

En el presente taller se hará una reflexión sobre las implicaciones de una didáctica matemática centrada en el aprendizaje y el papel que juega la argumentación y la demostración en la validación de resultados en resolución de problemas geométricos. Para cumplir con el anterior propósito se resolverán algunos problemas de geometría de nivel medio y medio superior y se hará un debate acerca la forma de resolverlos y su potencial en el desarrollo del pensamiento reflexivo.

A continuación, se presentan los problemas que se revisarán:

1.- Tenemos una hoja rectangular de papel, que fue doblada como se muestra en la figura, de modo que se forma un rectángulo de 3 x 4 cm.



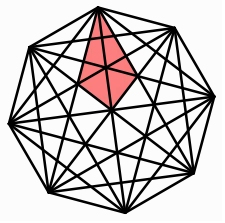
¿Qué dimensiones tiene la hoja?

¿Cualquier hoja rectangular se puede doblar de esa manera o sólo algunas?

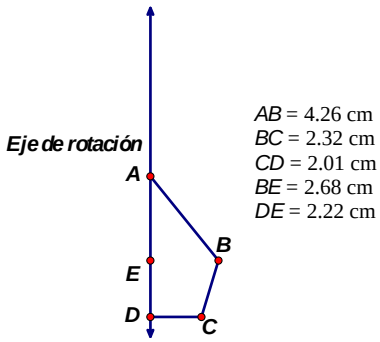
Explica tus respuestas.

2.- Encuentra una altura del triángulo formado por los puntos (5, 6), (-3, -2) y (5, -7). Explica paso a paso el procedimiento que seguiste. ¿Cómo aseguras que tu procedimiento fue el correcto?

3.- En el octágono regular de de la figura se han trazado todas sus diagonales. Si tenemos la longitud de sus lados, ¿es posible encontrar el área del cuadrilátero resaltado? ¿Qué tipo de cuadrilátero es? Justifica tu respuesta.



4.- Encuentra el volumen del sólido de revolución que se forma al girar la figura sobre su eje. El segmento EB es paralelo al segmento DC. Explica por qué el resultado que obtuviste es correcto.



Referencias

Almeida, D. (1995). Mathematics Undergraduates' Perceptions of Proof. *Teaching Mathematics and its Applications*, vol. 14, num. 4, pp. 171-177.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*, Una Empresa Docente, Bogotá, Colombia.

De Villiers, M. (1999), *Rethinking proof with the geometer's Sketchpad*, Key Curriculum Press, Emeryville, CA.

Duval, R. (1991). Structure du Raisonnement Deductif et Apprentissage de la Demonstration. *Educational Studies in Mathematics*, 22, pp. 233-261.

Flores, A. H. (2007). Esquemas de argumentación en profesores de matemáticas del bachillerato. *Educación Matemática*, vol. 19, núm. 1, pp. 63-98.

Flores, A. H. (2010). Learning Mathematics, Doing Mathematics: a learner centered teaching model. *Educaçao Matemática e Pesquisa.* v. 12, n. 1, pp. 74-87.

Flores, A. H. (2017). Pensamiento Matemático y El Quehacer Científico. *Revista Pädi*. n. 1. Universidad Autónoma de Querétaro, México.

Fawcet, H. P. (1938). *The Nature of Proof.* New York: NCTM.

Fuys, D., Geddes, D. y Tischler, R. (1988). *The van Hiele Model of Thinking in Geometry Among Adolescents*, NCTM, Reston, VA.

Moore, R. C. (1994). Making the Transition to Formal Proof, *Educational Studies in Mathematics*, 27, pp. 249-266.

Volver al índice de autores

1.4.3. La formulación y resolución de problemas: herramientas utilizadas en el aula para el desarrollo

Percy Merino Rosario
Olimpia Castro Mora
Tulio Ozejo Valencia
María Elena Marcos Nicho
Oficina de Medición de la Calidad de los Aprendizajes – MINEDU, Perú

Resumen

A partir de los resultados de las últimas evaluaciones de rendimiento estudiantil aplicadas en nuestro país, se cuenta con hallazgos que nos aproximan a los logros y dificultades que tienen los estudiantes para formular problemas matemáticos. Siendo este aspecto importante en la construcción de su aprendizaje, nos proponemos que los docentes valoren la importancia de la formulación de problemas para el desarrollo de las habilidades y conocimientos de los estudiantes, considerándola como un complemento de la resolución de problemas que permite el desarrollo de la creatividad y la motivación en ellos. El taller que está dirigido a docentes de primaria y secundaria, tanto en formación como en servicio, tendrá un carácter activo participativo y práctico. En grupos, los participantes identificarán los principales aspectos a considerar en la formulación de un problema y discriminarán sus variadas estructuras atendiendo a los procesos cognitivos que se movilizan en las diversas situaciones propuestas desde las evaluaciones estandarizadas. Este taller puede dar un valioso aporte a los docentes ya que permitirá equiparar la importancia de la resolución respecto a la formulación de problemas en su práctica pedagógica lo que a su vez permitirá fortalecer el razonamiento y la integración de conocimientos

Propósito del taller.

Nuestros documentos curriculares declaran que el enfoque de Resolución de Problemas es uno de los referentes para el desarrollo de las competencias matemáticas en los estudiantes. Sin embargo, se tergiversa el sentido de este enfoque, cuando se atiende más a la resolución de problemas y poco a su formulación. La naturaleza de dicho enfoque promueve que los estudiantes, de manera autónoma, problematicen matemáticamente situaciones en diversos

contextos, poniendo en práctica sus habilidades, conocimientos y actitudes para resolver un problema, pero también para crearlos, con condiciones e interrogantes que ellos mismos podrán controlar según sus propósitos e intereses.

A partir de los resultados de las últimas evaluaciones de rendimiento estudiantil aplicadas en nuestro país, tales como la Evaluación Censal de Estudiantes (ECE) o la Evaluación Muestral (EM 2013), contamos con hallazgos que nos aproximan a esos logros y dificultades que tienen los estudiantes para formular problemas matemáticos a lo largo de la escolaridad.

Es así que este taller busca que los docentes valoren la importancia de la formulación de problemas como una herramienta eficiente para el desarrollo de habilidades matemáticas en los estudiantes. Tal como refiere, Malaspina (2013), la formulación de problemas fortalece las capacidades para resolver problemas; formular interrogantes; identificar problemas e investigar sobre ellos; establecer conexiones con otros conocimientos, desarrollar la creatividad de los estudiantes y fortalecer su autoestima.

Asimismo, desde la perspectiva del docente, se busca que él sea consciente de la importancia de identificar los procesos cognitivos que se movilizan en la formulación de problemas, de proponer problemas cercanos a las motivaciones de los estudiantes, a sus inquietudes e interrogantes, a sus necesidades y vacíos, con el propósito de generar una secuencialidad de tareas que desafíe gradualmente al estudiante, Malaspina (2013).

Por último, este taller servirá para que los docentes atiendan a la necesidad de fortalecer sus conocimientos disciplinares y didácticos, y así, ante el error, retroalimentar de mejor manera las propuestas de sus estudiantes. Fernández (2007), afirma que la formulación o creación de problemas permite a los estudiantes descubrir su error e identificarlo para evitarlo en la construcción de nuevos conocimientos, generando reflexión sobre el error cometido, y disminuyendo en el docente su ignorancia sobre las dificultades que pueden tener sus estudiantes.

Aspectos metodológicos

El taller estará centrado en la participación activa de los asistentes luego de presentar evidencias teóricas que sustentan la importancia de la formulación de problemas en el proceso de aprendizaje. Este taller estará dirigido a docentes de primaria y secundaria (de

preferencia desde el 4.° grado de primaria hasta el 3.° de secundaria) que se formarían en grupos de trabajo (de hasta 4 participantes), a quienes se les presentará variadas situaciones que han sido propuestas desde la Evaluación Censal de Estudiantes y la Evaluación Muestral, con el objetivo de evidenciar los principales aspectos que caracterizan la estructura de un problema, los tipos de problema que se pueden crear e identificar las condiciones que les permitirá formular, tanto al docente como al estudiante, dichos problemas. Durante el desarrollo del taller, los participantes podrán interactuar y poner en práctica su experiencia para analizar las habilidades y procesos cognitivos que se pondrían en juego al encomendar una tarea de formulación o creación de problemas en sus estudiantes, y asimismo, valorarán el papel que tienen las evaluaciones estandarizadas, no para fortalecer "ensayos" de preparación para una prueba de sistema, sino para desarrollar aprendizajes sólidos de sus estudiantes, atender a los procesos implicados, conocer sus concepciones o creencias, identificar sus dificultades y orientar el error como una oportunidad de aprendizaje.

En la figura 1, se muestra un ejemplo de una situación propuesta en la ECE y que podría ser utilizada para desarrollar habilidades en la formulación de problemas.

La siguiente gráfica nos muestra la relación entre el tiempo que permanece abierto un caño y la cantidad de agua que se va almacenando en un depósito. Observa:

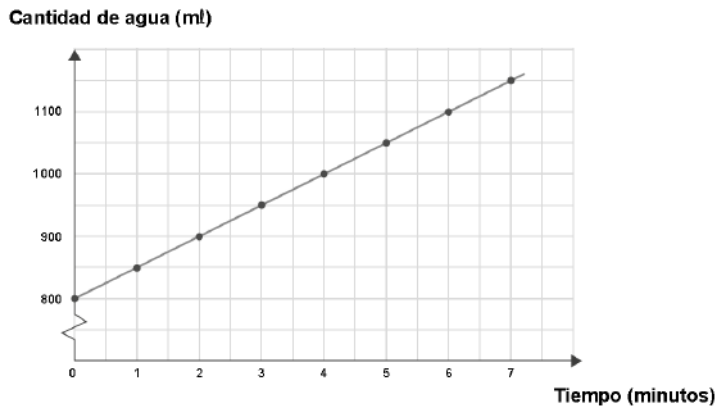


Figura 1. Obtenido del Informe Docente de Matemática ECE 2015- 2. ° Secundaria

A partir de la situación mostrada, se le pide al docente que identifique los elementos y condiciones que se encuentran inmersas en dicha situación. Luego, se le pide que identifique cuáles podrían ser las posibles nociones matemáticas que estarían vinculadas a esta la misma (funciones, proporcionalidad, patrones, etc.), así como, los procesos

cognitivos que el estudiante podría desarrollar a partir de las consignas que se darán para estructurar la formulación del problema. Atendiendo a las habilidades que se quieren desarrollar en los estudiantes y a los conocimientos que se quieren involucrar en la tarea, se les pide realizar actividades para crear situaciones a partir:

- De una respuesta dada.
- Dada algunas condiciones adicionales.
- De argumentos o justificaciones vinculadas a la situación.
- De una pregunta incompleta.
- De una expresión matemática dada…..entre otras.

Finalmente, de actividades similares, el docente podrá reflexionar su práctica pedagógica, la relevancia y la pertinencia de su intervención en el proceso de aprendizaje del estudiante, y la importancia que tiene su labor en una adecuada y oportuna retroalimentación ante las posibles dificultades que tengan sus estudiantes al formular y resolver sus problemas.

Principales resultados.

Concluido el taller, los participantes serán capaces de:

- Valorar la importancia de la formulación de problemas en el proceso de aprendizaje, desde el desarrollo de la creatividad en sus estudiantes, pasando por el uso y la conexión de diversos conocimientos hasta llegar a calar en sus motivaciones e intereses.

- Identificar los elementos y las estructuras que permiten generar situaciones de clase que propicien condiciones adecuadas para la formulación de problemas en sus estudiantes.

- Desarrollar habilidades que le permitan enriquecer sus conocimientos didácticos y disciplinares a través de la formulación de problemas.

Reflexiones.

Este taller puede dar un valioso aporte a los docentes en formación como en servicio, ya que permitirá equiparar la importancia de la resolución respecto a la formulación de

problemas, siendo estos complementarios y necesarios para el desarrollo autónomo de habilidades y conocimientos en los estudiantes.

La formulación de problemas nos permite tener una mirada más cercana del enfoque de Resolución de Problemas ya que representa la naturaleza integradora de la matemática, al problematizar para crear y resolver situaciones en diversos contextos.

La formulación de problemas debe ser un proceso inmerso en la resolución de estos, ya que desde las estrategias que se buscan para resolverlos se pueden crear nuevas situaciones que permiten controlar y dar soluciones a los problemas originales.

La formulación de problemas permite el desarrollo de la creatividad, la habilidad para plantear y hacer uso intencional de sus conocimientos, así como, evidenciar los errores originados por sus creencias, concepciones y las diversas dificultades que aparecen a lo largo de la escolaridad.

Referencias

Fernández, J. (2007). *Apúntate un tanto y tantea el punto. Resolución de problemas Matemáticos* (pp, 85-102). Recuperado el 10 de abril de 2018 en http://www.grupomayeutica.com/documentos/24%20MEC-APUNTATE%20UN%20TANTO%20Y%20TANTEA%20EL%20PUNTO-UIMP.pdf

Ministerio de Educación [Minedu]. (2017a). *¿Qué logran los estudiantes en Matemática?. 2.° y 4.° grados de primaria.* Lima: Autor. Recuperado el 3 de abril de 2018 en: http://umc.minedu.gob.pe/wp-content/uploads/2017/04/Informe-para-Docentes-Matem%C3%A1tica-ECE-2016.pdf

Ministerio de Educación [Minedu]. (2017b). *¿Qué logran los estudiantes en Matemática?. 2.° grado de secundaria.* Lima: Autor. Recuperado el 3 de abril de 2018 en: http://umc.minedu.gob.pe/wp-content/uploads/2017/04/Informe-para-Docentes-Matem%C3%A1tica-ECE-2016-2.%C2%B0-grado-de-secundaria.pdf

Ayllón, M. (2012). *Invención-Resolución de Problemas por alumnos de Educación Primaria*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada. https://hera.ugr.es/tesisugr/2116633x.pdf

Malaspina, U. (2007). *La creación de problemas de matemáticas en la formación de profesores*. Recuperado el 10 de abril de 2018 en: file:///H:/Relme32/formulaci%C3%B3n%20deproblemas%20_malaspina.pdf

Volver al índice de autores

1.4.4. El uso del ciclo PPDAC para la creación de problemas en la gestión de datos

Augusta Osorio Gonzales
Elizabeth Advíncula Clemente
Pontificia Universidad Católica del Perú, IREM, Perú

Resumen

El taller propuesto busca proponer una herramienta para la creación y variación de situaciones problema para la enseñanza de la gestión de datos en los niveles educativos primaria y secundaria. Esta propuesta se basa en el ciclo de investigación empírica (PPDAC), que corresponde a la primera dimensión del Pensamiento Estadístico propuesta por Wild y Pfannkuch (1999), como un método para caracterizar las situaciones problema de la recolección de datos. Consideramos al PPDAC como el punto de partida del trabajo con datos, al igual que los autores, ya que nos permite ordenar adecuadamente los contenidos estadísticos a enseñar en la Educación Básica y comprender claramente sus usos en problemas de la vida cotidiana. El taller pretende que los docentes analicen situaciones problema propuestas para la gestión de datos, propongan variaciones a estos mediante cambios en las etapas del ciclo PPDAC y finalmente creen nuevos problemas basados en las experiencias del uso del PPDAC

Introducción

El Currículo Nacional de la Educación Básica (2016) para la enseñanza en el nivel primario y secundario de Perú incluye cuatro competencias relacionadas con el área de Matemáticas. Una de estas competencias, Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre, busca que los alumnos trabajen con los temas relacionados con la estadística descriptiva. Esta competencia propone que el estudiante analice datos de un tema de interés o estudio, que le permita tomar decisiones, elaborar predicciones razonables y conclusiones respaldadas en la información producida desde los datos recopilados. Para esto el estudiante debe desarrollar la capacidad de recopilar, organizar y representar datos. Pero la gestión de datos no solo tiene relación con el manejo de los datos recolectados, sino también con la difusión de resultados obtenidos desde los mismos datos mediante el análisis, la interpretación y la inferencia.

Nuestro proyecto de investigación se inició en el año 2013, al ganar un primer concurso de investigación del Vicerrectorado de investigación de la PUCP. Los fondos proporcionados por este concurso nos permitieron analizar los conocimientos que tienen los alumnos del nivel primario y secundario en relación a esta competencia. Luego, en el año 2015, al ganar un segundo concurso pudimos trabajar en el diseño y aplicación de talleres de fortalecimiento en estadística y probabilidad para docentes del nivel primario.

Elementos teóricos y metodológicos

En nuestra búsqueda de estrategias para los talleres de fortalecimiento, encontramos la creación de problemas propuesta por Malaspina (2015) como una alternativa que contribuiría a desarrollar el pensamiento estadístico de los profesores. Este autor nos indica que son muchas las tareas que los docentes tienen que proponer a sus alumnos para desarrollar y evaluar las competencias matemáticas, por lo que los docentes no solo deben ser buenos resolviendo problemas sino, además, deben tener la capacidad de seleccionarlos, modificarlos y crearlos con fines didácticos. Adicionalmente, el poco dominio teórico de los profesores del nivel primario en aspectos conceptuales de la gestión de datos nos obligó a buscar propuestas que nos permitieran relacionar: las situaciones problema reales, los conceptos estadísticos y nuestro interés en la creación de problemas. Encontramos en el Pensamiento Estadístico de Wild y Pfannkuch (1999) la propuesta ideal, ya que estos autores investigaron sobre los complejos procesos de pensamiento involucrados en la resolución de problemas de la vida real usando estadística y propusieron una estructura para el desarrollo del Pensamiento Estadístico en la Investigación Empírica.

La propuesta de Wild y Pfannkuch (1999) indica que el objetivo fundamental de la investigación estadística es el aprendizaje en la esfera del contexto. Entonces, el conocer los aspectos de un determinado problema es más que solo recolectar datos sobre este para convertirlos en información, pues también implica conocer adecuadamente la situación contextual que los rodea. Por tanto, el aprendizaje de una situación problema comprende: el poder sintetizar la información recogida, las ideas ya existentes y las nuevas ideas que se puedan proponer durante la investigación del problema.

Wild y Pfannkuch (1999) proponen una estructura de cuatro dimensiones que se entrelazan. Estas dimensiones son las siguientes:

- Dimensión 1: El Ciclo Investigativo. Conformado por las etapas que se siguen en una investigación estadística. Proponiendo como propuesta el modelo PPDAC (Problema, Plan, Datos, Análisis, Conclusiones) de MacKay y Oldford (1994).

- Dimensión 2: Tipos de Pensamiento. Está compuesta por los pensamientos comunes a todo el campo de resolución de problemas y los que son específicos del pensamiento estadístico. Entre estos últimos tenemos: la necesidad de los datos, la transnumeración, la variación, modelación y conocimiento del contexto.

- Dimensión 3: Ciclo Interrogativo. Compuesto por los procesos que aparecen durante el desarrollo de una investigación estadística. Está conformado por los procesos que generan los planteamientos de resolución del problema, o los requerimientos de información; los procesos de búsqueda de información, los procesos de interpretación, por ejemplo, buscando las conexiones entre la información obtenida y los conocimientos previos del problema; los procesos de crítica basados en los puntos de referencia y los procesos de juicio para saber que creer, que continuar estudiando y que descartar.

- Dimensión 4: Disposiciones. Compuesto por las disposiciones personales observadas en una persona mientras desarrolla una investigación estadística. Estas disposiciones son: escéptico, imaginativo, curioso y despierto, abierto, lógico, comprometido y perseverante.

Para entender cómo estas dimensiones se entrelazan podemos pensar en una persona involucrada en un estudio basado en datos y que puede estar planificando sobre la población a trabajar, para ello utiliza el conocimiento adquirido sobre el contexto del problema. Luego, toma en consideración el proceso por el que hallará a dicha población y se mostrará abierto a las ideas propuestas por los otros involucrados en el estudio.

Hemos observado que el profesor del nivel primario presenta un alto desconocimiento de los conceptos estadísticos, lo que lo atribuimos a la poca preparación en este tema que reciben durante su formación docente; lo que complica el entendimiento del ciclo PPDAC. En el caso del profesor de secundaria, este presenta un mejor conocimiento de los conceptos, pero tiene dificultades para aplicarlos adecuadamente en problemas de la vida real. Así, por ejemplo, pueden realizar los cálculos necesarios para determinar una media

aritmética, pero no pueden explicar adecuadamente cuando la media aritmética no es la mejor medida de resumen.

Por todo lo anterior, decidimos que nuestro trabajo de fortalecimiento se centre en la primera dimensión del Pensamiento Estadístico. Esto debido a la necesidad que tienen los estudiantes de primaria de entender en qué consiste en la práctica el trabajo de resolver un problema que requiere la recopilación de datos y se deje de ver la Estadística simplemente como el proceso de organizar datos en una tabla o la construcción de un gráfico de barras.

Pero, ¿cómo es que un profesor puede relacionar las etapas del PPDAC con los conceptos o procedimientos estadísticos? La relación se da en cada etapa del ciclo PPDAC, que en particular se relaciona con la aplicación de algún concepto o procedimiento estadísticos específico, tal como se muestra en el siguiente esquema (Ver figura 1).

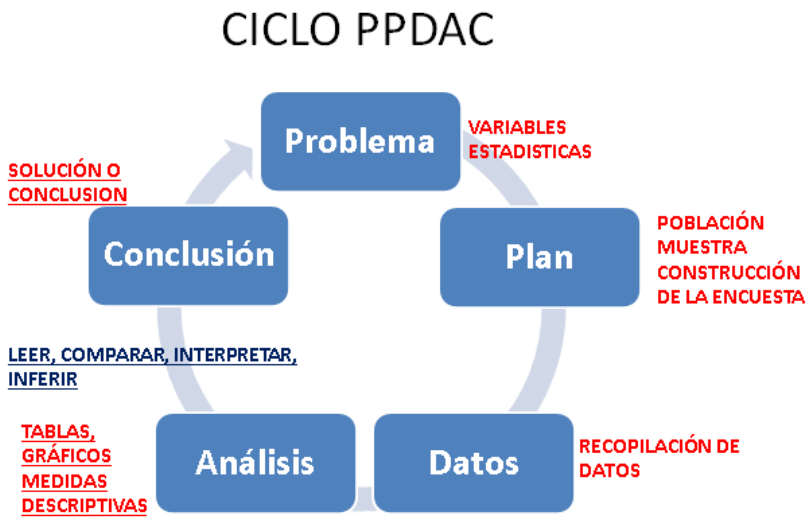


Figura1. Relación entre el ciclo PPDAC y los conceptos o procedimientos Estadísticos.

A continuación, describiremos brevemente el trabajo relacionado con cada etapa del ciclo PPDAC.

En la primera etapa, Problema, se realiza el análisis inicial de la situación problema propuesta con el fin de identificar las variables estadísticas involucradas en ella. En los casos donde se establece más de una variable estadística involucrada, es importante plantear las relaciones existentes entre estas variables. En esta etapa, también, se estudian

los elementos del contexto que se requieren tener en cuenta para el desarrollo de las siguientes etapas.

En la segunda etapa, Plan, se plantea sobre que individuos es que se centrará el trabajo, es decir, de quienes obtendremos los datos mediante las variables estadísticas identificadas. En caso de ser necesario, en esta etapa se planifica la construcción de una muestra. Además, en esta etapa se trabaja la construcción de las preguntas y del instrumento que nos permitirá realizar la recopilación de los datos, y se determina el proceso de recopilación de datos. Para los alumnos de secundaria, es también en esta etapa donde se planifica el trabajo a realizar para el análisis de los datos.

En la tercera etapa, Datos, es donde se aplican los procesos de recopilación de datos y se trabaja la limpieza de los mismos. Esto implica que se establece las respuestas obtenidas que no se ajustan a lo esperado y se toman decisiones sobre las encuestas que se deben descartar por no aportar con datos válidos.

En la cuarta etapa, Análisis, el fin es el manejo de los datos obtenidos y la búsqueda de información. En esta etapa se utilizan los objetos estadísticos como las tablas de frecuencia, los gráficos de barras simples y agrupadas, las medidas de tendencia central, etc. Y donde se busca establecer relaciones entre los datos y el contexto de la situación problema, mediante la comparación, interpretación e inferencia.

En la última etapa, Conclusión, se presenta la solución del problema o las conclusiones a las que se ha llegado. En esta etapa se puede apreciar el aprendizaje realizado dentro de la situación problema propuesta. La lectura, comparación, interpretación e inferencia también se usan en esta etapa como los medios para poder establecer las conclusiones más adecuadas.

Esto implica que el problema ideal para trabajar la competencia matemática relacionada con la gestión de datos a nivel escolar, exige que el profesor proponga una situación problema con las siguientes características:

- Una situación problema en la cual es importante conocer el detalle del contexto donde se desarrolla con el fin de que los estudiantes puedan contextualizar los resultados del análisis de los datos,

- Una situación problema a resolverse con los datos recopilados por los mismos alumnos desde una población o muestra,

- Una situación problema en la que los estudiantes, dentro de lo posible, puedan decidir sobre la población a trabajar, las preguntas a realizar y el método para recopilar los datos,

- Una situación problema donde se procure que los alumnos determinen como trabajar los datos para obtener la información buscada y no que el profesor les indique que hacer con los datos, donde los alumnos tengan libertad para experimentar con la propuesta de las preguntas para la obtención de información desde los datos recopilados y no que el profesor les proponga una lista de preguntas a responder desde los datos en una tabla o en un gráfico.

- Finalmente, una situación problema en la que los estudiantes puedan distinguir y construir diferentes tipos de pregunta (de lectura, de interpretación y de inferencia), y culminar el ciclo PPDAC respondiendo a la problemática planteada inicialmente.

Una ventaja en la creación de problemas para la gestión de datos es que es posible hacer muchas variaciones a un problema original, lo que resulta completamente novedoso para los estudiantes. Esta ventaja se debe a que en la etapa Análisis se tienen múltiples conceptos y procedimientos que pueden combinarse entre sí. Lo que permite que el profesor pueda reutilizar los contextos. Así a continuación mostramos un ejemplo para ilustrar lo mencionado.

Situación problema: *Las indicaciones de la Dirección de un colegio es que cada aula escoja el uniforme deportivo que usarán para las olimpiadas del plantel. La profesora Edith solicitó a sus alumnos, del cuarto grado de primaria, que propongan el método para poder tomar una decisión.*

La situación problema propuesta no implica el desarrollo de alguna tarea estadística en particular, es de carácter abierto y está dirigida a estudiantes de cuarto grado de primaria. El problema consiste en decidir cómo será el uniforme deportivo que usarán durante las olimpiadas de la escuela, lo que se puede conseguir mediante algunas preguntas puntuales relacionadas con cada etapa del ciclo PPDAC, como mostramos en la siguiente tabla:

Tabla 1. Tres propuestas para resolver la situación problema siguiendo las etapas del ciclo PPDAC.

ETAPA	**PROPUESTA 1**	**PROPUESTA 2**	**PROPUESTA 3**
Problema	Decidir qué uniforme deportivo usará el cuarto grado durante las olimpiadas de este año. ¿Qué respuesta debe obtenerse de un alumno para poder resolver el problema?	Decidir qué uniforme deportivo usará el cuarto grado durante las olimpiadas de este año. ¿Qué color de polo y de short usaremos durante las olimpiadas?	Decidir qué uniforme deportivo usará el cuarto grado durante las olimpiadas de este año. ¿Qué respuesta debe obtenerse de un alumno para poder resolver el problema?
Plan	¿Qué pregunta debo realizar para obtener la respuesta esperada?	¿A quién debo hacer la pregunta indicada?	¿Qué pregunta debo realizar para obtener la respuesta esperada?
Datos	¿Cómo puedo recoger las respuestas de los alumnos?	¿Cómo puedo registrar la respuesta de cada padre de familia?	¿Cómo realizó la pregunta a cada alumno y cómo registro su respuesta?
Análisis	Presenta las respuestas obtenidas de los alumnos en un gráfico adecuado.	Utiliza una tabla de doble entrada para presentar las respuestas de los padres.	Construye un gráfico de barras en base a los datos organizados en la tabla presentada.
Conclusión	¿Qué uniforme deportivo llevará el cuarto grado? ¿Por qué?	¿Qué color de polo y que color de short llevará el cuarto grado a las olimpiadas? ¿Por qué?	¿Qué uniforme deportivo llevará el cuarto grado? ¿Por qué?

Durante este taller trabajaremos acerca de la variación de una situación problema propuesta por los investigadores para el trabajo con estudiantes de sexto grado del nivel de primaria y de una situación problema para estudiantes del segundo año de secundaria. El trabajo se realizará en grupos de trabajo de tres profesores. En la segunda sesión se trabajará sobre los elementos para crear una situación problemática para los mismos grados, partiendo de una situación problemática propuesta por los participantes del taller. El producto final del taller serán las situaciones problemáticas obtenidas del trabajo grupal durante el taller y que se compartirán entre todos los participantes.

Referencias

Batanero, C. (2009). Retos para la formación estadística de los profesores. II Encontro de Probabilidade e Estatística na Scola. Universidade do Minho, Braga, Portugal. http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/Formprofesores.pdf Consultado 5/01/2017

Malaspina, U. (2015). Creación de problemas: sus potencialidades en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemáticas, 2016, Año 11 Número 15, pp 321-331. Costa Rica

Wild, C.J. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical Thinking in Empirical Enquiry. International Statistical Review (1999), 67, 3, 223-265.

Volver al índice de autores

Eje temático 2

Influencia de la tecnología en la Educación Matemática. Visualización en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

2. EJE TEMÁTICO: INFLUENCIA DE LA TECNOLOGÍA EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA. VISUALIZACIÓN EN LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

2.1. Conferencia

2.1.1. Una Mirada al Acto Pedagógico en Enseñanza de la Matemática en una Universidad Abierta-Venezuela (Conferencia penaria)

Dra. Enedina Lady Rodríguez Cortez
Universidad Nacional Abierta Centro Local Lara, Venezuela

Resumen

Modelar el acto pedagógico en una Universidad de Educación abierta y a distancia, que permita la ejecución empírica del conocimiento a través de la producción por un especialista de contenido, de un módulo instruccional o medio maestro y la interacción mediada por un asesor para desarrollar una gestión adecuada, la cual requiere ser implementada para el autoaprendizaje de los estudiantes, es un proceso complejo. Al identificar diversos desajustes y formular hipótesis sobre la idoneidad del proceso de estudio, en cuanto a su faceta Epistémica, se aborda el estudio del Conocimiento Didáctico-Matemático del Medio Maestro sobre la Función afín aplicada a la economía, bajo el Modelo del Conocimiento Didáctico – Matemático del Enfoque ontosemiotico que permitió acercarse a la Realidad existente en la Universidad Nacional Abierta (UNA) en Venezuela, mostrando asi, la fragmentación entre el conocimiento matemático y didáctico respecto a la función docente del especialista de contenido, el asesor, el medio maestro o modulo instruccional

Introducción

El arte de acercar el alumno al conocimiento, en el ámbito Universitario, en particular en la Universidad Nacional Abierta en Venezuela, es un proceso *sui generis*, donde se minimiza el acto docente en la enseñanza como uno de los componentes básicos de la educación y se distribuye fundamentalmente mediante el material impreso o medio maestro, en el cual se proponen los contenidos curriculares a enseñar sobre un objeto, atendiendo a significados previos de los estudiantes, el tiempo y los medios disponibles.

En 1999 Martín, en sus estudios se refiere a la decisión de *qué enseñar* y *cómo enseñar* en esta modalidad, corresponde a un profesor o grupo de profesores (especialistas de contenido) que diseñan el currículo de la disciplina, el soporte tecnológico y la cantidad de presencialidad que ocurrirá durante el proceso y el *cuándo enseñar*, siendo una decisión que compete al estudiante, quien administra su tiempo de estudio y la responsabilidad del logro del aprendizaje. Se evidencia una disgregación de la función docente, quien representa la institución ante el estudiante, el *profesor tutor o asesor*, que conduce las actividades presenciales prescritas en los materiales instruccionales prediseñados, por lo tanto, junto con el Modulo son factores decisivos a la hora de lograr aprendizajes en los estudiantes en cualquier disciplina, en particular en Matemática.

> De hecho, el Medio Maestro tiene la responsabilidad de la génesis del saber, de un conocimiento, en particular matemático, el cual permite al alumno ser capaz de manejar, entender, validar y aplicar diferentes nociones o objetos matemáticos en la resolución de situaciones problemas extra-matemáticos e intra-matemático. Así pues, el modulo o medio maestro debe reunir ciertas características que permitan calificarlo como ¨idóneo¨ para los fines pretendidos y adaptado a las circunstancias e instrumentos disponibles.
>
> Ahora bien, se trata de una modalidad de estudio con un proceso complejo, en el cual se evidencia la influencia de factores en la permanencia del alumno universitario, entre los cuales, se encuentran: externos al sistema de educación superior, las propias del sistema e institucionales, las causas académicas y las de carácter personal; realidad que coincide con las bases de datos procedentes de pruebas internacionales promovidas por diversas organizaciones, cuyos hallazgos revelan que aún persisten los conflictos pedagógicos y cognitivos en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática.

Los planteamientos anteriores y la búsqueda de respuestas determinada por la claridad de la enseñanza a través de los módulos instruccionales o un "medio maestro" respecto a: ¿qué es lo que se pretende enseñar?, ¿qué es lo que el estudiante aprende?, se aborda el estudio de la *Faceta Epistémica del Conocimiento Didáctico-Matemático del Medio Maestro sobre Función afín aplicada a la economía,* que nos permitió aproximarnos a la evaluación del conocimiento didáctico- matemático del Modulo o Medio maestro sobre un contenido y con los insumos localizados en las aportaciones provenientes de los reportes de Rezat (2006), Rezat y Sträßer (2012) que modifica el conocido *triángulo didáctico*, formado por profesor, estudiante y contenido matemático, para convertirlo en un *tetraedro didáctico* al considerar un nuevo vértice que representan a los instrumentos que median en la enseñanza y el aprendizaje y la propuesta de Volker (2017) *del tetraedro pedagógico para el abordaje áulico en la educación superior,* se generar una aproximación a un modelo al acto pedagógico en la enseñanza de la Matemática en una Universidad a Distancia.

Faceta Epistémica del Conocimiento Didáctico-Matemático del Medio Maestro sobre Función afín aplicada a la economía

Este estudio es parte de una investigación más amplia que tenía por finalidad *Generar un modelo de evaluación del conocimiento didáctico-matemático del Medio Maestro de la Universidad Nacional Abierta (UNA) mediante el análisis de la faceta epistémica sobre un contenido matemático pretendido.*

El episteme teórico que fundamenta el estudio es una de las nociones recientes: la modelización de los conocimientos didácticos–matemáticos del profesor, que componen la *Teoría de las configuraciones didácticas (TCD)* del *Enfoque Onto-Semiótico (EOS) del Conocimiento e Instrucción Matemática* (Godino y Batanero, 1994; Godino, Batanero y Font, 2007), dicho modelo teórico es un instrumento de evaluación, análisis y reflexión, tanto para el docente novato como el experto, de su práctica en el ambiente de la clase, siendo esta la situaciones más estudiada.

Presupuestos teoréticos asilados en la pluridimesionalidad del conocimiento didáctico –matemático basado en el EOS, implica realizar una serie de acotaciones y ajustes para ser adaptado al análisis de espacios de educación a distancia, dada las características por una parte del material impreso o módulos de aprendizajes o medio Maestro, los cuales son generadores de un sistema de prácticas operativas y discursivas, pero

solamente escrito, en cuya enseñanza se planifica, implementa y evalúa, en términos del EOS registra el sistema de prácticas (significado) del tipo pretendido, implementado, además incluye el evaluado mediante el Test-Guía de autoevaluación.

Por lo tanto, para indagar en los conocimientos matemáticos y didácticos, que efectivamente tiene el medio maestro o modulo instruccional, se hace necesario profundizar en los conocimientos didácticos–matemáticos de los *especialistas de contenidos* y de los *asesores*, los cuales son responsables el primero de decidir qué se debe enseñar, cómo se evaluará y administrará el proceso de enseñanza la producción y actualización de material instruccional y el segundo de crear un conjunto de condiciones apropiadas para facilitar el aprendizaje, ofrecer una interacción comunicativa con el estudiante para aclarar y resolver dudas sobre algunos contenidos y dificultades del material didáctico que permitan consolidar el aprendizaje.

Análisis de la faceta epistémica conocimiento didáctico matemático de la función Afín aplicada en la economía del Modulo IV Matemática I.

Godino (2009), destaca que una de las facetas claves es la *faceta epistémica* incluye y refina al *conocimiento del contenido* (conocimiento común, especializado y ampliado o en el horizonte matemático) del profesor, además resalta que esta dimensión trata de los *Conocimientos matemáticos relativos al contexto institucional en que se realiza el proceso de estudio y la distribución en el tiempo de los diversos componentes del contenido (problemas, lenguajes, procedimientos, definiciones, propiedades, argumentos)*.

En congruencia con el modelo de Ball, Pino Fan(2013), incluye tres componentes: el *conocimiento común del contenido*, que se refiere al conocimiento puesto en juego al resolver problemas matemáticos; el *conocimiento especializado del contenido*, incluye la capacidad para representar con exactitud ideas matemáticas y proporcionar explicaciones matemáticas de reglas y procedimientos comunes, y el *conocimiento ampliado del contenido*, que requiere poner en relación aspectos elementales del tema con ideas matemáticas más avanzadas.

Estas componentes, se relacionan con el Modulo, Especialista de contenido y Asesores en cuanto a: c*onocimiento común del contenido* sobre el objeto de estudio el cual es la Función afín aplicada a la economía del nivel Universitario en la modalidad abierta y

a distancia, se relaciona con el desarrollo de los procesos del pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos del Modulo, los especialistas de contenido y asesores, este desarrollo de dicho pensamiento busca a nivel Universitario, el proceso de Modelizar, Representar, Aplicar. Así, para evaluar el conocimiento común del contenido en el Módulo se analizan las Configuraciones Epistémicas, Prácticas y Procesos del contenido pretendido. En cuanto a los asesores y especialistas de contenido la evaluación del conocimiento común sobre la resolución problemas que conduzcan a la modelización.

De igual forma, en la categoría *conocimiento ampliado del contenido*, se analiza en los especialistas de contenido y asesores en la resolución de problemas del contexto histórico, costo marginal, ingreso marginal (aplicaciones de la derivada) y macroeconómico.

Finalmente, el *conocimiento especializado del contenido*, para evaluar este conocimiento en el Módulo se tiene presente en el análisis epistémico sobre los conceptos, propiedades, argumentos, lenguaje y procedimientos que se ponen en juego en la solución de situaciones problemáticas planteadas. Para los asesores y especialistas de contenido, se diseñaron y reformularon distintas situaciones-problemáticas que buscaban dar respuesta a preguntas como: ¿Qué conceptos o propiedades matemáticas usó para dar solución al problema planteado? ¿Qué estrategias utilizarías para ayudar aquellos alumnos que dan una respuesta errónea para que se den cuenta del error y lo superen? , entre otras y se caracterizaron las Practicas, procesos y configuraciones

Al analizar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático, se observó que respecto a la Dimensión Matemática los asesores y especialistas de contenido tiene un domino medio para resolver problemas con las características de las que se plantearon en este estudio. Sin embargo, no establecen relación con otros objetos matemáticos más avanzados presentes en el Plan de curso de Matemática I, Modulo IV de Matemática I, textos de referencia bibliográfica obligatoria y en la historia de la Función afín aplicada en la economía.

En referencia, al Modulo Instruccional, las situaciones problemas que se presentan son representativas para el contenido desarrollado en esta sección del módulo, sin embargo, con el significado de referencia no guardan armonía. Las configuraciones epistémicas de este sistema de prácticas son del tipo conjuntista, analítica y gráfica.

Con relación al componente de la Dimensión Didáctica respecto al *conocimiento especializado del contenido:* Modulo, los asesores y especialistas de contenido, identifican las variables de las situaciones problemas; generaliza /particulariza el enunciado. Resuelven los problemas usando diferentes representaciones: verbales, simbólicas y graficas, usan algunos procedimientos diferentes: intuitivos; formales. Identifica los conceptos y propiedades puestas en juego en las soluciones de cada situación problema, además explican y justifican las soluciones. Sin embargo, para el Especialista de Contenido resulta claro que es un experto instruccional y administrador de contingencias, por tal razón lega el Conocimiento Didáctico del contenido al asesor, tal como lo reglamenta los fundamentos pedagógicos de la UNA.

Esta andadura investigativa, nos permitió divisar como el Medio Maestro tiene la responsabilidad de la génesis del saber, para ello presenta el significado del objeto matemático (definiciones, enunciados, demostraciones), asumiendo el protagonismo del recuerdo e interpretación de las reglas y de la aplicación de las técnicas de la actividad matemática, el cual debe propiciar en los estudiantes, el *aprender a aprender*, a fin de generar aprendizajes desprovistos de la simple memorización. El alumno en las unidades de aprendizaje del Modulo, desempeña roles de: recepción de información, ejercitación, debe haber explorado personalmente la solución de las situaciones problemas para luego hacer la autoevaluación

Este proceder del Medio Maestro, de tipo Magistral, muestra que además de las matematicas para resolver situaciones–problemas relacionadas con su conocimiento común y ampliado, tiene una buena dosis de conocimiento matemático afinado para la enseñanza.

De manera particular y afinando la mirada respecto al Conocimiento Didáctico-Matemático, las respuesta a las entrevistas que facilitaron los Asesores y Especialista de contenido, se observa que se moviliza con un alto dominio el conocimiento común y ampliado, mientras el Especialista de contenido debido a una marcada regulación en su práctica didáctica, de acuerdo a las reglas de la Normativa de evaluación, fijadas por la Universidad y por sus funciones no perfila un conocimiento matemático hacia la enseñanza. Respecto al Asesor, no presenta un repertorio de estrategias instruccionales; hay un desconocimiento de las orientaciones metodológicas del plan de curso, textos de referencia, no comenta la selección, diseño y uso diversos de materiales de apoyo;

entornos de aprendizaje o videos y solo cumple con su rol de aclarar dudas, por lo tantotiene muestra un bajo nivel de conocimiento especializado del contenido.

Con base en lo anterior, asomamos el "ideograma" del modelo del Conocimiento Didactico –Matemático sobre la ruta de los factores encargados del conocimiento en esta modalidad a distancia: Modulo instruccional o Medio Maestro, Especialista de contenido y Asesores de un contenido matemático pretendido. Cabe resaltar que los elementos presentes en la construcción y desarrollo de este recurso ideográfico está constituido por: soporte teórico de la Educación Abierta y a Distancia y el modelo del Conocimiento Didáctico – Matemático basado en el EOS. Pautas y componentes que se analizan e interpretan con la faceta Epistémica Godino (2009) y Pino-fan, Godino y Font (2014), sólo se intenta la reflexión, especialistas de contenido y asesores y su evaluación con el Medio Maestro, sobre los objetos matemáticos, sus significados y las relaciones complejas entre ellos, que se ponen en juego con motivo de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en una educación a distancia



Conocimiento Didáctico –Matemático de un Medio Maestro

Fuente: Elaborado por el autor (2017)

Como se puede apreciar en el gráfico, al evaluar el Conocimiento Didactico Matemático de un contenido matemático en la práctica de enseñanza de una modalidad a distancia basado en el modelo del CDM bajo el EOS, debido a la fragmentación de las funciones

docentes, intervienen tres elementos para el logro de una enseñanza "idónea ": el Especialista de contenido, evaluará y administrará el proceso de enseñanza, la producción y actualización de material instruccional, debe tener en cuenta el grado de dominio de las componentes : *conocimiento común y ampliado del contenido.* Mientras que el asesor, además del conocimiento de las matematicas que le permiten resolver problemas, debe construir relaciones que apoyen el aprendizaje y mediar entre el estudiante y el modulo o medio maestro, de acuerdo a las funciones del asesor reglamentadas en los fundamentos pedagógicos de la UNA. En cuanto al Modulo o Medio Maestro, tiene la responsabilidad de la génesis del saber, junto con el asesor se debe tener en cuenta el grado de dominio de la componente del Conocimiento especializado del contenido.

Visión del Acto Pedagógico en Enseñanza de la Matemática en una Universidad a Distancia –Venezuela

El modelo holográfico que se presenta es un acercamiento a la Realidad del Acto Pedagógico en la UNA, el cual ofrece una mirada sintética y visual donde es imprescindible considerar al estudiante como "el sujeto de aprendizaje".

1.- El conocimiento considerado el saber sabio, es alcanzado por el estudiante, quien ocupa el centro del acto pedagógico en la UNA y se apropia del conocimiento mediante el Medio Maestro o modulo instruccional, la producción y actualización de los contenidos a cargo del especialista y la mediación e interacción con el Asesor, además de otros documentos escritos y textos de referencia obligatoria en los módulos instruccionales.

El modelo holográfico generado, muestra en los contextos educativos a distancia:

1. El Medio Maestro o Modulo cumple con una doble función. Por una parte, contribuye a la socialización del estudiante dentro de esta modalidad, ya que el medio maestro, involucra una serie de pautas, orientaciones y modos de estructurar y presentar los contenidos, que tienden a que el usuario desarrolle el autoaprendizaje y por otra, facilita el proceso de adquisición de los conocimientos inherentes a la disciplina en la que se está formando el estudiante en la medida en que este material aglutina y presenta elementos fundamentales y necesarios para el posterior desempeño como profesional dentro de un área. Cuenta con el apoyo el servicio de Orientación y Evaluación, además de las Plataformas de aprendizaje de la UNA,

2. Especialistas de contenido: profesionales expertos en el ámbito de las distintas carreras que oferta la UNA. Entre sus principales funciones: producción y actualización de materiales instruccionales (textos UNA, guías instruccionales, selecciones de lectura); elaboración de instrumentos de evaluación (pruebas objetivas, de desarrollo, trabajos prácticos) y banco de ítems, elaboración de prescripciones académicas (planes de curso, planes de evaluación, instructivos para la valoración de trabajos prácticos) Dominio del conocimiento sobre un objeto matemático (conocimiento común) y el que se encuentra más allá del currículo (conocimiento ampliado)

3. Asesores Académicos: son profesionales de cualquiera de las carreras que oferta la UNA. Desarrollan su acción docente en las Unidades Operativas (CL y UA), dispersos por todo el territorio nacional. Debe manejar un amplio conjunto de asignaturas dentro de la carrera correspondiente. Su función primordial es establecer la interacción entre el estudiantado a distancia y la institución, es la cara visible. Su rol es académico y motivacional. Dominio del conocimiento común y ampliado y un conocimiento hacia la enseñanza, es decir conocimiento especializado



Holografía del Acto Pedagógico en Enseñanza de la Matemática en la UNA

Fuente: Elaborado por Castro y Rodriguez (2018)

El estudio surge de una reflexión y análisis de la praxis de la educación abierta y a distancia, respecto a las interrogantes: ¿qué es lo que se pretende enseñar?, ¿qué es lo que el estudiante aprende?, y la búsqueda de respuestas lleva al abordaje de la investigación de cómo se vinculan los procesos de producción de conocimiento y el material instruccional impreso, módulos o "medio maestro" en la UNA, en particular del conocimiento matemático. Esto cobra singular importancia, al tratarse de un proceso complejo de la modalidad a distancia y los conceptos matemáticos que inciden en la construcción de concepciones claves Matemáticas en otras disciplinas. El indagar en los saberes matemáticos y didácticos, que efectivamente tiene el medio maestro instruccional, desde el Modelo del conocimiento Didáctico –Matemático descrito por Godino (2015) y su perspectiva ampliada, se hace necesario profundizar en los conocimientos didácticos–matemáticos de los *especialistas de contenidos* y de los *asesores,* en el caso del conocimiento del contenido matemático, son profesionales que deben manejar un amplio contenido sobre una objeto matemático para resolver situaciones problemas y las nociones muy avanzadas en el currículo, además de poseer un perfil acorde en las metodologías en enseñanza de esta disciplina en esta modalidad.

Referencias

Castro, N (2010). *Procesos del pensamiento creativo subyacentes en el insight en la resolución de problemas Matemáticos en educación Superior*. Tesis doctoral no publicada. Doctorado en Educación. Convenio Unexpo-UPEL-UCLA. Barquisimeto.

Godino, J. (2009). Categorías de Análisis de los conocimientos del Profesor de Matemáticas. *Unión Revista Iberoamericana de Educación Matemática* (20), 13-31.

Godino (2015) *Perspectiva Ampliada del Conocimiento Didáctico Matemático del Profesor* Paradigma, Vol. XXXVI, Nº 1, Junio de 2015 / 87 – 109

Rezat, S. & Sträßer, R. (2012). *From the didactical triangle to the socio-didactical tetrahedron: artifacts as fundamental constituents of the didactical situation*. *ZDM, 44*(5),641-

Rodriguez, E (2016) *Faceta epistémica del conocimiento didáctico - matemático de la función afín aplicada a la economía*. Tesis doctoral no publicada. Doctorado en Educación Matemática UPEL. Maracay.

UNA (2008). *Manual de funciones del personal docente según rol en la Universidad Nacional Abierta*. Caracas: Rectorado. Dirección del Centro de Programación.

UNA (2013) Diseño Instruccional en Educación a Distancia *Experiencias en la Universidad Nacional Abierta de Venezuela* [compilado por] María Martín Hernández… [et al.]. -- Caracas: Ediciones del Vicerrectorado Académico

Volver al índice de autores

2.2. Reportes de investigación

2.2.1. Sistema de ecuaciones lineales: resolución de problemas con el uso del software Geogebra

Rocío Figueroa Vera
Flor Carrillo Lara Isabel Inca Maldonado
Pontificia Universidad Católica del Perú, IREM, Perú

Resumen

Este reporte forma parte de una investigación más amplia y tiene como propósito reflexionar sobre la resolución de problemas de sistema de ecuaciones lineales con dos variables con el uso del GeoGebra, el descubrimiento del manejo de la variación de parámetros, considerados en ambas ecuaciones, así como función afín implícita, parámetros fijos y parámetros variables (variación de un coeficiente y variación de un término independiente), y el uso de Geogebra. Se han considerado aspectos de la Teoría de Situaciones Didácticas y para el diseño e implementación se han considerado el análisis a priori y a posteriori, de la Ingeniería Didáctica y elementos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica. Uno de los resultados obtenidos se refiere a que mediante un empleo adecuado del GeoGebra se podrá reconocer el efecto de modificar uno de los parámetros al estudiar el comportamiento de las r

Introducción

Resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos variables es muy importante por su gran utilidad en muchos problemas contextualizados y su aplicación a otros campos como la economía, en donde es frecuente encontrar puntos de equilibrio, por ejemplo, entre la oferta y la demanda sin embargo Garcés (2009), ha notado la desmotivación, el desinterés y la apatía de las nuevas generaciones frente a los modelos de formación y educación que el sistema tradicional les ha ofrecido. Están más orientados a resolver sistemas de forma rutinaria y algorítmica, usando los métodos de forma mecánica y resuelven problemas típicos y sin darle un sentido lógico a lo que están resolviendo. Por su parte Segura (2004), señala que existen dificultades para trabajar problemas dados en registro verbal que involucran sistemas de ecuaciones, menciona que los estudiantes no realizan en forma correcta el pasaje del registro verbal al algebraico y que no efectúan representaciones y resoluciones gráficas de sistemas de ecuaciones lineales. Además, en este trabajo se puede

apreciar cómo se puede facilitar el aprendizaje de los sistemas de ecuaciones lineales planteando al estudiante actividades que lo induzcan a pasar por situaciones de acción, formulación y validación.

Es así que, de acuerdo con Segura (2004), diseñamos una propuesta didáctica para fortalecer en los alumnos las habilidades de resolver problemas relacionados a sistemas de ecuaciones lineales con dos variables. Para ello tomamos como marco referencial la Teoría de Situaciones Didácticas de Guy Brousseau (2007) y en algunos momentos las conversiones y tratamientos de la Representación Semiótica de Raymond Duval (1993).

En el presente reporte, analizaremos la actividad N° 3 de la propuesta didáctica visto en el trabajo de Figueroa (2013), y la Ingeniería Didáctica como metodología de investigación. En esta actividad se contó con la presencia de 12 estudiantes del nivel secundario (15-16 años), iniciamos con la recapitulación de la actividad anterior y una vez más señalamos sus logros y dificultades, resaltando que aún tienen dificultades para relacionar datos conocidos con las variables e interpretar el significado de la solución de un sistema de ecuaciones con la solución del problema planteado. La actividad tuvo dos momentos, en el primero se trabajó 2 partes, una individual y la otra grupal, ambas en el aula. El segundo momento se trabajó en una la sala de cómputo, ya que usamos el software GeoGebra. Respecto a las reglas de trabajo se les recalcó que serían las mismas de las actividades anteriores.

Aspectos teóricos

Para el diseño de la propuesta didáctica se tomaron en cuenta las cuatro fases de la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD):

Intercambios de informaciones no codificadas o sin lenguaje (acciones y decisiones).
Intercambios de informaciones codificadas en un lenguaje (formulación).
Intercambios de juicios (validación).

De acuerdo con Brousseau (2007), en los procesos de acción el alumno actúa solo sobre un problema haciendo uso de sus conocimientos previos, en el proceso de formulación el alumno comunica lo que ha encontrado a otros alumnos y en el de validación el alumno debe demostrar que el modelo que ha elegido es válido. Así mismo, para el desarrollo de la parte experimental hemos considerado algunos elementos de la TSD.

Situación didáctica: Es un conjunto de interrelaciones en la que intervienen el profesor, el estudiante y un medio didáctico y es construida intencionalmente con el fin de hacer adquirir a los alumnos un saber determinado.

Situación a-didáctica: Es el proceso donde solo interviene el estudiante y el medio.

Devolución: Es la acción mediante la cual el profesor transfiere al alumno un problema o tarea con relación a un determinado conocimiento.

Variable didáctica: Son aquellos elementos que son susceptibles de tomar diferentes valores y que, al tomarlos provocan cambios y hacen variar las estrategias de solución del conocimiento matemático.

Contrato didáctico: Comprende un conjunto de comportamientos que el profesor espera del alumno y comportamientos que el alumno espera del profesor, que regula el funcionamiento de la clase definiendo los roles y la repartición de tarea.

Finalmente, el autor manifiesta que la institucionalización es una situación de formalización de un conocimiento matemático producido por los alumnos y el saber cultural. Durante esta situación se deben sacar conclusiones, recapitular, sistematizar, ordenar y vincular lo que produjeron los alumnos en el desarrollo de las secuencias didácticas. La institucionalización es de alguna manera complementaria a la devolución.

Aspectos Metodológicos

Nosotros utilizamos la ingeniería didáctica como metodología de investigación, por ser un esquema experimental basado en realizaciones didácticas en el aula, es decir, analiza los procesos de construcción, realización y análisis; y para validar las secuencias de enseñanzas, haremos una comparación entre lo que se esperaba y lo que realmente sucedió durante el desarrollo de la clase.

Para la actividad presentada se toma en cuenta las fases de la ingeniería didáctica, el proceso de investigación Según Artigue et al. (1995) consta de cuatro fases: Análisis preliminar; Concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas; Experimentación; Análisis a posteriori y validación.

Diseño de la actividad

De acuerdo al trabajo de investigación Figueroa (2013), en la actividad 3 se identifica las variables micro didácticas:

Actividades de aprendizaje "medios de trasporte"	**Variables micro didácticas**
Actividad 3: Situación en tres partes, relacionada con un sistema de ecuaciones lineales, que estimula, con el uso del GeoGebra, el descubrimiento del manejo de la variación de parámetros.	• Ambas ecuaciones con función afín implícita (FI). • Parámetro variable (PV): - Variación de un coeficiente. - Variación de un término independiente.

En esta actividad se consideran dificultades graduadas, además está diseñada para un trabajo de grupos. Los grupos son a lo más tres integrantes.

Presentamos parte de la actividad 3, propuesta a los estudiantes:

Situación:

Alejandro, para ir a su centro de trabajo, utiliza dos medios de transporte: El metropolitano y el tren eléctrico. El pasaje en el metropolitano es 2 soles y en el tren eléctrico 3 soles y sus gastos semanales por movilidad son de 53 soles. Además, se sabe que realiza en total 21 viajes a la semana





Parte III: Trabajo grupal

a. Alejandro tiene la posibilidad de hacer un gasto total en pasajes mayor a los S/.53. Encontrar todas las soluciones correspondientes a estos gastos considerando aumentos de S/.1 en S/.1 y manteniendo fijos el número total de viajes (21) y los precios de los pasajes en metropolitano (S/.2) y en tren eléctrico (S/.3).

_____

_____

_____

b. Para algún gasto menor de S/.53, ¿Alejandro viajará solamente en metropolitano?

_____

_____

_____

c. Considerando cambios en el número total de viajes semanales y manteniéndose fijo todo lo demás, ¿cuál es el mínimo y el máximo número de viajes semanales en total que podría hacer Alejandro?

_____

_____

_____

Comentario de la actividad 3

El desarrollo de esta actividad se realizó en tres partes y en dos ambientes: en el aula y en el laboratorio. El primer momento corresponde al trabajo en el aula, en la parte individual hubo confusión por las tablas, etc. La mejora se vio reflejada en la parte grupal, ítems presentados, y las conclusiones fueron mejores a las de la parte individual. En cuanto al trabajo en equipo se notó compromiso y entusiasmo.

El segundo momento, corresponde al trabajo en el laboratorio. Como era de esperarse, trabajar con un ambiente dinámico como es el software GeoGebra, motivó a los alumnos a resolver la actividad con mayor entusiasmo. Se pudo notar que tuvieron dificultades para resolver sistemas de ecuaciones con parámetro variable (variación de coeficientes y términos independientes), sin embargo, se puedo observar un debate profundo para defender sus respuestas y para corregir sus errores.

Cabe mencionar que este tipo de dificultades no se presenta en la secundaria ni en los cursos de matemáticas básicas de nivel superior; sin embargo, corresponden a situaciones de la realidad y se ha verificado que su comprensión está al alcance de los estudiantes y que el software GeoGebra ayuda fuertemente a tal comprensión.

En esta actividad se está poniendo énfasis en la variable micro-didáctica VMPV, y observamos que la reacción ha sido favorable y se han podido superar.

Conclusiones

Es muy importante usar problemas contextualizados e ir pasando gradualmente a la descontextualización.

El haber trabajado en forma grupal permitió a los alumnos pasar por las fases de formulación y validación al comparar sus resultados y tener que dar una única respuesta, tal como se aprecia en la parte II y III de la actividad. El uso del GeoGebra ayuda a que los alumnos resuelvan problemas considerando variaciones de los parámetros en un sistema de ecuaciones lineales de dos variables.

El GeoGebra no solamente puede ser usado para resolver sistemas de ecuaciones y visualizar sus representaciones gráficas, sino para resolver problemas. En la parte III de la actividad, los alumnos iban mejorando en la resolución de problemas contextualizados conforme se avanzaba en la actividad.

Destacamos, finalmente que, en el marco de los sistemas de ecuaciones lineales, el GeoGebra puede usarse no sólo para visualizar las ecuaciones y para resolver los sistemas, sino para resolver problemas, contextualizados o no; en particular, problemas relacionados con la variación de los parámetros de las ecuaciones del sistema.

Referencias

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Bogotá: Grupo editorial Iberoamericano

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Editorial libros del Zorzal.

Duval, R. (1993). *Registros de represtación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Figueroa, R. (2013). *Resolución de problemas con sistemas de ecuaciones lineales con dos variables. Una propuesta para el cuarto año de secundaria desde la teoría de situaciones didáctica.* (Tesis de maestría), Pontificia Universidad Católica del Perú.

Garcés, E. (2009). *Incidencia del GeoGebra en la resolución de problemas con sistemas de ecuaciones linelaes 2x2*, Departament de Didàctica de la Matemática i de les Ciències Experimentals, Universitat Autònoma de Barcelona. Recuperado de www.uab.cat/servlet/BlobServer?blobtable=Document

Segura, S. (2004). Sistema de inecuaciones lineales. Una secuencia didáctica, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 7(1)*, 49-78. Recuperado en 2004, de http://dialnet.unirioja.es/servlet/et/articulo?codigo=2095347

Volver al índice de autores

2.2.2. Límites indeterminados: una experiencia mediada por tecnología digital con estudiantes universitarios

Cristian Julian Trujillo, Universidad San Ignacio de Loyola, Lima, Perú
Flor Carrillo Lara, Universidad Nacional del Callao, Callao, Perú

Resumen

El presente reporte muestra una secuencia de dos tareas por medio de tablas de valores y gráficas para movilizar la noción de límites indeterminados en un curso de matemáticas con estudiantes de primer ciclo de una universidad de Lima-Perú. Como marco teórico consideramos la Teoría de Registros de Representación Semiótica y la metodología es cualitativa. Se utiliza como medio la calculadora Casio fx-991 ClassWiz. Se analiza en las producciones de los estudiantes, como coordinan registros de representación semiótica. Además, los resultados revelan que coordinan los registros de lengua natural, algebraico, tabular y gráfico. Asimismo, muestran la pertinencia de la tecnología digital utilizada

Introducción

La labor del docente en el aula y los resultados que obtiene, nos hace reflexionar sobre cómo enseñar y lograr que el estudiante de las carreras de ciencias en nuestro caso, logren comprender y apoderarse de la noción de límites indeterminados. En ese sentido, nuestro interés se enfoca en efectuar una secuencia de dos tareas para trabajar los límites indeterminados en un primer curso de matemáticas con estudiantes de primer ciclo de carreras de una universidad de Lima-Perú. Las tareas fueron elaboradas tomando como base aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1995), en la que se utiliza como medio la calculadora científica Casio *fx-991 ClassWiz.* En cuanto a la metodología empleada es de corte cualitativo, en el sentido de Borba (2004), quien explica la pertinencia de este tipo de metodología cuando se realizan investigaciones en Educación Matemática. Por ello, reflexionamos sobre la pertinencia de la tecnología digital como parte del proceso de enseñanza y de aprendizaje y sobre la importancia de las diferentes representaciones que se deben movilizar al trabajar con tecnología.

Mediación de la Calculadora Científica

Exploramos el uso de la tecnología digital, calculadora *Casio fx-991 ClassWiz***,** con la finalidad de favorecer la movilización de la noción de límites indeterminados en estudiantes ingresantes (primer curso de matemáticas en la universidad). Para ello, presentamos a los estudiantes dos tareas de límites indeterminados siendo el objetivo interpretar la información entregada en representaciones tabulares, algebraicas. En la resolución de las tareas planteadas se realizan procesos de conversión entre los distintos tipos de representaciones, como las del registro algebraico al tabular y del gráfico al algebraico. Consideramos necesario incorporar progresivamente el uso de este modelo de calculadora debido a funciones de interfaz ideales para la educación.

Es en ese sentido, pensamos que la tecnología simplifica procesos algorítmicos y enfoca la atención en la exploración, manipulación, contraste e interpretación de los resultados de cálculo, concentrándose en la comprensión de las tareas y en el análisis de la solución de las mismas. Al respecto Trouche (2005) manifiesta que en el trabajo con calculadoras necesita ser construido por los docentes, de manera que potencien en sus estudiantes actitudes favorables y una mejor relación con el conocimiento matemático, además acota la tecnología no simplifica el trabajo del docente ni del estudiante, sino que requiere la construcción de una enseñanza compleja y un ambiente de aprendizaje adecuado.

Aspectos teóricos y metodológicos

Tomamos como base aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1995) pues de acuerdo con el investigador aprender matemáticas involucra actividades cognitivas como la conceptualización, el razonamiento y la resolución de problemas; Además, afirma que en la actividad matemática se deberían coordinar diferentes registros de representación semiótica como el registro de lengua natural, el registro algebraico, el registro figural, el registro tabular y el registro gráfico. En relación a la coordinación de registros, afirma que "La coordinación de muchos registros de representación semiótica es fundamental para una aprehensión conceptual de objetos, es preciso que un objeto no sea confundido con sus representaciones y que sea reconocido en cada una sus representaciones posibles" (Duval 2012, p. 5). En ese sentido, en la comunicación breve nos centraremos a analizar y evidenciamos la coordinación de los registros algebraico y gráfico.

En relación a los aspectos metodológicos, la investigación que desarrollamos es cualitativa pues según Borba (2004) en una investigación cualitativa en Educación Matemática se priorizan los procedimientos, la descripción y el análisis pues conocimiento explícitamente admite una interferencia subjetiva.

La aplicación de las tareas

La investigación se realizó con estudiantes de carreras de primer ciclo de una universidad de Lima-Perú, cuyas edades van desde los 16 a 18 años. Se realizó una sesión en la que desarrollaron dos tareas. La primera tarea corresponde a la exploración de aproximación, es decir una introducción a la noción de límites, se presenta una función racional $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ en el registro algebraico donde los estudiantes hacen uso de la calculadora científica, en particular de las interfaces tabla y calcular. Con la interfaz tabla, se tabula los datos en un rango de 2.1 a 3.5 con incrementos de 0.1. Se observa que los valores evaluados en la función dada son cada vez más cercanos a 6 y cuando es evaluado en el punto $x = 3$ la calculadora nos muestra error, es decir la función no está definida en ese valor. Debido a ello nos apoyamos en la interfaz calcular para evaluar valores más próximos a 3, es decir $x > 3$ y $x < 3$ empleando incrementos menores a 0.1. De esta manera el estudiante conjetura ante todo lo trabajado que: $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = 6$.

A continuación, en la figura 1 presentamos la tarea 1:

Dada la función: $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$

Complete los valores de la siguientes tablas. Hacer uso de la calculadora *Casio fx-991*

Tabla 1: Uso de la interfaz **tabla**

x	$f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$
2.4	
2.5	
2.6	
2.7	
2.8	
2.9	
3	
3.1	
3.2	
3.3	
3.4	

Tabla 2: Uso de la interfaz **calcular**

x	$f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$
2.9	
2.99	
2.999	
2.9999	
3	
3.00001	
3.0001	
3.001	
3.01	

A partir de todo lo anterior, responda las siguientes preguntas:

a) ¿Qué puede inferir con respecto a los valores obtenidos en las tablas 1 y 2?
b) ¿Cuál es el valor de la imagen de la función f cuando $x = 3$? Justifique su respuesta.
c) A partir de lo trabajado, calcule: $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$

Figura 1: Tarea 1-noción de límite.

Con respecto a la resolución de esta tarea 1 podemos manifestar que participaron 28 estudiantes de manera grupal (4 estudiantes por grupo), previamente se les hizo una inducción de cada interfaz (tabla y calcular), posterior a ello los estudiantes completaron las tablas y respondieron satisfactoriamente 6 grupos a las preguntas dadas, con respecto a ello los estudiantes conjeturaron que mientras la variable x toma valores más próximos a 3 su imagen se aproxima a 6. Además, uno de los grupos no logró resolver la tarea de la manera esperada debido a que no interpretó correctamente la noción de aproximación.

En la figura 2, mostramos la resolución de la tarea 1 por el grupo A quienes resolvieron correctamente todos los ítems.

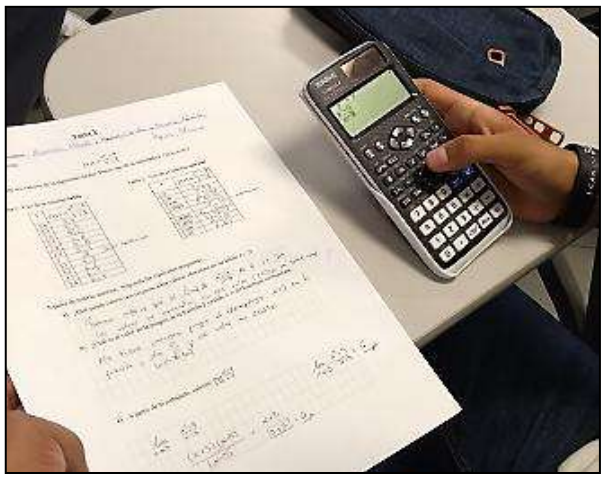
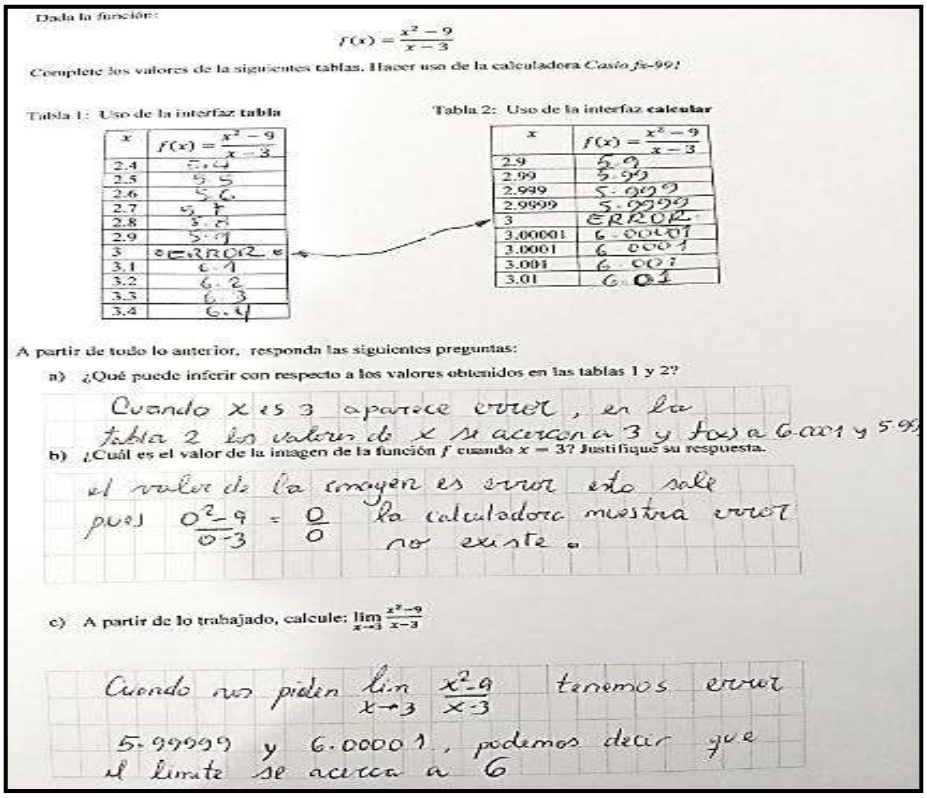


Figura 2: Resolución de la tarea 1-grupo A

Por otro lado, en la figura 3 mostramos la resolución del grupo B quienes no respondieron correctamente 2 de los ítems propuestos.



Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

Complete los valores de la siguientes tablas. Hacer uso de la calculadora *Casio fx-991*

Tabla 1: Uso de la interfaz **tabla**

x	$f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$
2.4	5.4
2.5	5.5
2.6	5.6
2.7	5.7
2.8	5.8
2.9	5.9
3	ERROR
3.1	6.1
3.2	6.2
3.3	6.3
3.4	6.4

Tabla 2: Uso de la interfaz **calcular**

x	$f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$
2.9	5.9
2.99	5.99
2.999	5.999
2.9999	5.9999
3	ERROR
3.00001	6.00001
3.0001	6.0001
3.001	6.001
3.01	6.01

A partir de todo lo anterior, responda las siguientes preguntas:

a) ¿Qué puede inferir con respecto a los valores obtenidos en las tablas 1 y 2?

Cuando x es 3 aparece error, en la tabla 2 los valores de x se acercan a 3 y tos a 6.0001 y 5.99

b) ¿Cuál es el valor de la imagen de la función f cuando $x = 3$? Justifique su respuesta.

el valor de la imagen es error esto sale pues $\frac{0^2-9}{0-3} = \frac{0}{0}$ la calculadora muestra error no existe.

c) A partir de lo trabajado, calcule: $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$

Cuando nos piden $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$ tenemos error 5.99999 y 6.00001, podemos decir que el limite se acerca a 6

Figura 3: Resolución de la tarea 1-grupo B

Para fortalecer la noción de límites laterales presentamos la tarea 2, que corresponde a identificar los límites laterales a partir de la gráfica de una función en un punto dado. Para la solución de esta tarea, se hace uso de lápiz y papel.

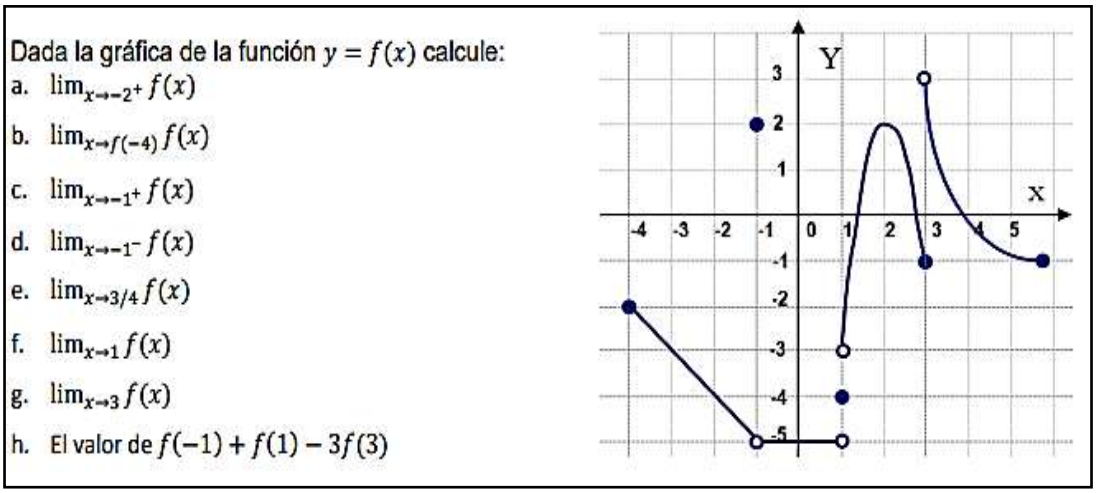


Figura 4: Tarea 2-límites laterales.

Con respecto a la resolución de la tarea 2, los estudiantes trabajaron de manera individual, previamente se desarrolló la definición de la existencia de un límite, es decir tenían los conocimientos previos necesarios para resolver dicha tarea. Observando la gráfica de la función f y teniendo en cuenta la definición de límites laterales esperamos que realicen la tarea 2 de manera satisfactoria. Sin embargo, podemos ver en la figura 3 que el estudiante 1 muestra errores en todos los ítems relacionados con límites laterales.

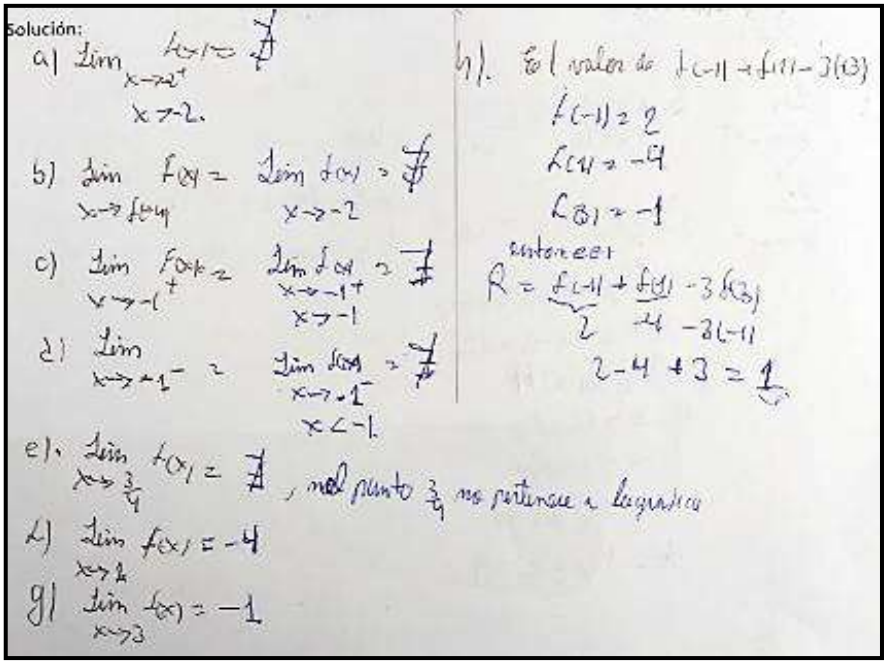


Figura 5: Tarea 2-estudiante1

Por otro lado, el estudiante 2 desarrolló con éxito 4 de los ítems tal como se evidencia en la figura 6., realizando tratamientos, en el sentido de Duval.

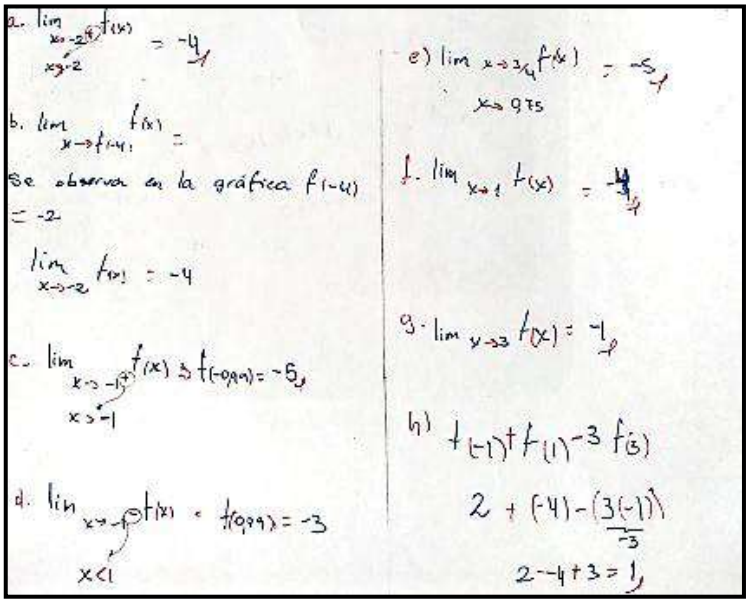


Figura 6: Tarea 2-estudiante2

El objetivo de las tareas es que los estudiantes coordinen diferentes registros de representación semiótica como el registro algebraico, el registro tabular y el registro gráfico. Como resultado de ello, notamos que los estudiantes coordinaron los distintos tipos de registro algebraico, tabular y gráfico. Además, los estudiantes lograron los tratamientos y conversiones del objeto en estudio límites indeterminados y límites laterales.

Se evidencia con respecto a la pertinencia del uso de la tecnología digital, en particular la calculadora *Casio fx-991 ClassWiz* en tareas que favorezcan la exploración, indagación y conjetura de propiedades de los objetos matemáticos que se pueden representar con este medio tecnológico, en nuestro caso límites indeterminados ya que se trata de un concepto abstracto.

Referencias

Borba, M. (2004). A pesquisa qualitativa em Educação Matemática. *CD nos Anais da 27ª reunião anual da Anped, Caxambu, MG*.

Casio, http://www.casio-intl.com/latin/es/calc/scientific/classwiz/

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Berne: Peter Lang.

Duval, R. (2012). *Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento*. (M. Thadeu, Trad.) Florianópolis, Brasil.

Trouche, L. (2005). Calculators in Mathematics Education: A rapid evolution of tools, with differential effects. En D. Guin, K. Ruthven y L. Trouche (Eds), *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators.* New York, USA: Springer

Volver al índice de autores

2.3. Socialización de experiencias

2.3.1. Diseño de medios didácticos para el aprendizaje activo en matemáticas

Camilo Andrés Ramírez Sánchez
Institución Universitaria Politécnico Grancolombiano, Colombia

Resumen

En esta charla se presentan los resultados de un proyecto de innovación vinculado a la Institución Universitaria Politécnico Grancolombiano (IUPG) que se desarrolló durante los años 2015 y 2016, el cual fue desarrollada por un grupo de profesores de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Básicas. El objetivo fue diseñar e implementar una cartilla dinámica en los cursos presenciales y virtuales de la asignatura de Matemáticas, que sirviera como herramienta estudio y trabajo en la asignatura. La propuesta responde a una problemática en la que se percibe un desinterés por parte del estudiante en el desarrollo de las competencias matemáticas y un desfase entre las matemáticas que se enseñan y el uso de estas en el diario vivir o aplicaciones en la práctica profesional. Se presentan apartes de algunos capítulos de la cartilla y se discuten algunos alcances y limitaciones de este dispositivo.

Introducción

El proyecto "*Diseño de medios didácticos para el aprendizaje activo en matemáticas*" se inscribe a la facultad de Ingeniería y Ciencias Básicas (FICB), al grupo de investigación de FICB-IUPG en la línea de investigación en educación y tecnología. Tiene sus orígenes en problemáticas evidenciadas en el desempeño de los estudiantes que han cursado la asignatura Matemáticas relacionadas con: deserción, dificultad en el proceso de aprendizaje, pérdida y baja motivación para la adquisición de conceptos matemáticos. Lo anterior llevó a reflexionar sobre la necesidad de implementar nuevas herramientas que propicien una nueva metodología en clase y fomenten el aprendizaje autónomo.

Actualmente la institución imparte un curso de Matemática I a todos los estudiantes, tanto de manera presencial como virtual, en el cual se fundamenta en el reconocimiento de las

matemáticas como herramienta en la vida cotidiana y se entiende como un espacio para que el estudiante confronte, revise y modifique *lo que cree* que sabe, *lo que cree* que significa estudiar y *lo que cree* que significa aprender. El logro fundamental de esta asignatura es brindar experiencias que permitan el aprendizaje comprensivo de conceptos matemáticos, el aprendizaje de mecanismos y estrategias para aprender matemáticas y el establecer habilidades básicas de matemáticas.

Análisis previo para el diseño del dispositivo didáctico

En la etapa del diseño centramos la reflexión en la dificultad en el proceso de aprendizaje y la baja motivación de los estudiantes, estas problemáticas han incidido negativamente en la clase de matemática promoviendo la deserción y el desinterés, las cuales siguen creciendo en el desarrollo de las asignaturas de la facultad en semestres posteriores. Según Chevallard, este tipo de problema didáctico se refiere a la *pérdida de sentido de la matemática* y a la *pedagogía dominante* (Chevallard, 2004, 2011, 2013; Barquero, Bosch y Gascón, 2014) el cual se caracteriza, entre otras, por la eliminación de la razón de ser las organizaciones matemáticas (OM) presentándolas como obras acabadas y la imposición de objetivos formulados en términos de contenidos del saber a enseñar (Barquero et al., 2011). Chevallard (2004, 2011, 2013) denomina este problema de investigación como la *monumentación del saber* e *inventario de saberes*. En cierto sentido, este fenómeno didáctico se puede comparar con la visita a un museo; el grupo de visitantes observa las obras (mirar, pero no tocar) y el museo se encarga de cuidarlas y mantenerlas intactas (Parra y Otero, 2017).

En busca de fomentar interés y fortalecer el proceso de autoestudio por parte del estudiante, resulta necesario crear una conexión fuerte entre las matemáticas y sus usos, tanto en la vida cotidiana, como en la profesión laboral. Este problema se puede abordar desde la didáctica en donde diversas investigaciones proponen la *modelación matemática* como un puente que permite articular las matemáticas y las aplicaciones en la especialidad (Barquero, Bosch y Romo, 2018; Domínguez-García, García-Planas y Taberna, 2016; Hitt y Quiroz, 2017; Romo, 2014; Romo, Romo y Vélez, 2012).

El objetivo del proyecto se centra entonces en desarrollar un dispositivo didáctico que posibilite una integración de la modelación matemática en la clase, tanto presencial como virtual, de la asignatura de Matemática I. Se escoge una cartilla dinámica atendiendo al uso de herramientas tecnológicas en la educación universitaria, la cartilla permea la clase de

actividades de investigación matemáticas, las cuales pueden ser estudiadas también sin el acompañamiento del docente. Estas actividades permiten experimentar y modelizar las situaciones de manera dinámica dotando de sentido la importancia de usar herramientas matemáticas para resolverlas.

Herramientas tecnológicas en la enseñanza matemática.

En los últimos semestres se ha fortalecido la asignatura con el uso de diferentes estrategias tecnologías pues estamos convencidos que el reto de la educación actual debe ser conseguir una enseñanza de las matemáticas cognitivamente eficiente. Las tecnologías y software educativos han permitido dar un gran paso en este reto (Meyer, 2010, Wolfram, 2010).

Las funciones que desempeñan los materiales manipulativos (tangibles o gráfico-textuales) en el aprendizaje de la matemática se fundamentan en teorías que dan un peso importante a las relaciones entre el lenguaje y el pensamiento y conceden gran relevancia a los medios de expresión en el estudio de las matemáticas (Godino, Batanero & Font, 2003).

Diversas investigaciones están demostrando que los estudiantes pueden aprender más matemáticas y de manera más profunda con el uso de una tecnología apropiada sin llegar a cometer el error de usarla como sustituto de intuiciones y comprensiones conceptuales. Los recursos tecnológicos se deben usar de manera amplia y responsable con el fin de enriquecer el aprendizaje matemático de los estudiantes (Godino, Batanero & Font, 2003).

Por lo anterior se fundamenta que el uso de la tecnología en el aula de clase juega un papel cuya importancia se ha incrementado en los últimos años; específicamente en el aprendizaje de las matemáticas, los instrumentos tecnológicos (como calculadoras graficadoras, tabletas, computadoras o software específicos de matemáticas) están permitiendo re evaluar el currículo en el que gran parte (o todo) el peso estaba en desarrollar competencias operativas y algorítmicas y se deja de lado el desarrollo de competencias comprensivas y conceptuales (Cantoral, Cordero, Farfan & Imaz, 1991).

El desarrollo del pensamiento matemático visto desde el punto de vista de competencias requiere enfocarse de manera diferente en el tratamiento procedimental y brindar a los estudiantes más espacios de acompañamiento en los procesos cognitivos y conceptuales. (López & Triana, 2013). El uso de la tecnología juega un papel importante en el aprendizaje de las matemáticas y en el aprendizaje procedimental de los conceptos matemáticos, existen

software matemático que permite desarrollar objetos dinámicos que potencien la construcción de conceptos matemáticos en el estudiante (Córdoba, Vingues, Cárdenas, Martínez, Obando, Posada, …, Sepúlveda, 2002).

Diseño del dispositivo didáctico: Cartilla dinámica

Las justificaciones anteriores permiten escoger la cartilla dinámica como una herramienta tecnológica que apoye el proceso de enseñanza en la clase de matemáticas, el uso de esta deberá estar acompañado de un cambio de pensamiento tanto en el docente como en los estudiantes, pues, no se busca presentar una serie de organizaciones matemáticas en el currículo escolar, sino que por medio de actividades el estudiante evidencie la importancia de construir OM que le ayuden en el proceso de desarrollo de las actividades a las que se enfrenta a lo largo de toda la asignatura.

La cartilla se diseñó con el software *Wolfram Mathematica*, el cual permite crear modelos manipulables que sirvan como herramienta de modelación en el proceso de desarrollo de las diferentes situaciones. El producto se exporta como un archivo *cdf* (por sus siglas en inglés, *computable document format*) el cual puede ser ejecutado en cualquier sistema operativo.

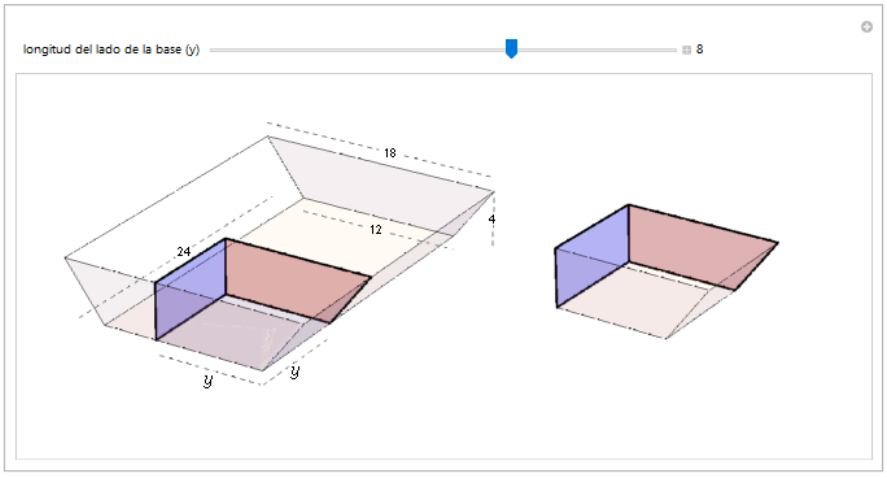
Debido a las restricciones institucionales, se decidió no cambiar el contenido de la asignatura, esto es, diseñar diferentes actividades que contribuyan al desarrollo da las OM y las competencias previamente establecidas.

A modo de ejemplo, en la imagen 1 se describe una actividad de la unidad 3 de la cartilla, denominada “ecuaciones e inecuaciones”: en esta, el estudiante puede manipular el tanque y las esclusas para visualizar lo que el problema le pide. El objetivo es plantear un sistema de ecuaciones no lineales que se reducen a una ecuación cuadrática, en la cual una de las soluciones es la respuesta a una de las preguntas plateadas.

Este tipo de recursos brinda al estudiante herramientas manipulables para enfrentar los problemas y actividades planteados en las unidades del libro, contribuyen a dotar de sentido las matemáticas que está viendo y a entender cómo utilizarlas en problemas aplicados.

Situación: Almacenamiento de agua, parte 3

El tanque también es utilizado para realizar pruebas con sustancias jabonosas o diversos tipos de soluciones. Para evitar que toda la superficie interna entre en contacto con la nueva sustancia, se aisla una sección del tanque instalando dos esclusas verticales, una rectangular (esclusa de superficie azul) y otra en forma de trapecio (esclusa de superficie roja), ambas de 4 m de altura y con una base de igual longitud, puede manípular el siguiente interactivo del tanque con las esclusas mencionadas.



Problema 1

Si se realiza una prueba con 378 m³ de una sustancia jabonosa que al vertirse en el tanque queda un metro abajo del borde:

⇒

¿Cuáles deben ser las dimensiones de cada esclusa?
¿Cuál es el área de cada esclusa?

Imagen 1. Descripción de una actividad de la unidad 3. Elaboración propia

La cartilla está compuesta por 4 unidades, estas a su vez están divididas secciones y en cada sección se utiliza una situación problema con varias actividades. El diseño de los recursos manipulables ayuda al estudiante a entender la actividad e identificar variables, constantes, datos y demás herramientas que permita encontrar vías de solución a las preguntas planteadas.

Adicionalmente, se cuentan con mini recursos que explican algunos conceptos requeridos para abordar la actividad, por ejemplo, en la unidad 1 al presentar los números racionales, se tienen recursos para trabajar el área de regiones planas, la proporción o las operaciones de los números racionales, la imagen 2 muestra el acceso a los recursos: en esta actividad, el estudiante puede manipular dos esquinas del rectángulo para "trazar" virtualmente el margen pedido, los recursos de área y porcentaje están en la parte inferior y al dar clic en estos se desprenden ventanas informativas: en la del área aparecen las fórmulas básicas del área de algunas regiones planas, y en la de porcentaje la definición y algunos ejemplos.

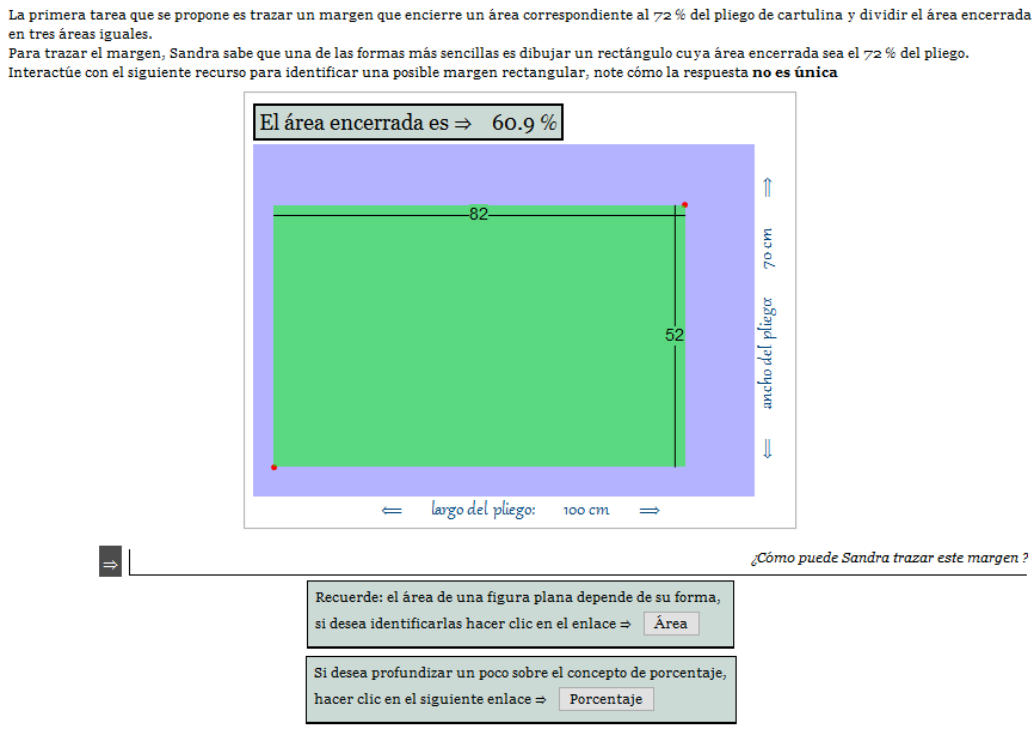


Imagen 2. Descripción de una actividad de la unidad 1 y recursos. Elaboración propia

Lo anterior corresponde al diseño de la cartilla dinámica la cual se ha aplicado en algunos cursos tanto virtuales como presenciales de la institución.

Análisis de la implementación

Cambiar la cultura de la pedagogía dominante necesita un apoyo institucional de manera general en donde todos los factores de la comunidad educativa deben participar activamente, la IUPG está abierta a los cambios que influyan positivamente en la enseñanza universitaria y esta ideología se permea a los directivos y administradores de las diferentes asignaturas. Evidenciamos una fuerte resistencia al cambio en los usuarios directos del proyecto: los docentes que imparten la asignatura y los estudiantes.

Las primeras implementaciones de la cartilla no han mostrado los resultados esperados pues los estudiantes son renuentes a trabajar e investigar, están modelados bajo una doctrina de copiar o de memorizar fórmulas sin sentido, pensando que no serán útiles para su profesión. La cultura de nosotros los docentes, complementa la de los estudiantes, tampoco nos gusta los cambios y estamos acostumbrados a la pedagogía dominante junto con las problemáticas que esta conlleva.

Esta es una fuerte restricción y el cambio se debe fomentar poco a poco, dando a conocer lo beneficios del cambio en la enseñanza y el aprendizaje, nuestra razón de ser son los estudiantes, y cuando ellos comienzan a cambiar su pensamiento, generan fuertes relaciones entre la matemática y sus usos; puede no recodar o memorizar una fórmula, pero se espera que logre identificar características que le permita modelizar situaciones, buscar y utilizar herramientas matemáticas para dar una respuesta eficiente a la situación.

Por otro lado, los cursos impartidos por los docentes que desarrollamos la cartilla han tendido varias experiencias positivas: en un comienzo los estudiantes presentan resistencia a abordar las temáticas matemáticas por medio de situaciones, pero poco a poco, con la influencia del docente, se dan cuenta que resulta mucho más eficiente de esta manera; una vez el estudiante se sumerge en la situación y la entiende, se da cuenta que necesita algunas herramientas (que conoce o no) para solucionarla, ellos mismos evidencian la necesidad de buscarlas y utilizarlas, creando así un puente entre las matemáticas y la realidad, los estudiantes dejan de ver las matemáticas como algo sin sentido y comienzan a verlas como una construcción de conocimientos. La manipulación del recurso es una herramienta eficaz para que el estudiante "viva" la situación y se apersone de esta. En este sentido, el uso de esta herramienta permite cambiar la pedagogía dominante de la escuela y dotar de significado los conceptos comprendido en el currículo de la asignatura, además que permite cambiar la clásica clase teórica por el trabajo con situaciones problemas, contribuyendo al desarrollo de habilidades básicas del pensamiento.

Conclusiones

La implementación de la cartilla en la asignatura de matemáticas ha contribuido una alternativa positiva en la enseñanza tradicional de las matemáticas. Si bien se han identificado restricciones puntuales en el pensamiento de docentes y estudiantes y su oposición, poco a poco se fomenta el cambio y se evidencia los beneficios del nuevo pensamiento.

El interés en la asignatura ha crecido y la deserción disminuido paulatinamente, si los estudiantes dotan de sentido las matemáticas enseñadas y su aplicación, ven la necesidad de estudiarlas y estrategias como las planteadas en este proyecto fomentan el cambio de pedagogía y apoyan el trabajo del docente en clase.

Referencias

Barquero, B., Bosch, M., & Gascón, J. (2014). Incidencia del «aplicacionismo» en la integración de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales. *Enseñanza de Las Ciencias*, 32(1), 83–100. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.933.

Barquero, B., Bosch, M., & Romo, A. (2018). Mathematical modelling in teacher education: dealing with institutional constraints. *ZDM Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0907-z.

Cantoral, R., Cordero, Farfan R. Imaz E (1991). *Una revisión de la Investigación Educativa. En Cálculo y Análisis.* Universidad Autónoma del Estado de México UAEM. Segundo Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática.

Córdoba, J. Vingues, G. Cárdenas, C. Martínez, F. Obando, G. Posada, F. Jiménez, A. Sepúlveda, J (2002). *Herramientas computacionales en el desarrollo de procesos de interpretación y argumentación en clase de matemáticas*. Ministerio de Educación, Memorias del congreso internacional: Tecnologías computacionales en el currículo de Matemáticas. Bogotá, Colombia.

Chevallard, Y. (2004) *Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire*. http://yves.chevallard.free.fr.

Chevallard, Y. (2011). *Improvisaciones cruzadas sobre lo didáctico, lo antropológico y el oficio de investigador en TAD*. Recuperado de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=201.

Chevallard, Y. (2013). Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contraparadigma Emergente. *Journal of Research in Mathematics Education REDIMAT*, 2(2), 61–1. https://doi.org/10.4471/redimat.2013.26.

Domínguez-García, S., García-Planas, M. I., & Taberna, J. (2016). Mathematical modelling in engineering: an alternative way to teach Linear Algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 47(7), 1076–1086. https://doi.org/10.1080/0020739X.2016.115373.

Godino, J. D. Batanero, C. Font, V.: *Fundamentos de la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas para Maestros*. Granada, Universidad de Granada, 2003.

Hitt, F., & Quiroz, S. (2017). Aprendizaje de las matemáticas a través de la modelación matemática en un medio sociocultural ligado a la teoría de la actividad. *Revista Colombiana de Educación*, (73), 151. https://doi.org/10.17227/01203916.73rce151.175.

López, O. & Triana, S. (2013). Efecto de un activador computacional de autoeficacia sobre el logro de aprendizaje en estudiantes de diferente estilo cognitivo. *Revista Colombiana de Educación*, 64.

Meyer, D. (2010). *Math class needs a makeover*. TED talks. Recuperado de: https://www.ted.com/talks/dan_meyer_math_curriculum_makeover.

Parra, V., & Otero, M. R. (2017). *Estudiar límite y derivada en la escuela secundaria: una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico*. Buenos Aires, Argentina., Recuperado de: https://www.researchgate.net/publication/320290040_Estudiar_limite_y_derivada_en_la_escuela_secundaria_una_propuesta_desde_la_teoria_antropologica_de_lo_didactico.

Romo, A. (2014). La modelización matemática en la formación de ingenieros. *Revista de Educación Matemática*, 26(3), pp. 314-338.

Romo, A., Romo, R., & Vélez, H. (2012). De la ingeniería Biomédica al aula de Matemáticas. *Revista Electrónica de Computación, Informática, Biomédica Y Electrónica*, 1(1).

Wolfram, C. (2010). *Teaching kids real math with computers*. TED talks. Recuperado de: https://www.ted.com/talks/conrad_wolfram_teaching_kids_real_math_with_computers.

Volver al índice de autores

2.3.2. Curso en línea como recurso didáctico en clases de matemáticas

Rafael Aguilar González
Selina Rebeca del Carmen Ponce Castañeda
Universidad Politécnica de San Luis Potosí, México

Resumen

En este estudio, se presenta la experiencia de la Universidad Politécnica de San Luis Potosí en el diseño e implementación de un curso en línea como recurso didáctico de apoyo para un curso presencial de Aritmética y Álgebra. Se ha diseñado un curso en línea estructurado en módulos de aprendizaje, los cuales incluyen experiencias y evidencias de aprendizaje, con contenidos y competencias acordes al curso presencial. La incorporación del curso en línea como un recurso didáctico que complementa al curso presencial ha requerido un tiempo de adaptación tanto de maestros como de estudiantes a esta forma de trabajo, después del cual ha permitido una mejoría en el aprovechamiento de los estudiantes tanto en sus promedios como en el porcentaje de aprobación

Introducción

En la Universidad Politécnica de San Luis Potosí se imparte el curso de Introducción a las Matemáticas, como un curso remedial para estudiantes de nuevo ingreso en la modalidad presencial, durante cinco horas a la semana por 16 semanas. Tiene como objetivo preparar al estudiante con los conocimientos, habilidades y actitudes que le permitan cursar de manera satisfactoria las asignaturas que se imparten en la academia de Matemáticas.

La estrategia didáctica del curso, acorde a la educación basada en competencias, debe incluir una diversidad de ambientes de aprendizaje, entre éstos la utilización de las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información. Una alternativa para lograrlo ha sido el desarrollo de un curso en línea, como recurso didáctico que sirva como instrumento de apoyo y consulta para los estudiantes del curso presencial.

En este curso se toma en consideración que los estudiantes tienen distintos estilos de aprendizaje y a la vez pretende una mayor uniformidad en la profundidad y la dificultad de los contenidos y ejercicios del curso, disminuyéndose así las diferencias en conocimientos y habilidades entre los diferentes grupos de estudiantes.

Objetivo

El objetivo de este trabajo es diseñar e implementar un curso en línea de matemáticas como recurso didáctico de apoyo y consulta para los estudiantes del curso presencial.

Descripción del método

Características deseables del curso

Las características deseables del curso que dan guía al diseño del mismo son las siguientes: estar disponible para todos los estudiantes y profesores, el entorno debe ser amigable para los usuarios, debe incluir experiencias y evidencias del aprendizaje, debe estar centrado en la adquisición de aprendizajes, en el fortalecimiento de las habilidades de análisis y razonamiento que favorezcan las competencias matemáticas a las que contribuye el curso presencial, mediante el autoaprendizaje y el uso de las tecnologías de la información, debe contribuir al desarrollo de las capacidades y competencias matemáticas que persigue el curso presencial, debe contribuir a alcanzar resultados de aprendizaje acordes a los tres primeros niveles de la taxonomía de Bloom (conocimiento, comprensión y aplicación) (Sáenz García, 2010), ----. Igualmente serán acordes a los niveles de desempeño y a los procesos cognitivos descritos en PISA Matemáticas (SEP, 2011), como lo muestra la tabla 1.

Procesos cognitivos en Matemáticas (PISA)		**Taxonomía de Bloom**	**Características**
Reproducción	Operaciones comunes, cálculos simples y problemas propios del entorno inmediato y la rutina cotidiana.	Conocimiento	Habilidad para retrotraer a la memoria o recordar hechos sin comprenderlos necesariamente.
		Comprensión	Habilidad para comprender e interpretar información aprendida.
Conexión	Ideas y procedimientos matemáticos para la resolución de problemas que ya no pueden definirse como ordinarios, pero que aún incluyen escenarios familiares. Involucra también la elaboración de modelos para la resolución de problemas	Aplicación	Habilidad para utilizar material aprendido en situaciones nuevas, por ejemplo, trabajar con ideas y conceptos para solucionar problemas.
		Análisis	Habilidad para descomponer la información en sus componentes, por ejemplo, buscar interrelaciones e ideas.
Reflexión	Implica la solución de problemas complejos y el desarrollo de una aproximación matemática original.	Síntesis	Habilidad de unir los diferentes componentes
		Evaluación	Habilidad de juzgar el valor de los elementos para propósitos específicos.

Tabla 1.- Procesos cognitivos del estudiante en PISA y en la taxonomía de Bloom

Infraestructura requerida

El curso en línea se aloja en la plataforma de Blackboard. Las herramientas de esta plataforma permiten el diseño del curso con presentaciones didácticas, exámenes con diferentes tipos de reactivos. Permite también almacenar una base de reactivos, los cuales pueden utilizarse de forma aleatoria en los exámenes del curso. Permite también el control automático del tiempo de aplicación del examen y la revisión automática e inmediata, lo que posibilita tener los resultados en menor tiempo comparado con el tiempo ocupado en la revisión manual de exámenes en papel. También posibilita la retroalimentación en línea entre estudiantes y profesores. Los estudiantes pueden acceder al curso en línea desde cualquier computadora conectada a internet. Además, la Universidad Politécnica cuenta con más de 500 espacios con computadoras conectadas a la red. Los estudiantes y profesores han recibido capacitación en el uso de la plataforma de Blackboard.

Estructura del curso

La estructura del curso se ha diseñado acorde al curso presencial en tres unidades y cada unidad se ha organizado en módulos de aprendizaje, (como lo muestra la figura 1), en los cuales es posible navegar en cualquier orden de acuerdo a las necesidades.



Figura 1.- Estructura del curso en línea

El curso se divide en las siguientes unidades:

1. **Aritmética:** En esta unidad el estudiante realiza operaciones con números reales mediante la aplicación de sus propiedades y soluciona situaciones contextualizadas que involucren los números reales.

2. **Álgebra:** En esta unidad el estudiante resuelve operaciones algebraicas, ecuaciones e inecuaciones y soluciona situaciones contextualizadas que involucren estas operaciones.

3. **Funciones:** En esta unidad el estudiante resuelve operaciones con funciones y soluciones situaciones contextualizadas que las involucran.

Cada módulo de aprendizaje incluye los siguientes elementos:

a) **Introducción al tema del módulo:** incluye los conceptos básicos, las reglas y/o teoremas involucrados con las operaciones correspondientes al módulo.

b) **Ejemplos de operaciones:** incluye operaciones aritméticas y/o algebraicas resueltas paso a paso.

c) **Ejemplos de aplicación:** incluye la resolución paso a paso de aplicaciones contextualizadas de operaciones aritméticas y/o algebraicas correspondientes al módulo.

d) **Ejercicios de práctica:** con reactivos acerca de conceptos, reglas, operaciones y problemas de aplicación, para que el estudiante compruebe si ha alcanzado los resultados de aprendizaje

e) **Exámenes:** con reactivos acerca de conceptos, reglas, operaciones y problemas de aplicación, para comprobar que el estudiante alcanzó los resultados de aprendizaje.

Los exámenes se han estructurado de acuerdo a los resultados de aprendizaje esperados y consisten de tres tipos de reactivos:

- **Conceptuales:** para evaluar el conocimiento de conceptos, reglas y teoremas.

- **Procedimentales:** para evaluar la habilidad del estudiante para resolver operaciones.

- **Aplicación:** para evaluar la capacidad del estudiante para transferir sus conocimientos y habilidades a la resolución de problemas.

Se diseñaron reactivos que presentan varias opciones de respuesta estructurada, de las cuales solo una es la correcta, las restantes son distractores que incluyen los errores más comunes de los estudiantes. Las opciones de respuesta se presentan en orden aleatorio y los reactivos se seleccionan aleatoriamente de un banco de reactivos, por lo que cada estudiante presenta un examen distinto y la probabilidad de que responda correctamente por azar es menor. La evaluación se realiza de manera automática y el estudiante puede visualizar sus resultados inmediatamente, así como recibir retroalimentación.

Grupos de prueba

Antes de aplicar el curso en línea a la población total de estudiantes, se seleccionaron 6 grupos de matemáticas correspondientes a las 6 carreras que se imparten en la universidad y se les aplicaron exámenes en línea a la par de exámenes escritos. En la figura 2, se muestra que no hay diferencia significativa entre la aplicación de exámenes en línea y los exámenes escritos.

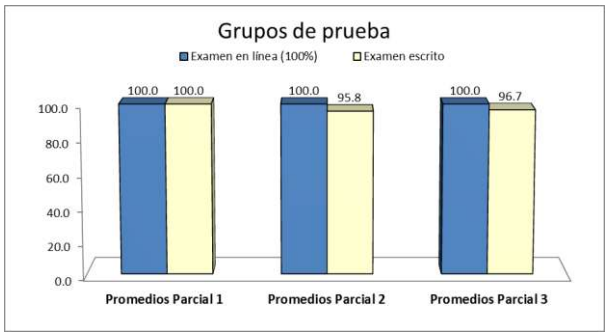


Figura 2.- Resultados de los grupos de prueba

Implementación del curso

El curso en línea se incorporó como apoyo didáctico para el curso presencial a partir del período académico de otoño 2016, llevándose a cabo las siguientes actividades:

- Los estudiantes son inscritos al curso en línea, el cual está disponible desde el primer día de clases.

- Cada profesor tiene asignado un espacio en la plataforma de Blackboard, y allí se desempeña como administrador del curso en línea para el grupo de estudiantes a los que imparte el curso presencial.

- El estudiante, al ingresar a cada módulo del curso en línea, realiza la lectura en línea de los conceptos, propiedades, reglas y teoremas, así como ejemplos de operaciones y aplicaciones contextualizadas de las operaciones. Una alternativa es la descarga de los archivos y su estudio fuera de línea o impresos.

- Cada módulo incluye ejercicios en línea, con reactivos acerca de conceptos, reglas, operaciones y problemas de aplicación. La evaluación se realiza de manera automática y el estudiante puede visualizar sus resultados inmediatamente, así como recibir retroalimentación inmediata de parte del software y posteriormente de su profesor en el aula de clase

- Cada módulo incluye también exámenes en línea, con reactivos acerca de conceptos, reglas, operaciones y problemas de aplicación. La evaluación se realiza de manera automática y el estudiante puede visualizar sus resultados inmediatamente.

- El profesor, como administrador del curso, puede revisar los aciertos de sus estudiantes en la evaluación en línea y descargar sus calificaciones.

Resultados

En este trabajo se ha diseñado e implementado un curso en línea como apoyo didáctico para un curso presencial de Aritmética y Álgebra y de acuerdo a los resultados obtenidos, se puede apreciar en la figura 3 que el promedio general obtenido por los estudiantes tiene una tendencia positiva desde el período académico en que se inició con la incorporación del curso en línea.

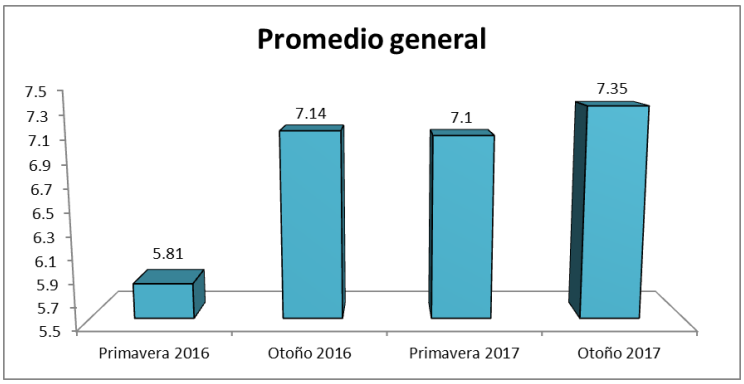


Figura 3.- Evolución de promedios en el curso de Matemáticas

En la figura 4 se puede apreciar que el porcentaje de aprobación del curso disminuyó en el primer período que se incorporó el curso en línea, y partir de entonces tiene una tendencia positiva en los siguientes periodos académicos. Durante la implementación del curso en línea se debieron resolver incidencias técnicas referentes a la capacidad del servidor, desconexiones al momento de realizar exámenes; así mismo en la adaptación de estudiantes y profesores a ese nuevo recurso didáctico.

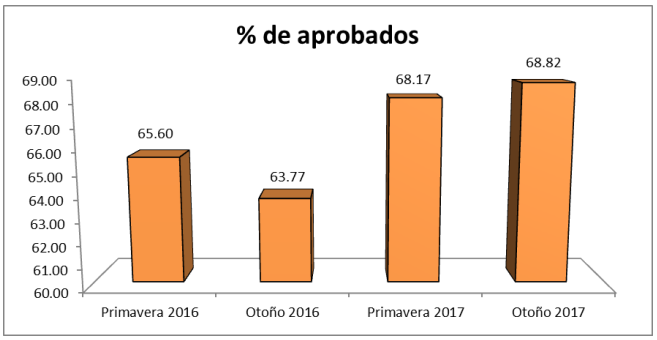


Figura 4.- Evolución de porcentaje de aprobación en el curso de Matemáticas

Proceso de mejora:

Como parte del proceso de mejora del curso se ha iniciado con el análisis de los reactivos de los exámenes, para identificar si discriminan con eficiencia el rendimiento de los alumnos. El software utilizado proporciona estadísticas sobre el rendimiento general de los exámenes y sobre preguntas individuales, de este modo, es más fácil reconocer las preguntas que podrían no discriminar con eficiencia el rendimiento de los alumnos, lo que posibilita la mejora o la sustitución de las preguntas de los exámenes**.**

La discriminación indica lo bien que una pregunta diferencia entre alumnos que conocen el tema de los que no. Una pregunta es una buena discriminadora cuando los alumnos que responden correctamente a la pregunta obtienen también un buen resultado en la evaluación. Los valores de discriminación pueden oscilar entre -1.0 y +1.0 y se calculan utilizando el coeficiente de correlación de Pearson. La dificultad de los reactivos es el porcentaje de alumnos que respondió a la pregunta correctamente.

En general, las buenas preguntas tienen una dificultad media (30 % a 80 %) y valores de discriminación buena o aceptable (mayor que 0,1). Las preguntas que se revisan tienen una dificultad fácil (> 80 %) o difícil (< 30 %) u valores de discriminación insatisfactoria (< 0,1).

La utilización de videos como herramienta didáctica es otra parte del seguimiento que se está dando al curso en línea. Se está trabajando en la elaboración de videos con ejemplos de la resolución de operaciones aritméticas y algebraicas, para incorporarlos al curso en línea como un elemento de consulta para los estudiantes.

Conclusiones

La incorporación del curso en línea como apoyo didáctico al curso presencial permite diversificar los ambientes de aprendizaje de los estudiantes.

Los resultados muestran que los estudiantes y los profesores han requerido de un tiempo de adaptación a esta forma de trabajo, después del cual los resultados académicos de los estudiantes tienen una tendencia positiva, tanto en el promedio como en los porcentajes de aprobación.

El seguimiento del curso mediante el análisis de los resultados, motiva el proceso de mejora mediante la incorporación de videos tutoriales y el diseño de nuevos reactivos en las evidencias de aprendizaje.

Referencias

Secretaría de Educación Pública (SEP), (2011). *Competencias para el México que queremos. Hacia PISA 2012*. México D.F.

Sáenz García, M.L. (2010). *Taxonomía de habilidades del pensamiento*. Disponible en https://www.inacap.cl/tportal/portales/.../File/taxonomiaHabilidadesPensamiento.pdf

Volver al índice de autores

2.3.3. Uso de recursos interactivos para el desarrollo de habilidades de pensamiento en la modalidad virtual

Camilo Andrés Ramírez Sánchez
Sandra Milena Rojas Tolosa
Institución Universitaria Politécnico Grancolombiano, Colombia

Resumen

El surgimiento de nuevas modalidades educativas ha posibilitado el autocontrol del tiempo y de lo que se desea aprender al tener libre acceso a fuentes de información y de conocimiento. Esto ha conllevado a la necesidad de aprovechar los nuevos desarrollos tecnológicos para el diseño tanto de plataformas como de recursos multimedia de manera que el usuario, a partir de procesos de interacción, genere nuevos aprendizajes. Se pretende socializar la experiencia de dos docentes de matemáticas de la modalidad virtual del Politécnico Grancolombiano (Colombia), quienes, al enfrentarse al reto de formar en esta modalidad, se vieron en la necesidad de diseñar recursos multimedia que posibilitarán el desarrollo de habilidades de pensamiento en matemáticas. Para ello, fue necesario establecer relaciones entre las habilidades de pensamiento y el conocimiento matemático y seleccionar un software que permitiera al estudiante poner en práctica procesos básicos de pensamiento por medio de la interacción con el recurso. Como resultado se diseñaron cuatro recursos para la primera unidad del módulo de Álgebra Lineal de la modalidad virtual; a modo de ejemplo, se presenta uno de los recursos en el que se describe cómo se involucran procesos básicos de pensamiento necesarios para el desarrollo de habilidades básicas.

Introducción

En la actualidad han surgido diversos modelos de educación que buscan cubrir y llegar a la mayor cantidad de personas para apoyar los procesos de formación de los individuos a todo nivel educativo. Uno de estos modelos es el virtual, que gracias al desarrollo de nuevas tecnologías de la información y comunicación (TIC), ofrece la posibilidad de formarse desde cualquier lugar con la única condición de contar con las herramientas y los medios necesarios de conectividad para acceder a la información; no obstante, no es posible asegurar que las nuevas prácticas de enseñanza aprendizaje en las diferentes modalidades muestran cambios significativos tanto en su estructuración como en la verificación del

aprendizaje de los estudiantes en comparación con las prácticas tradicionales (Gros y Salvat, 2011). En algunos casos el desarrollo de los contenidos, diseño de recursos y las prácticas de interacción en esta modalidad parecen ser una traslación de los procesos de la modalidad presencial, lo cual desencadena dificultades en el aprendizaje de los estudiantes.

Teniendo en cuenta los planteamientos anteriores, al revisar la propuesta actual del curso de Álgebra Lineal, ofertado para los programas de pregrado de la modalidad virtual de la Institución Universitaria Politécnico Grancolombiano (IUPG), se identifica la necesidad de diseñar recursos interactivos que posibiliten al estudiante establecer relaciones entre las diferentes representaciones dinámicas de los conceptos matemáticos a partir de procesos de visualización, dado que este componente es esencial para la comprensión de conceptos matemáticos y, que le permita el desarrollo de habilidades básicas de pensamiento a través de procesos básicos de pensamiento como la observación, comparación, relación y clasificación.

Para el diseño de los recursos se realizó una revisión bibliográfica de resultados tanto de experiencias educativas como planteamientos teóricos sobre el desarrollo de habilidades de pensamiento (Coral, 2014; Cuicas Avila et al, 2007; Sánchez, 2014) y el tipo de interacción que se da entre los recursos y el estudiante que posibilitan el aprendizaje de las matemáticas en la modalidad virtual (Sucerquia Vega et al, 2016; Ferreira, Salamanca & Abello, 2016).

Se pretende presentar los recursos diseñados en formato computable (cdf, computable document format) a través software Wolfram Mathematica y cómo a través de su manipulación el estudiante puede poner en práctica procesos básicos de pensamiento, en el caso particular del tipo de solución de sistemas de ecuaciones lineales a través de sus diferentes representaciones.

Desarrollo del pensamiento en la modalidad virtual

Con el surgimiento de nuevas modalidades educativas como la virtual, los estudiantes se enfrentan a nuevos retos como lo es al uso de la tecnología, la interacción directa con los contenidos y gestión de la información, lo que conduce en algunos casos a dificultades de aprendizaje.

Como todo cambio, se esperaría que con el surgimiento de una educación mediada por la tecnología y la virtualidad se generaran cambios significativos en aspectos pedagógicos,

epistemológicos y didácticos en los programas curriculares y, cambios actitudinales y cognitivos en los actores del proceso educativo, que contribuya al desarrollo eficaz de procesos de aprendizaje en ambientes virtuales; no obstante, como afirma Gros y Salvat (2011) no es posible asegurar que este tipo de prácticas se diferencien de las realizadas en las prácticas educativas tradicionales. En general, las propuestas educativas siguen siendo una copia de modelos tradicionales de la educación presencial en donde existe un medio de transmisión de la información (docente-estudiante, en la modalidad presencial y, contenidos digitalizados-estudiante, tutor-estudiante, en la modalidad virtual).

En los últimos tiempos, a partir de las dificultades de aprendizaje identificadas en los estudiantes, la educación ha visto la necesidad ofrecer una formación basada en competencias (habilidades, conocimientos, procesos y actitudes) que permita a los seres humanos, por una parte, formarse en sus diferentes dimensiones, en particular, lo que concierne a las habilidades de pensamiento y por otra, aprovechar el avance acelerado de la tecnología para formarse a través de diversas modalidades educativas (Ortega, Moreno y Rodríguez, 2014; Coral 2012).

En lo que respecta al desarrollo a las habilidades en la modalidad virtual, Ortega, Moreno y Rodríguez (2014) afirman que

> Como parte de los procesos de construcción del conocimiento, basados en el enfoque de la interacción con el ambiente, con los saberes y con otras personas en un entorno virtual, también es necesario que en el estudiante se desarrollen (a partir de esa interacción) habilidades de pensamiento que le permitan enfrentarse a diversas situaciones (p.13).

Para dar respuesta al cómo desarrollar habilidades de pensamiento en la modalidad virtual, primero es necesario clarificar a qué hace referencia este término y lo que implica. Una habilidad de pensamiento es la facultad para aplicar un proceso a nivel de pensamiento que implica la transformación de estímulos externos en una representación mental, una representación mental en otra o en una acción motora (Sanchez, 2002 citada por Ortega, Moreno y Rodríguez, 2014). Esta autora considera como habilidades de pensamiento, las habilidades para aprender, la solución de problemas, la toma de decisiones, el pensamiento crítico y la creatividad; además define procesos básicos, procesos de razonamiento, procesos creativos y procesos superiores como componentes de habilidades de

pensamiento. En la imagen 1, se describen los procesos básicos de pensamiento dado que fueron los de interés para los autores de esta ponencia.



Imagen 1. Procesos básicos del pensamiento. Elaboración propia basado en Coral (2012) y Sanchez (2004)

Los procesos descritos en la imagen 1 son las herramientas con las que dispone el estudiante para procesar el contenido y profundizar el conocimiento, por tanto, para un desarrollo adecuado de estas habilidades es necesario que la enseñanza ofrezca estrategias en las que los procesos de pensamiento sean parte de la disciplina y del modo de aprenderlas, en las que no solo se consideren los contenidos específicos, sino sus representaciones y lenguaje (Coral, 2012). Adicionalmente, en la imagen 1 se hace referencia a los aspectos generales que permiten el desarrollo de habilidades; sin embargo, cuando se centra la mirada en la modalidad virtual, es indispensable hacer mención al papel de la tecnología dado que es la herramienta que permite al estudiante acceder e interactuar fácilmente con el conocimiento a través de recursos multimedia (audio, video, animaciones, texto) del curso, tutor, compañeros, bases de datos, simulaciones y diversas formas más sofisticadas en las que se presentan los conocimientos. En este documento sólo se hará referencia al uso de recursos multimedia para el desarrollo de habilidades de pensamiento.

Diseño de recursos interactivos para el desarrollo de habilidades del pensamiento en la modalidad virtual

De acuerdo con los planteamientos expuestos en la sección anterior surgió el interés de diseñar recursos interactivos que posibilitaran al estudiante desarrollar habilidades de pensamiento por medio de la puesta en práctica de procesos de pensamiento básicos para afianzar los conocimientos y procedimientos correspondiente a la primera unidad del módulo de Álgebra Lineal, ofertado en la modalidad virtual del IUPG.

El diseño de estos recursos se realizó con el software Mathematica dado que permite la presentación de diversos ejemplos aleatorios con una estructura particular según el proceso o concepto matemático que se esté abordando, de manera promueve la puesta en práctica de procesos como la observación, comparación, relación y clasificación para el desarrollo de habilidades básicas de pensamiento.

Integrar el uso de software matemático favorece: procesos inductivos y visualización de los conceptos, relacionaos con el proceso de observar; posibilitan la comparación, plantear, verificar hipótesis relacionado con los procesos de comparar, relacionar; promueve el autoaprendizaje y facilita la comprensión y aprendizaje de las matemáticas (Cuicas Avila, Debel Chourio, Casadei Carniel, Alvarez Vargas, 2007).

Para Sucerquia Vega et al (2016) el tipo de interacción que se da entre los recursos y el estudiante es un aspecto crucial en el aprendizaje de las matemáticas en la modalidad virtual, donde la visualización juega un papel importante para la comprensión de los conceptos matemáticos en la que se requiere de múltiples representaciones.

Para que los recursos atendieran al propósito principal, en el diseño de los recursos se contempló los siguientes aspectos:

- Involucrar los procesos básicos de pensamiento de observar, comparar, relacionar y clasificar.
- Emplear diferentes representaciones del concepto matemático a abordar.
- Posibilitar la puesta en práctica de los procesos básicos de pensamiento.

Teniendo en cuenta los aspectos anteriores, para la temática de Sistemas de Ecuaciones lineales se diseñaron cuatro recursos:

- Características esenciales de las matrices.
- Operaciones entre matrices.
- Interpretación de la solución de un sistema de ecuaciones lineales.
- Representación gráfica de sistemas de ecuaciones.

A modo de ejemplo, a continuación, se describe el recurso de Interpretación de la Solución de un Sistema de Ecuaciones Lineales, haciendo referencia a cómo este contribuye al desarrollo de habilidades básicas del pensamiento a través de la puesta en práctica de los procesos descritos en la imagen 1.

Cada recurso cuenta con la siguiente estructura:

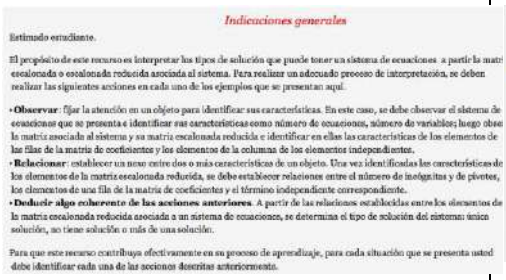
Indicaciones generales en las que se describe al estudiante cómo puede poner en práctica los procesos básicos de pensamiento.	Pantalla de interacción con las representaciones del concepto.
	

Tabla 1. Estructura del recurso. Elaboración propia.

Después de la primera pantalla donde se dan las indicaciones generales, se presenta las representaciones de un sistema de ecuaciones lineales a través de matrices. En la parte superior de la imagen 2, se observa resaltado en negrilla el proceso que se espera el estudiante realice, en este caso, observar y cuál es su propósito. A la izquierda se presenta un sistema de ecuaciones en forma algebraica, a la derecha se encuentran dos ventanas: la primera presenta el sistema escrito en forma de ecuación matricial $AX = b$ y al desplegar la otra ventana se presentará el sistema en su forma de matriz de coeficientes aumentada. Se espera que el estudiante al observar y comparar estas representaciones identifique características como el número de incógnitas, coeficientes, términos independientes. El estudiante puede generar diferentes ejemplos donde aparecerán diferentes sistemas de ecuaciones y así poner en práctica el proceso de observar y comparar.

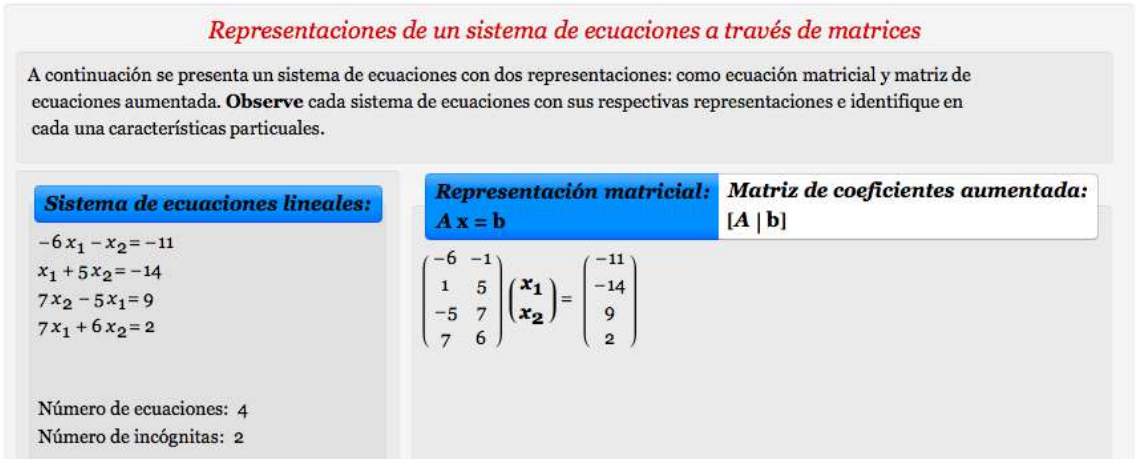
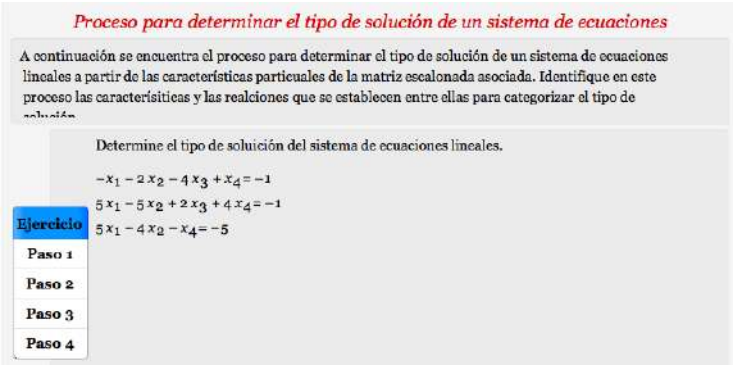


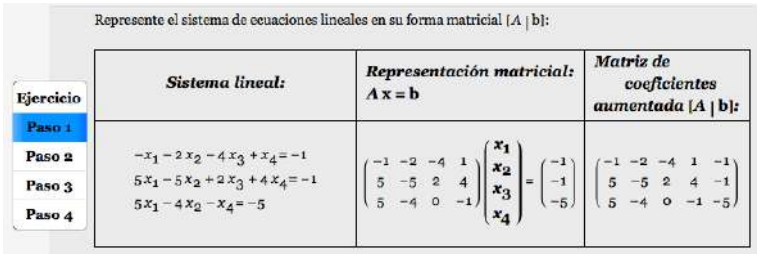
Imagen 2. Representaciones matriciales de un sistema de ecuaciones lineales. Elaboración propia.

La siguiente pantalla contiene la descripción del proceso para determinar el tipo de solución de un sistema de ecuaciones lineales. En la tabla 2 se hace referencia a los procesos básicos de pensamiento se espera ponga en práctica el estudiante.

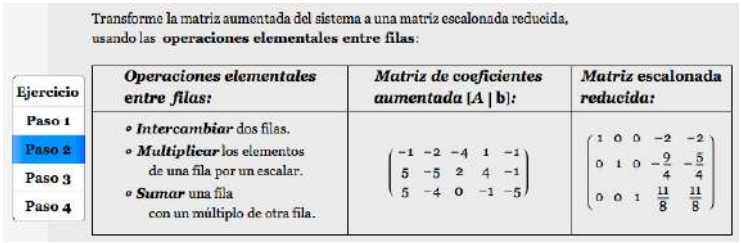
En la ventana principal se presentan la descripción y en la parte izquierda se encuentra el paso a paso para interpretar la solución de un sistema de ecuaciones a partir de la matriz escalonada reducida asociada al sistema.



Paso 1. Se espera que el estudiante reconozca las características principales del sistema a partir de las representaciones dadas.

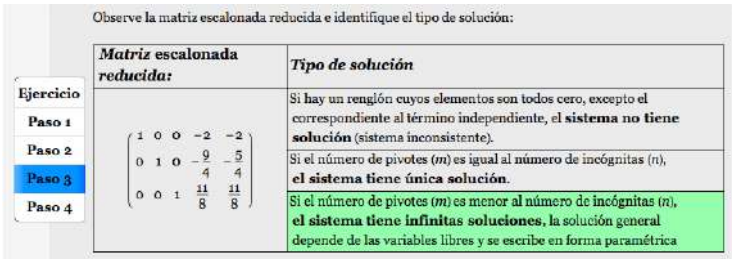


Paso 2. Se retoman las operaciones elementales entre filas definidas para hallar un sistema equivalente a partir de su representación en matriz de coeficientes aumentada.



Paso 3. Se espera el estudiante ponga en práctica los procesos de *observar* (identificar características de la matriz escalonada reducida), *comparar* (la matriz escalonada reducida con la matriz descrita verbalmente) y *relacionar* (establecer nexos entre el número de incógnitas con las características de los elementos de la matriz escalonada reducida).

Finalmente, reconocer la *clasificación* del tipo de solución de un sistema de ecuaciones lineales.



Finalmente, se presenta al estudiante la forma adecuada de escribir la solución de un sistema de ecuaciones lineales. En particular, se considera importante que el estudiante reconozca en los sistemas que tienen infinitas soluciones, cuáles son las variables libres.

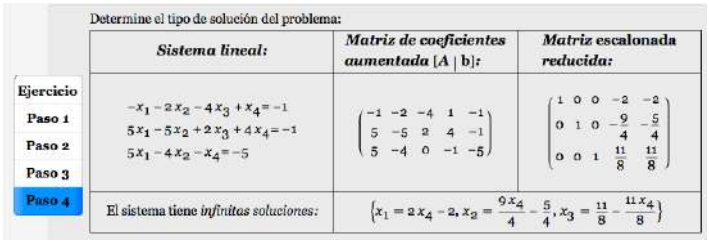


Tabla 2. Descripción proceso interpretación tipo solución de un sistema de ecuaciones lineales. Elaboración propia.

El proceso descrito en la tabla 2, se puede poner en práctica cuantas veces quiera el estudiante con diferentes sistemas de ecuaciones lineales, lo que conllevará a adquirir destreza en el reconocimiento del tipo de solución y su escritura desarrollando así, la facultad de transferir estas ideas a otros contextos y establecer otro tipo de relaciones cuando se enfrente a otros métodos de solución.

Lo anterior son los resultados obtenidos en cuanto al diseño de los recursos. Se espera aplicarlos en la próxima cohorte del módulo de Álgebra Lineal y evaluar el impacto de estos en el aprendizaje de los estudiantes.

Consideraciones finales

Como afirma Sucerquia et al (2016), la educación en la modalidad virtual demanda cambios significativos en la forma de presentación de los contenidos y las interacciones que se genera entre los diferentes actores involucrados en este proceso: plataformas, recursos, medios de comunicación, tutor, estudiantes, dispositivos móviles, entre otros. El diseño más básico de un recurso demanda por parte del profesor tener claro cuáles son los propósitos de aprendizaje, cuáles son los procesos de pensamiento que pondrá en juego el estudiante y que contribuirá al aprendizaje para lo cual debe clarificar las relaciones entre estos, los conceptos y procesos matemáticos. Lo presentado aquí es hasta ahora un pequeño inicio hacia una nueva reestructuración del tipo de recursos que se pueden emplear en los cursos de matemáticas en la modalidad virtual de manera que garanticen aprendizajes significativos.

A partir de la experiencia de construcción de recursos, surgieron interrogantes sobre cuáles deben ser las características particulares que deben cumplir los recursos multimedia de manera y qué tipo de interacciones son necesarias (tutor-recurso-estudiante, estudiante-recurso), que garanticen en gran medida aprendizajes significativos.

En lo que respecta al rol del profesor, esto da cuenta de la necesidad inminente de transformar los procesos de formación de los profesores de matemáticas en cuanto al desarrollo de competencias tecnológicas y competencias profesionales para otro tipo de modalidades diferentes a la presencial.

Referencias

Coral, A. (2014). Desarrollo de habilidades de pensamiento y creatividad como potenciadores de aprendizaje. *UNIMAR*, 30(1). Recuperado de http://www.umariana.edu.co/ojs-editorial/index.php/unimar/article/view/232/203

Cuicas Avila, M., Debel Chourio, E., Casadei Carniel, L., Alvarez Vargas, Z. (2007). El software matemático como herramienta para el desarrollo de habilidades del pensamiento y mejoramiento del aprendizaje de las matemáticas. *Revista Electrónica Actualidades Investigativas en Educación*, 7 (2), 0.

Gros-Salvat, B. (2011). Orientación y tendencias de futuro en la formación en línea. En Gros-Salvat, B. (Ed), *Evolución y retos de la educación virtual. Construyendo el e-learning del siglo XXI* (pp 141-181). Barcelona: Editorial UOC.

Sucerquia Vega, E.A., Londoño Cano, R.A., Jaramillo López, C.M. & De Carvalho Borba, M. (2016). La educación a distancia virtual: desarrollo y características en cursos de matemáticas. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, 48, 33-55.

Recuperado de http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/view/760/1286

Ortega, S., Moreno, M. & Rodríguez, M. (2014). Desarrollo del pensamiento de los estudiantes en modalidad virtual. *Revista de la facultad de estudios en ambientes virtuales*, 2, 2. Recuperado el 24 de febrero de 2017 de http://journal.ean.edu.co/index.php/vir/article/view/1419/1372

Sánchez, M. A. (2004). *Desarrollo de habilidades del pensamiento: procesos básicos del pensamiento*. México: Trillas - ITESM.

Volver al índice de autores

2.3.4. Estrategias didácticas con Cuadernia para elevar el rendimiento escolar en el área de matemática del primer grado de secundaria de una institución educativa pública en Lambayeque, Perú

Rosa Yessenia Mimbela Sánchez
Universidad Nacional de Tumbes, Tumbes, Perú

Resumen

La presente investigación titulada: "Estrategias Didácticas con Cuadernia para elevar rendimiento escolar en el área de matemática del Primer Grado de secundaria de una Institución Educativa Pública en Lambayeque. Perú." surge porque que los estudiantes de la Institución Educativa presentan dificultades para resolver problemas en el área de matemática lo que origina un bajo rendimiento escolar, además se ha evidenciado que los docentes no incorporan las Tecnologías de la Información y Comunicación en las sesiones de aprendizaje. En este marco, el objetivo es aplicar estrategias didácticas usando Cuadernia para elevar el rendimiento escolar en el Área de Matemática. Las estrategias planteadas se basan en el uso de Cuadernia en las sesiones de aprendizaje del área de matemática. En base al análisis de datos, en un primer momento se encontró un bajo rendimiento escolar en el área de matemática en las dimensiones de las competencias: conceptuales, procedimentales y actitudinales lo que se evidencia en sus promedios del primer bimestre. Debido a esto, se plantearon estrategias didácticas con Cuadernia para el segundo bimestre que permitan coadyuvar el desarrollo de competencias. La propuesta de estrategia elevó el rendimiento escolar en matemática de modo significativo debido a la obtención de resultados favorables y alentadores.

Introducción

En el mundo, las tecnologías de la información y comunicación han tenido un desarrollo explosivo que ha originado la denominada "Sociedad del Conocimiento" o "de la Información" y por la cual los sistemas educacionales de varios países han tomado iniciativas para integrar el desarrollo de las TIC dentro de sus políticas, asumiendo que el progreso digital es un motor para el mejoramiento sustancial de la educación y el fortalecimiento del proceso de enseñanza- aprendizaje de los estudiantes. La tecnología se convierte en un recurso de gran apoyo para la enseñanza de la Matemática, solamente si hacemos un buen uso de ella, es decir sería ideal que los docentes diseñen y apliquen estrategias didácticas utilizando software para lograr aprendizajes.

Con la nueva reforma educativa el Estado Peruano orienta el uso de tecnologías en las sesiones de aprendizaje de todas las áreas, sin embargo, la gran mayoría de docentes no están preparados en el manejo de estas herramientas y no son capaces de crear nuevos entornos de aprendizaje significativos para sus estudiantes.

Por otro lado, los bajos resultados de nuestros estudiantes en las evaluaciones nacionales e internacionales, generan preocupación y propicia espacios de reflexión respecto a la educación que se está promoviendo en nuestro sistema educativo. Si bien ha habido un esfuerzo por propiciar el desarrollo de aprendizajes por competencias y capacidades desde finales de los 90 en nuestro sistema educativo, este esfuerzo ha tenido una serie de inconvenientes, por las diferentes orientaciones promovidas desde los niveles de inicial, primaria y secundaria. Estas dificultades constituyeron un reto que se ha sido superado con la unificación de criterios en todos los niveles dándole un sentido articulado a las áreas curriculares, que ha dado lugar a un enfoque educativo por competencias.

En Lambayeque, la gran mayoría de instituciones públicas y privadas no está cumpliendo con la actualización pedagógica de incorporar las TIC al aula que incluye asegurar la cobertura y calidad de la infraestructura tecnológica (hardware, software y acceso a servicios de información y comunicación), se observa que muchos docentes no incorporan software y aplicativos tecnológicos en el diseño y desarrollo de las sesiones de aprendizaje debido a que la gran mayoría de ellos carece de una alfabetización digital.

En la Institución Educativa Pública, los docentes del área de Matemática de los distintos grados del nivel secundario no incorporan software como estrategias didácticas al proceso de enseñanza – aprendizaje, lo que conlleva a que sigan predominando formas tradicionales de enseñanza, esto se da a pesar de contar con aula de innovación pedagógica debidamente implementada que cuentan con acceso a internet, además los estudiantes presentan un bajo rendimiento escolar en el área de matemática.

Frente a esta problemática, en la institución educativa se evidencia que:

La gran mayoría de docentes desconocen el uso de las TIC y software educativo y su aplicación al proceso educativo e inclusive el docente del aula de innovación pedagógica no colabora con sus conocimientos digitales ni brinda las facilidades a los docentes para el acceso a la mencionada aula.

Los estudiantes del primer grado de secundaria muestran dificultades en las competencias matemáticas evidenciado en su bajo rendimiento escolar que es observable en los registros auxiliares que poseen los docentes.

Los estudiantes han desarrollado habilidades para acceder y utilizar internet, sin embargo, lo usan intuitivamente y no les permite aprovechar la potencialidad que ofrece la web lo que conlleva a que lo usen de una manera inadecuada, además muchos de ellos no tienen una computadora en casa lo que origina que acudan a las cabinas de internet.

Los padres de familia se involucran muy poco en las actividades escolares de sus hijos debido a que no cuentan con el tiempo suficiente o no tienen el grado de instrucción secundaria, muchos de ellos se dedican al comercio por lo que muchas veces envían a sus hijos a la institución educativa sin una buena alimentación.

Problema de investigación

El problema de la investigación es ¿De qué manera la aplicación de estrategias didácticas apoyadas en el uso del software Cuadernia elevará el rendimiento escolar en el área Matemática en los estudiantes del Primer grado de secundaria de una Institución Educativa Pública del departamento de Lambayeque en Perú?

De acuerdo al problema observado se ha planteado como objetivo: Aplicar estrategias didácticas usando Cuadernia para elevar el rendimiento escolar en el Área de Matemática en los estudiantes del Primer grado de secundaria de una Institución Educativa Pública del departamento de Lambayeque en Perú.

Los objetivos específicos están dados por:

- Realizar un diagnóstico relacionado con el uso de estrategias didácticas y el nivel de aprendizaje en el área de matemática en los estudiantes del Primer grado de secundaria de una Institución Educativa Pública del departamento de Lambayeque en Perú

- Diseñar y aplicar estrategias didácticas, apoyadas con Cuadernia, para elevar el rendimiento escolar en el Área de Matemática en los estudiantes del Primer grado de secundaria de una Institución Educativa Pública del departamento de Lambayeque en Perú.

- Monitorear los resultados de la aplicación de las estrategias didácticas apoyadas con Cuadernia y la mejora del rendimiento escolar en los estudiantes del Primer grado de secundaria de una Institución Educativa Pública del departamento de Lambayeque en Perú.

La Hipótesis quedó formulada así: Si se diseña y aplica estrategias didácticas apoyadas con el software Cuadernia, sustentado en la teoría de sistemas, teoría del aprendizaje significativo de Ausubel, teoría sociocultural de Vygotsky, el conectivismo, los aportes de Pólya, las orientaciones del Ministerio de Educación para el Área de Matemática y el uso de las tecnologías de la información y comunicación en la educación ,entonces se contribuirá a elevar el rendimiento escolar en el área de Matemática en los estudiantes del Primer Grado de secundaria de una Institución Educativa Pública del departamento de Lambayeque en Perú.

Para la realización del presente trabajo de investigación se ha hecho uso de diferentes métodos, como empíricos; empleados durante la etapa de acumulación de la información, siendo útiles para el recojo de datos para el entendimiento del problema y para fundamentar la propuesta de la estrategia didáctica con Cuadernia.

Por otro lado, el método analítico ha comprendido las relaciones entre los diferentes componentes del problema, así como de las implicancias en el entorno educativo, que permite integrar la realidad para elaborar la propuesta y la elaboración del reporte de investigación. Los métodos estadísticos han apoyado en el procesamiento de la información donde se han utilizado las medidas de tendencia central para estudiar los cambios antes y después del uso de la estrategia.

Los fundamentos teóricos que sustentan esta investigación son:

La Teoría de sistemas brinda un referente para comprender la organización de la educación como un sistema integrado por subsistemas interrelacionados y como tal plantea el requerimiento de realizar una reflexión sobre el funcionamiento real de sus componentes en interacción con el contexto, teniendo en cuenta su evolución a largo plazo (Tobón, 2004).

La Teoría del aprendizaje significativo de Ausubel nos dice “Que un alumno activo procesador de la información, expresando que su aprendizaje es sistemático y organizado,

debido a que es un fenómeno complejo el cual no se reduce a simple asociaciones memorísticas" (Flores, 2007, p.170).

La Teoría de Vygotsky nos dice que el conocimiento se construye socialmente, es conveniente que el profesor diseñe planes y programas de estudio de acuerdo a las necesidades de aprendizaje de los alumnos de tal manera que incluyan en forma sistemática la interacción social, no sólo entre ambos, sino entre alumnos y comunidad (Flores, 2007).

"El conectivismo provee una mirada a las habilidades de aprendizaje y las tareas necesarias para que los aprendices florezcan en una era digital" (Siemens,2004). Las actividades propuestas en los entornos virtuales constituyen una motivación al estudiante provocándole emitir una respuesta y a la vez estos espacios se convierten en una oportunidad de construcción de conocimientos y de aprendizaje colaborativo.

El método de Pólya se interesa en el proceso del descubrimiento de cómo resolver problemas, su enseñanza enfatizaba en comprender los procesos de solución aún más que simplemente desarrollar ejercicios apropiados (Pólya, 1965).

Las orientaciones del Ministerio de Educación para el Área de Matemática se basan en la nueva gestión del currículo con las Rutas del Aprendizaje ,en estas no se seleccionan las competencias como si fueran objetivos y a la vez no se presentan contenidos sin saber cómo se relacionarán con las competencias, de lo que se trata es de diseñar, ejecutar y evaluar las actividades en torno a la resolución de problemas del contexto, que permitan a los estudiantes adquirir, desarrollar y movilizar conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes en forma de actuaciones integrales con la intencionalidad de formar las competencias para el logro de sus aprendizajes (Ministerio de Educación ,2015).

El uso de las tecnologías de la información y comunicación en la educación incluye el modelo de integración Technological Pedagogical Content Knowledge (TPACK).

Este modelo integra tres fuentes del conocimiento: el disciplinar, el pedagógico y el tecnológico, además es un modelo que identifica los tipos de conocimiento que un docente necesita dominar para integrar las TIC de una forma eficaz en la enseñanza que imparte, pero siempre teniendo en cuenta el contexto particular en que se aplica (Mishra y Koehler, 2006).

El dominio de este modelo por parte de los docentes, les permite elegir las capacidades a desarrollar en el proceso pedagógico en el cual va a integrarlo los recursos tecnológicos en su sesión de aprendizaje.

El aporte práctico a la ciencia es que a través de la elaboración de las sesiones de aprendizaje con el uso del software educativo Cuadernia se busca una nueva forma de enseñanza, esta incorporación de las TIC al currículo cumple con las metas del Ministerio de Educación.

Esta investigación tiene como objetivo general: "Aplicar estrategias didácticas usando Cuadernia para elevar el rendimiento escolar en el Área de Matemática en los estudiantes del Primer grado de secundaria de la Institución Educativa Pública del departamento de Lambayeque en Perú.

La propuesta de estrategias didácticas con Cuadernia contribuyó a elevar el rendimiento escolar en el área de matemática, cuando se aplicó esta propuesta se usó frecuentemente la computadora para desarrollar las actividades elaboradas con el software educativo Cuadernia, los estudiantes demostraban mucho entusiasmo y disfrutaron su aprendizaje y a la vez la docente de aula estaba muy conforme con lo preparado para cada clase ,actitud que se percibió durante toda la ejecución de las sesiones de aprendizaje y que finalizó con el éxito de la propuesta.

Lo novedoso de Cuadernia es que se puede realizar diversas actividades interactivas y además introducir enlaces de la web, con los objetos del software se pueden crear diversas actividades de extensión, en este punto los estudiantes ya no son repetidores de información sino generadores de conocimiento, desarrollando sus competencias matemáticas y digitales.

El diseño de estrategias didácticas se centra básicamente en las actividades que se desarrolló a través de las sesiones de aprendizajes donde se incorporó adecuadamente el software Cuadernia como un planteamiento metodológico, previamente se realizó una prueba diagnóstica para constatar el bajo rendimiento escolar de los estudiantes, la investigadora capacitará a la docente del área de matemática para que realice dicha labor.

La ejecución de las estrategias didácticas se realizó por jornadas en diferentes fechas, el grado seleccionado fue Primer Grado de secundaria. Los estudiantes contaron con el

material de apoyo necesario como es el aula de innovación pedagógica con acceso a internet para el correcto desarrollo de las actividades pautadas y así desarrollar las competencias del área de matemática que fueron monitoreadas por la investigadora.

La evaluación durante la aplicación de las estrategias didácticas con Cuadernia fueron satisfactorias para los estudiantes del Primer grado de secundaria de una Institución Educativa Pública del departamento de Lambayeque. Los resultados obtenidos en su post test fueron muy favorables y aún más se validó la propuesta cuando se observó que se elevó el rendimiento escolar reflejados en los promedios del segundo bimestre.

En síntesis, se puede decir que el uso de las estrategias didácticas con Cuadernia contribuye a elevar el rendimiento escolar en los estudiantes del primer grado de secundaria de una Institución Educativa Pública del departamento de Lambayeque en Perú.

Las conclusiones de la investigación son:

- El uso de las estrategias tradicionales influye fuertemente en el bajo rendimiento escolar en matemática en los estudiantes del primer grado de secundaria. Los docentes tienen ciertos reparos para utilizar las tecnologías de la información, debido esencialmente al desconocimiento de las mismas.

- El uso de las teorías de sistemas, teoría del aprendizaje significativo de Ausubel, la teoría de sociocultural de Vygotsky, el conectivismo, los aportes de Pólya, las orientaciones del Ministerio de Educación para el área de Matemática, el uso de las tecnologías de la información y comunicación en el proceso enseñanza aprendizaje y el conocimiento de Cuadernia han contribuido a una mejora significativa del rendimiento escolar.

- La propuesta de estrategia para mejorar el Rendimiento escolar en matemática muestra resultados favorables de modo significativo. La orientación del trabajo con los estudiantes hacia la generación del conocimiento y el uso de las Tecnologías constituyen aspectos que han favorecido el logro alcanzado.

- Luego de la aplicación de la propuesta, los estudiantes lograron elevar su rendimiento escolar en el área de matemática en sus componentes conceptuales y procedimentales, bajando el índice malo del 62% al 16%.

Anexo

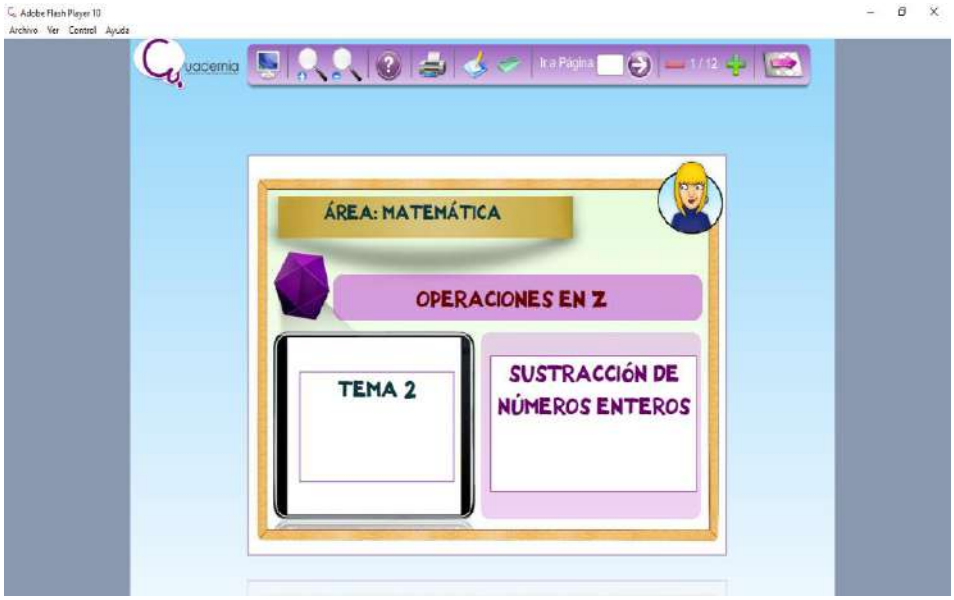


Figura 1. Presentación del cuaderno digital en Cuadernia

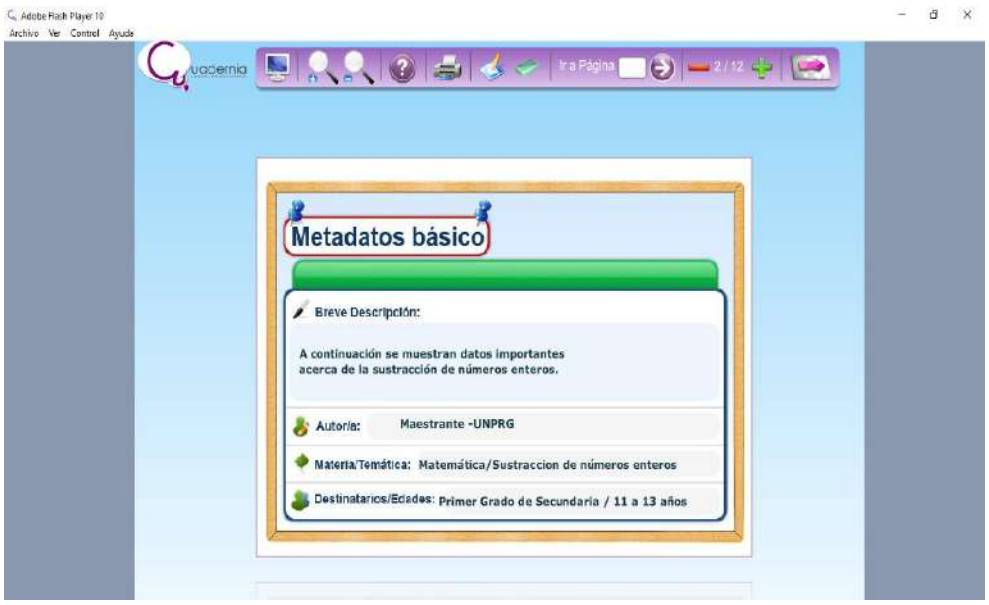


Figura 2. Metadatos Básico del cuaderno digital en Cuadernia



Figura 3. Estrategia 01- Actividad completar- Rellenar agujeros

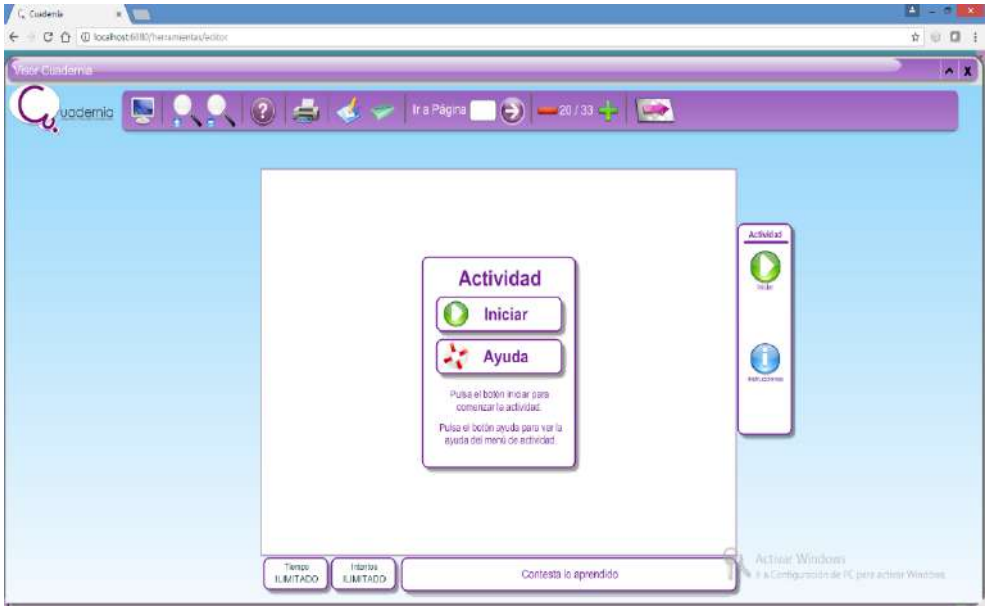


Figura 4. Estrategia 02- Actividad de preguntas escritas –Pregunta de respuesta abierta

Referencias

Flores Velasco Marco Hernan (2007): *Teorías cognitivas & educación*. Lima. Perú. Editorial San Marcos.

Ministerio de Educación (2015): *Diseño Curricular Nacional*

Ministerio de Educación (2015): *Matemática1 – Secundaria –Manual del docente*. Perú.

Grupo Editorial Norma.

Ministerio de Educación (2015): *Matemática1 – Secundaria -Texto Escolar Trabajo*. Perú. Grupo Editorial Norma.

Ministerio de Educación (2015): *Matemática1 –Secundaria - Cuaderno de Trabajo*. Perú. Grupo Editorial Norma.

Ministerio de Educación (2015): *Rutas del Aprendizaje-Matemática* -VI Ciclo.

Mishra, P., & Koehler, M. J. (2006). *Technological Pedagogical Content Knowledge: A framework for teacher knowledge.* Teachers College Record, *108*(6), 1017-1054. doi: 10.1111/j.1467-9620.2006.00684. x.

Pólya, George (1965). *Cómo Plantear y Resolver Problemas*. México. Editorial Trillas

Siemens, G. (2004). *Connectivism: A Learning Theory for the Digital Age*. Learning Circuits. Recuperado de: http://www.elearnspace.org/Articles/connectivism.htm

Tobón Tobón Sergio (2004): *Formación Basada en Competencias*. Bogotá. Colombia. ECOE Ediciones.

Volver al índice de autores

2.3.5. TIC en la educación universitaria: experiencias en la enseñanza de las matemáticas en la PUCP

Roy Will Sánchez Gutiérrez
Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú

Resumen

En el complejo proceso de la enseñanza aprendizaje de las matemáticas combinamos tres aspectos fundamentales: la incorporación del uso de las tecnologías de la información y de la comunicación (TICs), las nuevas formas pedagógicas de enseñar y las tradicionales clases magistrales. En este evento exponemos nuestra experiencia en el uso de las herramientas TICS en la enseñanza de las matemáticas en la PUCP durante los años 2017 y 2018

Introducción

Tradicionalmente las matemáticas han sido enseñadas y estudiadas mediante la aplicación de una serie de procesos, algoritmos, reglas y propiedades que el estudiante debe aplicar sistemáticamente para resolver problemas matemáticos. El proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas es sumamente complejo y a través del tiempo se ha desarrollado una diversidad de metodologías para lograr mayor efectividad. A nivel universitario generamos y permitimos que el alumno repita en forma mecánica sin entender en la mayoría de las veces lo que hace. Ahora, la irrupción de las tecnologías de información y comunicación (TIC) en el ámbito educativo ha generado nuevas maneras de concebir y dirigir los procesos de enseñanza y aprendizaje. Una de las áreas en las que estas tecnologías han irrumpido con mayor fuerza es en matemáticas.

Una meta importante en la educación universitaria es la incorporación de las herramientas tecnológicas con la finalidad de ayudar a desarrollar el pensamiento crítico de los estudiantes universitarios. Acorde con esta meta, el objetico de nuestro trabajo de investigación es el estudio y la aplicación de las herramientas tecnológicas combinado con las clases magistrales y las nuevas estrategias didácticas en la enseñanza de los cursos de matemáticas en los estudios generales ciencias de la PUCP.

Herramientas tecnológicas usadas

Las herramientas de las tecnologías de información y comunicación presentes hoy día en la educación han propiciado cambios significativos en la forma de enseñar y aprender. Es posible que estemos frente a un nuevo escenario, en la cual la tecnología asume un rol protagónico. La educación ya no está centrada en el pensamiento del docente, sino que ahora éste se ha convertido en un intermediario entre el estudiante y el conocimiento, donde las técnicas pedagógicas tienen un papel protagónico como herramienta y medio de comunicación entre ellos permitiendo desarrollar habilidades superiores en los estudiantes a nivel universitario.

Entendimos en este proceso de cambios en nuestra universidad que los estudiantes deberían tener mayor protagonismo en el proceso de enseñanza y aprendizaje, que ellos mismos sean los constructores de su propio aprendizaje. Con la aplicación de las nuevas técnicas educativas y el uso de las herramientas TICs para en las prácticas dirigidas facilitamos el aprendizaje de los estudiantes, comprobamos que el rol de estudiante es más dinámico, el aprendizaje individual y grupal permite interactuar en grupo, compartir con el salón de clases lo que van resolviendo, descubriendo y aprendiendo. Las estadísticas han reflejado que se incrementa el porcentaje de aciertos, la responsabilidad y retroalimentación.

Uno de los ámbitos donde ha impactado las tecnologías de la información y de la comunicación es el de la enseñanza aprendizaje. La aplicación de estas TICs en todos los niveles educativos ha generado diversas formas que pueden decantar en innovaciones en la enseñanza. La red facilita el acceso a la abundante información sobre los temas de clase, está en el profesor planificar el uso de estas herramientas que vinculen el conocimiento con el alumno, primando el objetivo a conseguir antes que las herramientas a utilizar.

De acuerdo a lo evidenciado, tanto en testimonios como en análisis previos, se tomó la iniciativa de usar ProfePlus, la cual se puede descargar del Google Play (para Android) o registrarse a través www.ProfePlus.org, Es de uso libre y lo acontecido el 1 y 2 de marzo del 2018 en el Coloquio por la Co-Innovación en el Aula de Clase en la PUCP, nos dio la confianza de seguir en este rumbo (más adelante se detallará esta experiencia).

Proyecto que sustenta la experiencia

Las experiencias que se relatan a continuación, fueron obtenidas en estudiantes de los dos primeros años de carreras de Ciencias e Ingeniería en la PUCP. Ellos, durante este tiempo transitan inicialmente en la Unidad Académica "Estudios Generales Ciencias" (EEGGCC). Los cursos de matemáticas en EEGGCC donde implementamos estos cambios fueron Cálculo Diferencial, Cálculo Integral y Cálculo Aplicado. En dichas asignaturas existen prácticas dirigidas, en las que los estudiantes resuelven ejercicios con la ayuda de asistentes de docencia (jefes de práctica). Así, junto a tres jefes de prácticas formamos grupos de cuatro alumnos. En cada grupo se implementó el trabajo en pares con la asesoría del profesor y los jefes de prácticas.

Cada grupo contaba con una herramienta tecnológica ProfePlus para enviar sus respuestas individuales y grupales de los problemas resueltos en las prácticas dirigidas. La sorpresa para los profesores fue "descubrir" que existían enormes vacíos en los conocimientos que traían los estudiantes. Sin embargo, tenían enormes ganas de aprender. La interacción entre pares facilitó que se materialicen en el aula muchas preguntas a los asistentes de docencia, quienes gracias a la conexión a internet podían resolver sus dudas con el uso del Mathematica para los cálculos y las gráficas u otro software como Matlab, Geogebra u otro que grafique en 3D.

Los análisis que se están realizando se enmarcan en un proyeco ganador de un fondo concursable de la Dirección Académica del Profesorado (DAP). Los profesores integrantes del proyecto DAP que ganó subvención son: Miguel Gonzaga de Cálculo Integral, Jaime Chau de Cálculo de Varias Variables y Roy Sánchez de Cálculo Aplicado.

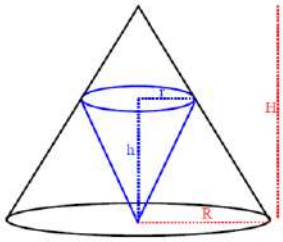
Las preguntas para los alumnos fueron elaboradas siguiendo el proceso secuencial hasta obtener la respuesta del problema. Por ejemplo, en el problema de optimización primero expresar el volumen del como inscrito como función del radio r de la base, luego, aplicar el cálculo diferencial para obtener los puntos críticos, puntos que son candidatos a obtener el máximo volumen, usar algún criterio de optimización y enviar las respuestas individuales y grupales mediante la aplicación ProfePlus al profesor.

Innovación en el curso de Cálculo Diferencial y Cálculo Aplicado

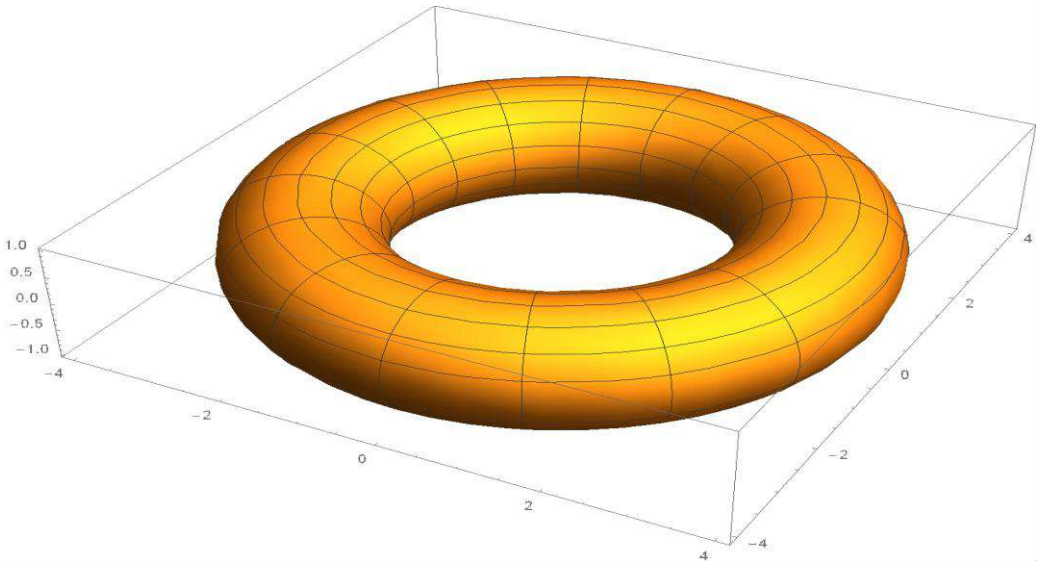
En el proyector del aula se presentaban ejercicios que comúnmente son tema de cálculo en la asignatura. Uno de ellos se muestra en la siguiente figura:

Optimización. Volumen máximo de un cono dentro de otro cono

En la figura se tienen dos conos circulares rectos. El cono menor de dimensiones variables h y r está inscrito en el cono mayor de dimensiones fijas H y R. Suponiendo que las dos bases son paralelas y el vértice del cono menor coincide con el centro de la base del cono mayor, ¿qué valores de h y r darán al cono inscrito el mayor volumen posible?



En el curso de cálculo aplicado consideramos superficies de revolución como el toro que resulta de hacer girar una circunferencia C1 de radio r sobre otra circunferencia fija C2 de radio R=4r. Las gráficas de las superficies se obtuvieron con Mathematica, software de Wolfram. La universidad tiene la licencia institucional para que los alumnos puedan usar en los cursos que requieran.

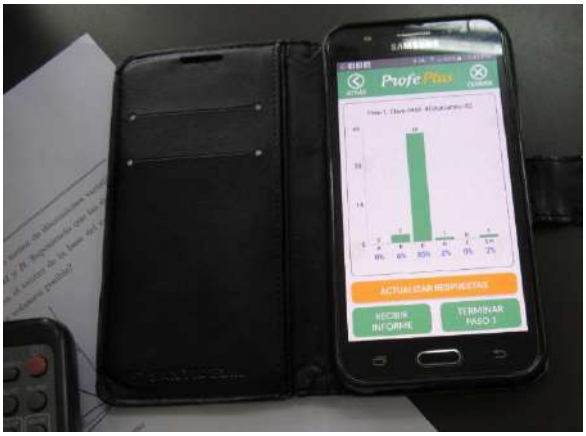


Para el uso de Profe Plus en el aula de la práctica dirigida, se les solicitaba que sigan un proceso simple de registro, tal como lo muestra la figura siguiente.



El aplicativo ProfePlus muestra las respuestas de una pregunta en el celular del profesor. Esta información da a conocer al profesor si los estudiantes entendieron el tema de clase. Tiene la oportunidad de retroalimentar si el porcentaje de respuestas equivocadas es muy alto.

Asimismo, si en el paso 1 (respuesta individual) muestra una alta proporción de estudiantes que responden correctamente, esto da la señal clara que la pregunta no resultó ser muy retadora y que ya no será muy necesario hacer el paso 2 (instrucción entre pares). Esto se produjo en algunas ocasiones, tal como se muestra en la figura siguiente.



Plataforma Virtual

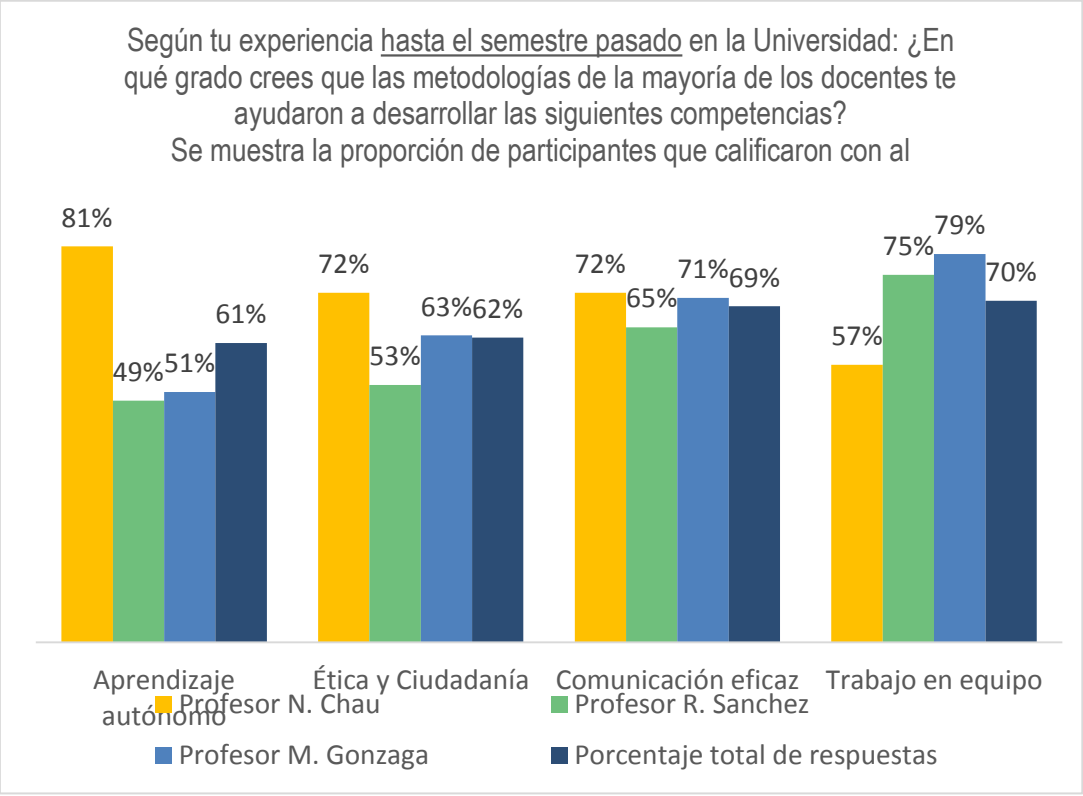
En todo el proceso de enseñanza aprendizaje, durante el semestre la universidad brinda a la comunidad universitaria la plataforma PAIDEIA, que nos sirve para alojar material didáctico y actividades de aprendizaje en un entorno virtual, con la finalidad de ponerlos al alcance de los alumnos y demás profesores. Esta plataforma educativa la usamos como

complemento a la educación presencial, para distribuir material, tener registro de las actividades educativas y mantener comunicación con los grupos de estudio en espacios fuera del aula.

Resultados preliminares

A la fecha se han realizado encuestas a los alumnos sobre diferentes aspectos vividos durante permanencia en la universidad. Estas encuestas fueron aplicadas a los estudiantes de los profesores mencionados antes. El rendimiento académico de los estudiantes en cada aula evaluada tiene ciertas diferencias. En el caso del Prof. Chau, sus estudiantes tienen más alto rendimiento. Los del Prof. Gonzaga tienen un rendimiento promedio. Los del Prof. Sánchez un rendimiento bajo.

Según lo evaluado al inicio del semestre, se evidencia que los estudiantes con más rendimiento en sus calificaciones, tienen mejor apreciación de su propio desarrollo en competencias que implican menor interacción (aprendizaje autónomo) a diferencia de los estudiantes con menor rendimiento académico, quienes tienen una percepción de mejor desarrollo de competencias que implican interacción con otros (trabajo en equipo); indicados en la figura siguiente.



Ante ello, los docentes de estas asignaturas, al finalizar el semestre, evaluará si ProfePlus generó un cambio sustancial la percepción propia del desarrollo de competencias como las mencionadas antes.

Asimismo, como parte del análisis del impacto de ProfePlus, gracias a los fondos DAP, se celebró el Coloquio por la Co-Innovación y el Trabajo en Equipo en el Aula de Clases, llevado a cabo en el campus de la PUCP los días 01 y 02 de marzo del 2018 con participación de universidades referentes del Perú: Universidad Peruana Cayetano Heredia, Universidad Nacional de Tumbes, Universidad Nacional de la Frontera de Sullana, Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo de Chiclayo, Universidad Nacional de Trujillo, Universidad Nacional Federico Villarreal, Universidad Nacional José Faustino Sánchez de Huacho, Universidad Católica de Santa María de Arequipa, Universidad Católica San Pablo, Universidad Nacional de la Amazonía Peruana de Iquitos, Universidad Cimas de Tacna Universidad Privada de Tacna, Universidad Nacional de Jaén, Universidad Nacional San Antonio Abad del Cusco, Universidad Nacional de Huancavelica, Universidad Nacional San Cristóbal de Huamanga, Universidad Nacional del Altiplano de Puno, Universidad Científica del Perú de Iquitos y la Universidad Privada de la Selva de Iquitos.

El resultado principal de este Coloquio fue una Declaratoria Abierta (aún en trámite para su publicación en la PUCP) firmada por los participantes. El detalle se muestra como anexo.

Conclusión

El rol del docente como facilitador del aprendizaje permite que los estudiantes tengan mayor protagonismo en el proceso de enseñanza y aprendizaje, al ser constructores ellos mismos de su propio aprendizaje, es así que las nuevas técnicas pedagógicas incluyen el uso de los programas MATHEMATICA Y MATLAB, de la aplicación Profe Plus.

Las tecnologías de información y comunicación presentes hoy día en la educación han propiciado cambios significativos en la forma de enseñar y aprender. La educación ya no está centrada en el pensamiento del docente, sino que ahora éste se ha convertido en un intermediario entre el estudiante y el conocimiento, donde las técnicas pedagógicas tienen un papel protagónico como herramienta y medio de comunicación.

El proyecto que estamos implementando en EEGGCC motiva la participación activa de los estudiantes, y sus aprendizajes se vieron claramente reforzados con la interacción entre

parejas, se respetaron la autonomía y la responsabilidad de trabajar en grupos. El envío de sus respuestas individuales y grupales permitió la retroalimentación por el profesor de los temas que no quedaron claros.

Finalmente, lo acontecido en el Coloquio por la Co-Innovación y el Trabajo en Equipo en el Aula de Clase da una clara muestra que vale la pena hacer los esfuerzos en el uso de Profe Plus, herramienta TIC peruana que favorece el aprendizaje de conceptos y la generación de competencias.

Referencias

Cabero Almera, J. (2014*). Nuevas tecnologías aplicadas a la educación*. Madrid, España: S.A. MCGRA W-HILL.

Córdoba, F., herrera, H. y Restrepo, C. (2013). Impacto del uso de objetos de aprendizaje en el desempeño en matemáticas de estudiantes de grado noveno. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte,* 2(39), pág. 47-58.

Claro, M. (2013). *Impacto de las TIC en los aprendizajes de los estudiantes. Estado del arte*. Documento de proyecto: Comisión Económica para América Latina y el Caribe (CEPAL). Santiago de Chile: Impreso en Naciones Unidas.

Gómez-Chacón, I. (2010). Actitudes de los estudiantes en el aprendizaje de la matemática con tecnología. *Enseñanza de las ciencias*. 28(2), pág. 227—244.

Guerra, R. y otros, (2017). Herramienta TIC para la docencia que facilita el aprendizaje de conceptos y la generación de competencias favorables al emprendimiento y la innovación: el caso ProfePlus. *Revista "Cátedra Villarreal*". Disponible en: http://revistas.unfv.edu.pe/index.php/RCV/article/view/208

Laiton, I. (2012). ¿Es posible desarrollar el pensamiento crítico a través de la resolución de problemas en física mecánica?. *Revista Eureka sobre enseñanza y divulgación de las ciencias*, 54-70.

LIM, C. (2015). Effective integration of ICT in Singapore schools: pedagogical and policy implications. *Education Tech Research Dev*. 55, pág. 83–116

Olivares, S., Heredia, Y. (2012). Desarrollo del pensamiento crítico en ambientes de aprendizaje basado en problemas en estudiantes de educación superior. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 759-778.

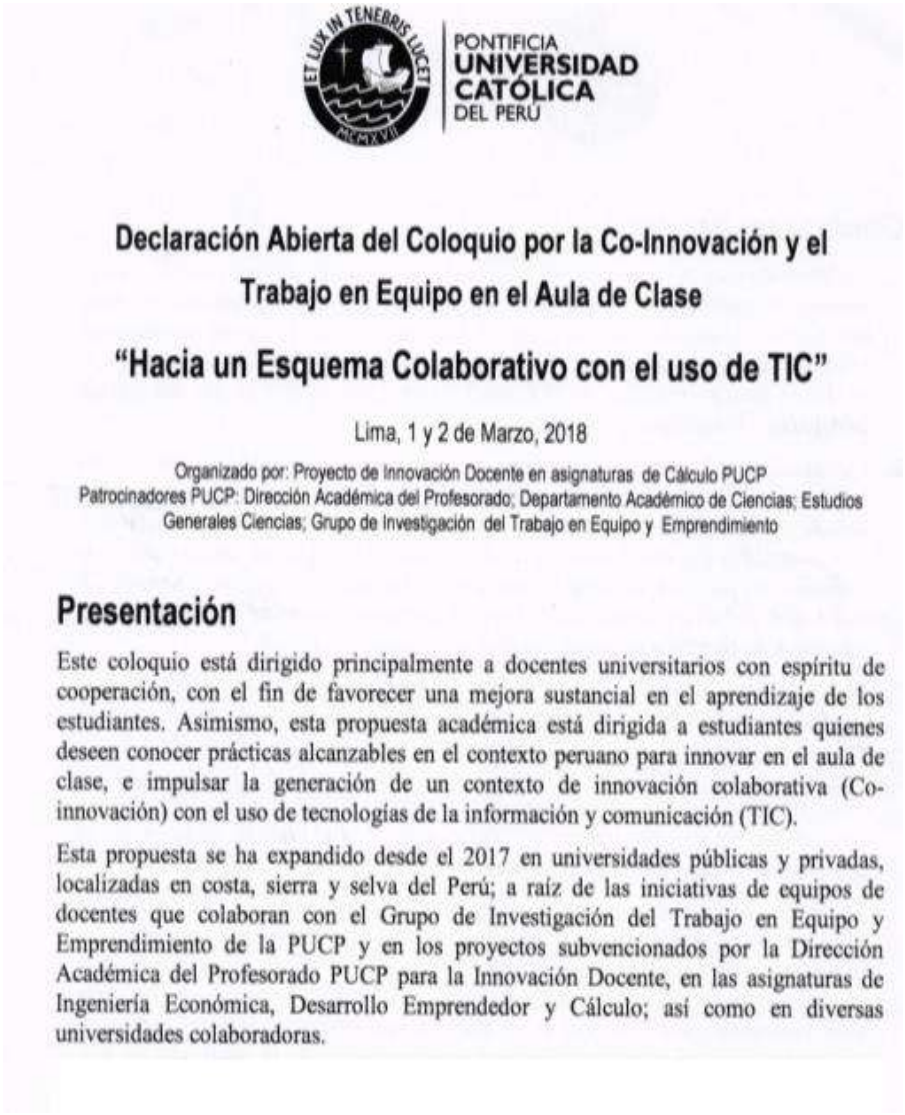
Pinargote, K. (2014). Instrucción entre pares, un método sencillo pero efectivo para enseñar. Disponible en https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/4752936.pdf

PUCP (2018). Coloquio por la Co-Innovación y el Trabajo en Equipo en el Aula de Clase. Disponible en https://educast.pucp.edu.pe/video/9570/coloquio_por_la_coinnovacion_y_el_trabajo_en_equipo_en_el_aula_de_clase

Stacey, K. y Barkatsas, A. (2013). A scale for monitoring students attitudes to learning mathematics with technology. *Computers y Education*. 48, pág. 285–300

Volver al índice de autores

Anexo



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Declaración Abierta del Coloquio por la Co-Innovación y el Trabajo en Equipo en el Aula de Clase

"Hacia un Esquema Colaborativo con el uso de TIC"

Lima, 1 y 2 de Marzo, 2018

Organizado por: Proyecto de Innovación Docente en asignaturas de Cálculo PUCP
Patrocinadores PUCP: Dirección Académica del Profesorado; Departamento Académico de Ciencias; Estudios Generales Ciencias; Grupo de Investigación del Trabajo en Equipo y Emprendimiento

Presentación

Este coloquio está dirigido principalmente a docentes universitarios con espíritu de cooperación, con el fin de favorecer una mejora sustancial en el aprendizaje de los estudiantes. Asimismo, esta propuesta académica está dirigida a estudiantes quienes deseen conocer prácticas alcanzables en el contexto peruano para innovar en el aula de clase, e impulsar la generación de un contexto de innovación colaborativa (Co-innovación) con el uso de tecnologías de la información y comunicación (TIC).

Esta propuesta se ha expandido desde el 2017 en universidades públicas y privadas, localizadas en costa, sierra y selva del Perú; a raíz de las iniciativas de equipos de docentes que colaboran con el Grupo de Investigación del Trabajo en Equipo y Emprendimiento de la PUCP y en los proyectos subvencionados por la Dirección Académica del Profesorado PUCP para la Innovación Docente, en las asignaturas de Ingeniería Económica, Desarrollo Emprendedor y Cálculo; así como en diversas universidades colaboradoras.

Conclusiones Generales

1. La Innovación en el Aula debe ser interiorizada como una mejora sustancial en el proceso de aprendizaje de conceptos y en el desarrollo de competencias. No basta con realizar cambios en los programas o sílabos, o incluir el uso de herramientas informáticas para expresar que "ya se ha innovado en el aula". La innovación se producirá cuando realmente se produzcan mejoras sustanciales en los dos actores principales, el estudiante y el profesor.
2. Un camino para lograr la innovación en el aula está en posicionar al docente como un "facilitador", no como un "controlador". Sin embargo, lastimosamente muchas tecnologías han virado su atención en hacer que los docentes centren sus esfuerzos por controlar a los estudiantes en la misma clase, cuando este espacio debe ser enfocado en motivar el aprendizaje, no en evaluarlos. Para los procesos de evaluación ya existen los exámenes que cada asignatura determina para conocer si el estudiante ha cumplido los requisitos para considerarlo "aprobado".
3. La innovación colaborativa y cooperativa (co-innovación) debe ser comprendida y aceptada como un pilar importante para la mejora educativa en el Perú. Así, el proceso de co-innovación que se pueda implementar en el aula debe facilitar que el liderazgo de los estudiantes, se exprese y se fortalezca. Este liderazgo debe ser interiorizado como las capacidades para cooperar y colaborar alrededor de las necesidades de sus compañeros de clase; que en este caso se traducen en la comprensión de los conceptos esgrimidos en el aula.
4. Es evidente la existencia de una corriente de aceptación sobre el uso de TICs en las instituciones educativas y que cada vez existe mayor apertura para aplicarlas. No obstante, las TICs que deben estimularse son aquellas que dinamicen el aula y que el docente sea un facilitador del desarrollo de los estudiantes. Asimismo, las TICs que sean propuestas para aplicarse en el Perú, deben estar adecuadas al entorno y vicisitudes de nuestra nación. En este contexto, y según lo analizado en este Coloquio, expresamos que ProfePlus es una propuesta que potencia las competencias de los estudiantes y favorece fuertemente el aprendizaje de los conceptos de la asignatura, en cualquier área, nivel o campo de acción educativo.
5. Espacios de discusión y exposición sobre los avances en Co-Innovación en el Aula de Clase en Perú, como el presente Coloquio, deben estimularse continuamente; siendo necesario que los estudiantes y docentes tomen una participación más dinámica y comprometida, con el fin inicial de asegurar el capital humano que beneficiará al progreso de nuestra patria.

Propuestas Finales

A. Facilitar las acciones estudiantiles que promuevan articulación con los procesos de enseñanza en el aula; en el marco del uso libre de ProfePlus. Estas acciones deben apuntar a crear en el aula un ecosistema de co-innovación en las instituciones educativas y en el marco de las normas y reglamentos de cada una de ellas.

2.3.6. Modelación matemática del crecimiento de la sombra usando Excel

Franklin Taipe Florez, UGEL Canas, Cusco, Perú
Zoraida Taipe Florez, IE. Víctor Raúl Haya de la Torre, Cusco, Perú

Resumen

A la pregunta ¿Cuál será la velocidad de crecimiento de la sombra de un palo?, se respondió con un modelo matemático a partir de mediciones experimentales usando las herramientas de Excel. Proponiéndonos comprender cómo resulta un modelo matemático a partir de experiencias reales, concretar una actividad escolar vivencial para generar un modelo matemático, analizar el comportamiento de un fenómeno físico y traducirlo por la matematizacion horizontal a un modelo y utilizar las herramientas del Excel, para el desarrollo y formulación del modelo. Con el registro de mediciones de la sombra del palo se relacionarán las variables (x= min, tiempo del movimiento del sol; y= cm, crecimiento de la longitud de la sombra) se graficarán las funciones de dichos puntos, analizándose las gráficas y su comportamiento para generar modelos que según su R^2 podrán ser confiables. Se reporta un modelo general $y = 19{,}648\ x^2 - 134{,}58x + 242{,}17$ con velocidad lenta de 0.049cm/min y velocidad rápida de 0.70cm/min. Y un modelo especifico con dos funciones $y=5.26x-3.11$ de tres a cuatro de la tarde i $y=-17.45x^2+203.63x-518.44$ de cuatro a cinco de la tarde, La abstracción de los fenómenos reales hacia modelos matemáticos, dados por funciones fue aceptada y entendida.

Introducción

Los objetivos de la presente comunicación breve son:

- Comprender cómo resulta un modelo matemático (función) a partir de experiencias reales y experimentales.
- Concretar una actividad escolar de naturaleza experimental para generar un modelo matemático.
- Analizar el comportamiento de un fenómeno físico y traducirlo a través de una matematización horizontal a un modelo.
- Utilizar las herramientas del Excel, para el desarrollo y formulación del análisis matemático.

El uso de las herramientas del Excel, para entender el origen algorítmico de las funciones como modelos, se reporta en esta experiencia didáctica en una sesión práctica obteniendo

la significatividad del conocimiento y su abstracción plena para entender situaciones más complejas. Al responder la interrogante ¿Cómo ayuda el Excel para generar modelación matemática, a partir de una actividad experimental, en los estudiantes del cuarto grado de secundaria en la IE Victor Raul Haya de la Torre de Occobamba en Cusco?

Hoy en día, el desarrollo de las TIC tiene un impacto cada vez mayor en el campo educativo. Mendoza (2016) afirma que, en la actualidad, las TIC están en todos lados y forman parte muy importante del que hacer educativo. Ellas poseen un gran potencial para mejorar los procesos pedagógicos y mejorar los aprendizajes. (Pantoja, et.al. 2013) Para lograr un buen aprovechamiento de las TIC como herramienta de trabajo de los docentes o como medio de aprendizaje de los propios alumnos, es necesario que se conozca cuáles son los beneficios de su uso y que los equipos estén dotados del software educativo pertinente es decir de programas específicamente diseñados para fines educativos, cuyas aplicaciones y desarrollos contribuyan a alcanzar las capacidades de áreas priorizadas en los diseños curriculares (Mendoza, 2016).

El Ministerio de Educación del Perú (2008) plantea que uno de los propósitos de la Educación Básica Regular al 2021 es el dominio de las tecnologías de información (TIC), donde se busca desarrollar en los estudiantes capacidades y actitudes que les permitan utilizar y aprovechar adecuadamente las TIC dentro de un marco ético, potenciando el aprendizaje autónomo a lo largo de la vida.

Para el presente reporte, se aborda el modelo de crecimiento de la sombra de un palo (variable longitud) con respecto al tiempo (variable tiempo); el trabajo se realizó en la IE Víctor Raúl Haya de la Torre de Occobamba en Cusco, en la sierra sur del Perú.

Pregunta matemática: ¿Cuál será la velocidad de crecimiento de la sombra de un palo?

Metodología de trabajo

Las tendencias actuales en educación coinciden en que el aprendizaje y la transferencia de conocimientos se mejoran al utilizar actividades significativas, aprendizaje colaborativo y un enfoque problemico (Pantoja, et.al. 2013)

El presente estudio se caracteriza por presentar un escenario de aprendizaje experimental, aplicativo y demostrativo en el marco de las rutas de aprendizaje, donde se desarrollaron

diferentes tipos de funciones como modelos utilizando el valor de R^2, como prueba de confiabilidad.

Escenario de aprendizaje

Desarrollar aprendizajes matemáticos utilizando los diferentes tipos de funciones como modelos de una matematizacion horizontal, significa:

1) Aprender a caracterizar situaciones de relación y cambio en diferentes contextos,

2) Aprender a describir, modelar y representar en distintos sistemas o registros simbólicos (verbales, representaciones, icónicos, gráficos o algebraicos).

Propuesta de trabajo.

Tabla 01. Propuesta de sesión de Investigación Matemática.

<table>
<tr><td colspan="2">Situación problemática:
María supone que cada minuto su sombra crece en un centímetro ¿Es acertado lo que piensa?</td></tr>
<tr><td>Indicador:
Construcción del significado y uso de la proporcionalidad y funciones lineal y cuadrática en situaciones problemáticas de variación (tiempo-distancia)
Experimenta situaciones de cambio para el desarrollo del significado de la proporcionalidad directa y la función lineal y cuadrática.

Ordena datos en esquemas para el establecimiento de relaciones de proporcionalidad directa y de dependencia lineal y cuadrática.
Elabora estrategias con el uso de las herramientas de Excel para representar en forma gráfica y algebraica la función lineal y cuadrática.
Justifica el uso de una representación gráfica de la función lineal y cuadrática para modelar una situación problemática.
Expresa en forma gráfica, algebraica las relaciones de proporcionalidad directa y de dependencia lineal y cuadrática.
Explica el proceso de resolución de situaciones problemáticas que implican el uso de la proporcionalidad directa, funciones y modelación matemática.</td><td>Contexto
Situación cotidiana problemática.

Áreas Afines
Ciencia Tecnología y Ambiente.
Educación para el Trabajo.</td></tr>
<tr><td>Conocimiento: Porporcionalidad, herramientas de Excel, Función lineal, Cuadrática</td><td>Cuarto Grado de Secundaria</td></tr>
</table>

Cuándo hacerlo: Cuando los estudiantes han trabajado cantidades directamente proporcionales y graficado funciones lineales y cuadráticas, cuando tengan dominio de los comandos gráficos de Excel. Por ello, a partir de una situación problemática se genera una serie de interrogantes que se orientan, de forma inductiva, a ir comprendiendo la función como modelo matemático.	Tiempo Sesión de laboratorio matemático de 90 minutos.
Sirve para: Resolver problemas en los que están presentes cantidades relacionadas. Representar esta relación mediante un gráfico y una expresión algebraica como modelo.	
Necesitas: Texto Minedu, Tercer y Cuarto grado	
Conocimientos previos: Representar datos en expresiones gráficas con Excel.	

Actividad Nº 01: Generan y Ordenan Datos.

Experimenta situaciones de cambio para el desarrollo del significado de la proporcionalidad directa y la función cuadrática como modelo matemático de un fenómeno. Debido al movimiento del sol la longitud de la sombra de los objetos que se interponen a su luz la luz, aumentan y disminuyen su longitud.

María cree que por cada minuto transcurrido se incrementa la sombra en un centímetro. ¿Es acertado lo que piensa?

Para resolver el problema con los estudiantes. Se partió de una actividad experimental planificada denominada ¨Medición de la sombra de un palo¨, en periodos de 15 minutos, desde las 3:00pm hasta las 5:00pm.

Completándose la siguiente tabla midiendo la variable tiempo en intervalos de 15 minutos con un cronómetro y la variable Longitud de la sombra en centímetros con una cinta métrica.

Tabla 02. Longitud de sombra con respecto al tiempo.

Hora de la tarde	**Longitud de la sombra (cm)**	**Hora de la tarde**	**Longitud de la sombra (cm)**
3:00 pm	13	4:00 pm	18,2
3:15 pm	13,6	4:15 pm	24
3:30 pm	14	4:30 pm	33
3:45 pm	14,7	4:45 pm	44,2
4:00 pm	18,2	5:00 pm	63

Actividad Nº 02: Representan y Grafican la función.

Ordenan los datos en un esquema para el establecimiento de relaciones de proporcionalidad directa y de dependencia lineal o cuadrática, en una hoja de cálculo Excel. Mediante el uso de las herramientas de Excel, representan la gráfica de la función y presentan la ecuación algebraica como modelo y el valor de R^2 como indicador de confianza en el modelo matemático, siguiendo la secuencia:

- Seleccionar las celdas de las dos variables.
- Insertar Grafico XY dispersión.
- Acondicionan los ejes para la presentación de los puntos en el plano cartesiano.
- Anti clic en un punto para solicitar agregar línea de tendencia (lineal o polinómica de segundo grado).
- Pedir la presentación de la ecuación y el valor de R^2

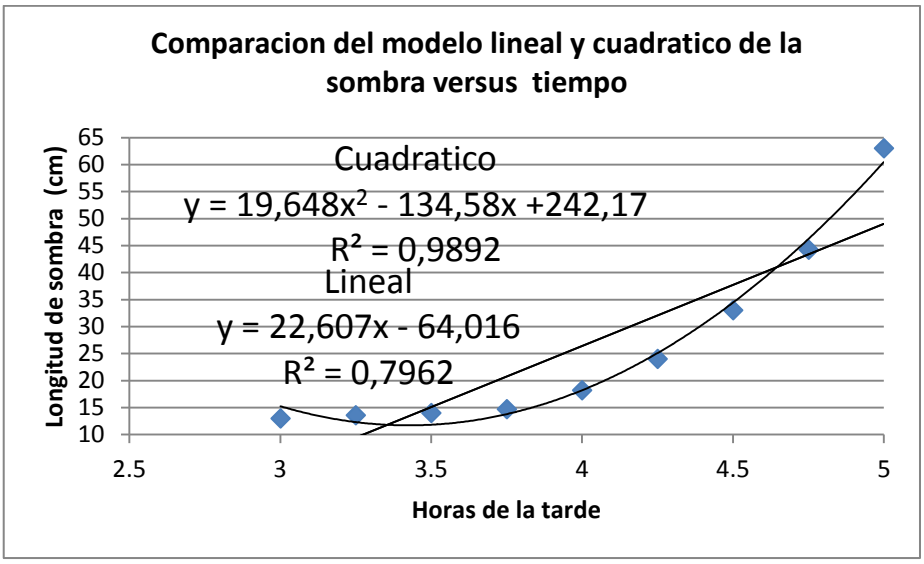


Figura 01. Representación gráfica y algebraica la función lineal y cuadrática.

Actividad Nº 03: Reflexionan y analizan

Al obtener inicialmente la gráfica de dispersión de los puntos (x,y), se puede notar claramente la tendencia diferente a una línea recta que siguen los puntos, es por tanto el modelo polinomico de segundo grado el más pertinente en ser usado, los estudiantes distinguen la hoja de parábola.

En la expresión algebraica $y = 19{,}648\, x^2 - 134{,}58x + 242{,}17$. La variable "*y*" Longitud de la sombra depende o está en función de la variable "*x*" Hora de la tarde; El número *19,648 es el coeficiente cuadrático, -134,58 coeficiente lineal y 242,17* se le denomina constante.

Como se escogió el intervalo del Dominio de la función como horas de la tarde desde las 3 hasta las 5, entonces tenemos graficado el rango desde 13 hasta 63. Es dentro de este Dominio y Rango que se tiene la validez de esta función cuadrática, su representación algebraica tiene un nivel de confianza de $R^2 = 0{,}9892$, es decir, tiene una ocurrencia de 98,92% sobre 100% lo cual es muy bueno para hacer predicciones y cálculos posteriores. Para tener la certeza de que el fenómeno corresponde a una función cuadrática, lo compararemos con un modelo lineal (Figura 01), para su análisis. Podemos distinguir claramente que la función lineal no contiene a los puntos, lo que si ocurre con la función cuadrática; pero un argumento categórico es el valor de R^2, mientras R^2 se acerque a 1 el modelo será perfecto por consiguiente con la función lineal tenemos un 79,62% de

confianza y con el modelo cuadrático un 98,92% de confianza, así que se escoge el de mayor confiabilidad, quedando la Figura 02.

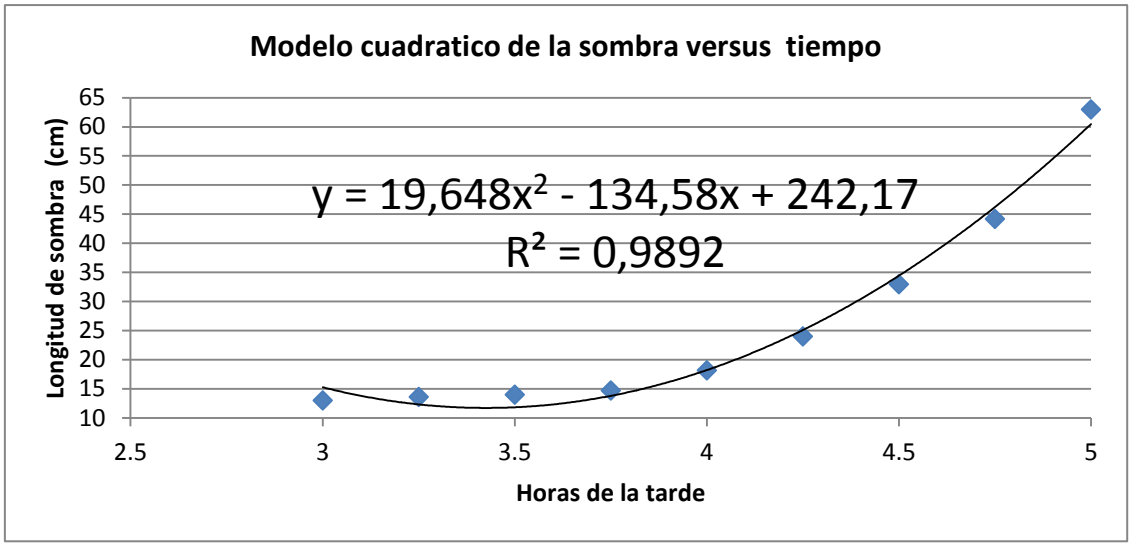


Figura 02. Modelo cuadrático de la sombra versus el tiempo.

Teniendo y= *19,648* x^2 *- 134,58x +242,17* podemos establecer la razón de cambio de la longitud de la sombra por cada hora transcurrido y luego dividirlo entre sesenta para tener por cada minuto transcurrido, para resolver la situación problemática y justificar la presunción de María.

Notamos claramente que existen dos tipos de avance uno lento entre las 3 y las 4 y el otro acelerado entre las 4 y 5 de la tarde, por ello existen dos velocidades diferenciadas, analizaremos cada una de ellas.

Velocidad lenta: Al reemplazar el valor de X entre 3 y 4 tendríamos:

Hora	Función	Reemplazando	Diferencia (X2-X1)/60
X1=3	*y =19,648* x^2 *- 134,58x +242,17*	15,262	0,04926
X2=4		18,218	

Entonces podemos aseverar que María no tenía razón al presumir que cada minuto aumentaba la longitud en un centímetro, en promedio la longitud de la sombra se incrementa a 0,049 cm por cada minuto entre las 3 y las 4 de la tarde.

Velocidad Rápida: Al reemplazar el valor de X entre 4 y 5 tendríamos:

Hora	Función	Reemplazando	Diferencia (X2-X1)/60
X1=4	$y = 19{,}648\ x^2 - 134{,}58x + 242{,}17$	18,218	0,7042
X2=5		60,47	

Entonces podemos aseverar que María no tenía razón al presumir que cada minuto aumentaba la longitud en un centímetro, en promedio la longitud de la sombra se incrementa a 0,7 cm por cada minuto entre las 4 y las 5 de la tarde.

ACTIVIDAD N°04: Extensión a composición de funciones y multimodelos.

Teniendo en cuenta que de 3 a 4 de la tarde se tiene una velocidad constante el modelo puede ser lineal, así como de 4 a 5 por el incremento de la velocidad el modelo puede ser cuadrático, pudiendo asumir que el fenómeno se compone de dos funciones y puede ser analizada por dos modelos matemáticos.

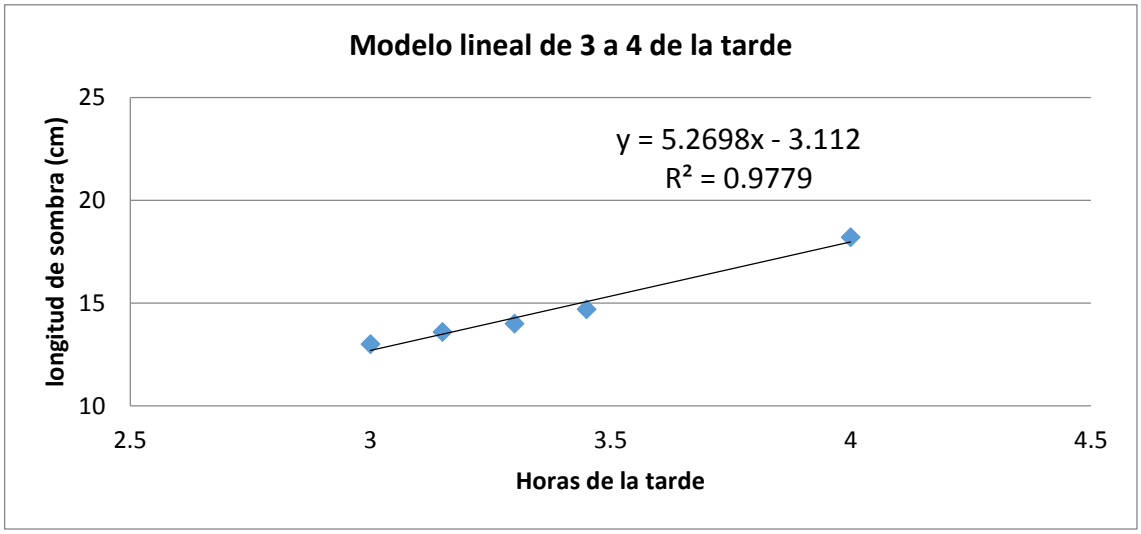


Figura 03. Modelo lineal de 3 a 4 de la tarde.

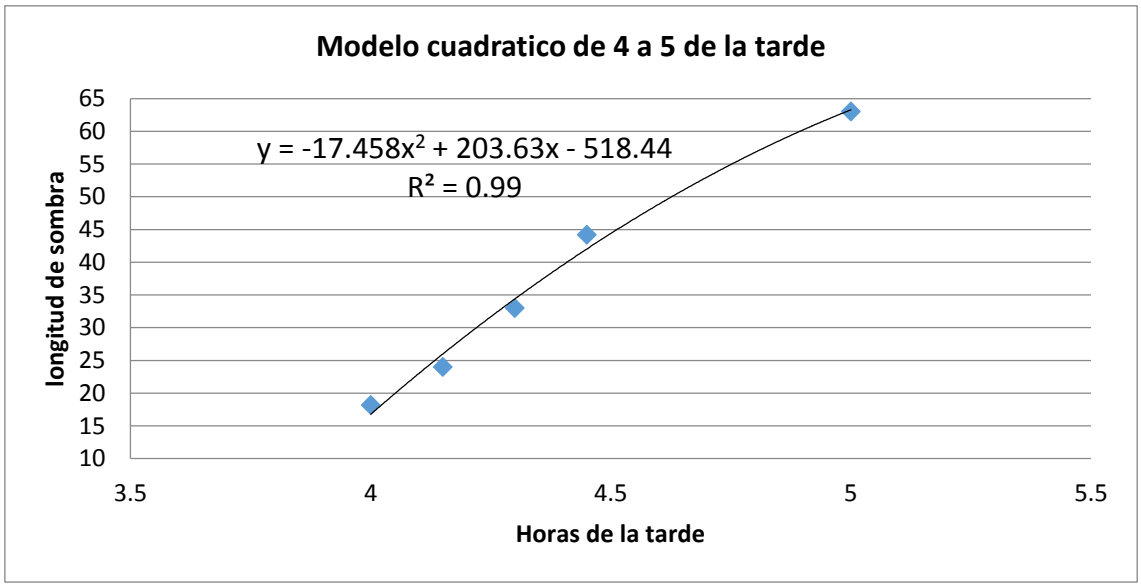


Figura 04. Modelo cuadrático de 4 a 5 de la tarde.

Teniendo un modelo matemático del fenómeno expresado por la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases}5.26x-3.11 & x\in[3,4]\\ -17.45x^2+203.63x-518.44 & x\in(4,5]\end{cases}$$

Actividad Nº 05

Resuelven situaciones problemáticas analogas.

Cierto estudio tecnológico muestra como sube la temperatura del aceite al ser calentado con respecto al tiempo, presentada en la siguiente tabla.

Grados Centígrados	f(x)	16	23	37	63	98	125	172
Tiempo por minutos	x	4	5	6	7	8	9	10

a) Expresa la regla de correspondencia de la función.

b) Si se desea freír carne de cuy a 110°C, ¿cuántos minutos debe calentar el aceite.

Investigaciones científicas han demostrado que la frecuencia de los chirridos de los grillos es una función lineal afín a la temperatura ambiental.

Grados Fahrenheit	X	45	46	47	48	49
Chirridos por minutos	f(x)	20	24	28	32	36

a) Expresa la regla de correspondencia de la función.

b) Completa la tabla para: f(x)=4x-160.

c) A 50 grados Fahrenheit, ¿Cuántos chirridos por minuto emitirá un grillo?

Tomado de: Rutas de Aprendizaje (2013), ¿qué y cómo aprenden nuestros adolescentes? Fascículo 1, VI Ciclo. MINEDU.

Resultados de la Experiencia

1. Interacción de los estudiantes con la actividad experimental.

Al reportar los resultados obtenidos a través de la *Guía de observación*. En relación a la Interacción de los estudiantes con los instrumentos de medición, los resultados indican que de los veintiún estudiantes, veinte lograron la manipulación correcta de los instrumentos de medición y recojo de datos, es decir, un 95.2% Explicándose por lo motivante del tema y el carácter aplicativo de la actividad.

2. Desarrollo de los componentes del área de Matemática de los estudiantes con las herramientas del Excel.

El promedio de la aplicación del componente Matemática, en el uso de las herramientas graficas de Excel fue logrado también en un 95.2%, Explicándose por la interactuación de las ventanas y el objetivo de los estudiantes así como por la ayuda de la gráfica para poder presumir el tipo de función.

3. Entendimiento de la idea de función lineal y función cuadrática.

La noción básica de relación entre variables que generan una función fue compendida por los estudiantes; a ello contribuyó la estrategia empleada totalmente practica con

participación activa y el uso del recurso tecnológico como una ayuda científica para probar la objetividad de las mediciones y su comportamiento.

4. Abstracción desde los fenómenos reales hacia los modelos matemáticos expresados en funciones.

La abstracción de los fenómenos reales hacia modelos matemáticos expresados por funciones lineales y cuadráticas fue aceptada, por los estudiantes. Contribuyó a ello la apreciación del fenómeno real y la transformación de los datos en funciones a través del Excel.

Sugerencias

• Formalizar la incorporación del uso del Excel como TIC en el área de Matemática y extenderlo a las otras áreas curriculares, para el beneficio de los estudiantes.

• Promover el uso fuera del horario escolar de las funciones del Excel para la socialización e investigación.

• A partir de la experiencia poder obtener la velocidad de la tierra.

Referencias

Ministerio de Educación (2012). Módulos de Resolución de Problemas: Resolvamos 1 y 2. Lima.

Ministerio de Educación (2012). Matemática 3. Lima: Editorial Norma.

Ministerio de Educación (2012). Matemática 4 y 5. Lima: Editorial Santillana.

Ministerio de Educación (Minedu) 2008 Diseño curricular nacional de la educación básica regular. http://www. minedu.gob. pe. Consulta: 20 de junio de 2012.

Ministerio de Educación (2013). Rutas del Aprendizaje, ¿Qué y cómo aprenden nuestros adolescentes? Número y Operaciones, Cambio y Relaciones VI y VII.

Mendoza, M. (2006) «Impacto del software educativo en la escuela». *Revista de educación el educador*, año 2, número 7.

Pantoja, R. Ulloa, R. Nesterova, E. (2013) «La modelación matemática en situaciones cotidianas con los software Avimeda y Mathcad». Gondola Vol.8N°1 Agosto 2013Pp8-22.

Volver al índice de autores

2.3.7. Uso de mapas conceptuales y mapas mentales como una estrategia de aprendizaje para la enseñanza de la matemática

Daysi Julissa García-Cuéllar, Pontificia Universidade Catolica de São Paulo, Brasil
Mihály Martínez-Miraval, Pontificia Universidad Católica del Perú-IREM, Perú

Resumen

Este reporte presenta una experiencia que se realizó con estudiantes de segundo de secundaria de una Institución educativa particular de Lima – Perú. El propósito de la experiencia fue empoderar a los estudiantes con estrategias de aprendizaje como son los organizadores visuales (mapas conceptuales y mapas mentales) de manera que los estudiantes sean capaces de seleccionar, adquirir, organizar o integrar la información a un nuevo conocimiento, en caso particular de la matemática. En un primer momento, la elaboración fue a lápiz y papel y luego se utilizaron el software Cmap Tools para realizar los mapas conceptuales y el software FreeMind para realizar los mapas mentales. Los resultados evidenciaron cómo el uso del Cmap Tools enriqueció el proceso de creación de Mapas conceptuales por parte de los estudiantes, ya que facilitó la inclusión y exclusión de información; de igual manera el FreeMind, por ser un software para la elaboración de mapas mentales, facilitó a los estudiantes su elaboración, respetando las jerarquías de las ideas y su estructura. En otras palabras, estos softwares familiarizaron a los estudiantes con la visión de conjunto y estructurada de un concepto o de un proceso en matemática y les ayudó a retener información de forma significativa.

Introducción

La experiencia que presentamos forma parte de un Proyecto Educativo Institucional denominado "Aprendizaje en mis manos" que tuvo como objetivo principal empoderar a los estudiantes de primaria y secundaria de diversas estrategias de aprendizaje de tal manera que los estudiantes involucrados sean cada vez más conscientes y partícipes de su proceso de aprendizaje.

Según Monereo (2000) las estrategias de aprendizaje son "un conjunto de acciones que se realizan para obtener un objetivo de aprendizaje". Esas acciones se corresponden con una

serie de procesos cognitivos en los que, según el autor, sería posible identificar capacidades y habilidades cognitivas, pero también técnicas y métodos para el estudio.

Dicho autor agrega que para lograr una habilidad es condición contar con la capacidad (innata) y con el conocimiento de algunos procedimientos que aseguren el éxito al realizar la actividad que requiera de la habilidad. Algunas de las habilidades cognitivas a las cuales serían aplicables ciertas estrategias son: observación, análisis y síntesis, ordenación, clasificación, representación de datos, retención, recuperación, interpretación inductiva y deductiva, transferencia, evaluación y autoevaluación.

Las estrategias de aprendizaje están fundamentadas en principios de tipo constructivista que permitan al estudiante aprender a aprender, generando un ambiente que propicie el incremento de la autonomía personal de los estudiantes y fomente el pensamiento crítico y la reflexión sobre su proceso de aprendizaje (Brockbank & McGill, 1998; Carretero, 1993; Coll, 2001; Mayor, Suengas & González, 1995; Pimienta, 2004).

A continuación, presentamos dos ejemplos de estrategias de aprendizaje que son el mapa conceptual y el mapa mental enfocados en el aprendizaje de la matemática.

Mapas conceptuales

Según Novak (2010), un mapa conceptual es un medio de visualizar conceptos y relaciones jerárquicas entre conceptos conocidos. Más aún, estos mapas contribuyen al desarrollo de habilidades de síntesis y de pensamiento en un todo y por partes a la vez; puede representar jerárquicamente la estructura lógica de un contenido de instrucción. Constituyen instrumentos que pertenecen a la categoría general de organizadores gráficos, que son útiles para organizar la información mostrando visualmente las relaciones conceptuales del contenido, ayudan a mejorar la comprensión del estudiante e incentivan un involucramiento más activo en el estudio (Trianes y Gallardo, 2004).

Un mapa conceptual en matemática según Ruiz-Primo (2000) es aquel en que lo que se representa son conceptos matemáticos y relaciones entre estos conceptos que dan lugar a proposiciones matemáticas. Dichas relaciones pueden servir tanto para definir el concepto matemático en su relación con otro, como para establecer proposiciones entre conceptos susceptibles de ser demostradas o probadas.

Novak y Gowin (1988) proponen una forma de abordar el análisis de los mapas conceptuales respecto a tres ideas principales (categorías): organización jerárquica de la estructura cognitiva, diferenciación progresiva y reconciliación integradora (ver tabla 1)

Tabla 1. Categorías a tomar en cuenta para la elaboración de un mapa conceptual

Categoría	Descripción
Jerarquización	Corresponde a la organización jerárquica de la estructura cognitiva. Los mapas conceptuales deben ser jerárquicos; es decir, los conceptos más generales e inclusivos deben situarse en la parte superior del mapa y los conceptos progresivamente más específicos y menos inclusivos en la parte inferior.
Diferenciación progresiva entre conceptos	Comprende una explicitación de nexos, aclaración expresa de los nexos en las proposiciones seleccionadas utilizando oraciones nodales apropiadas más que palabras-enlace (conectores).
Reconciliación integradora	Corresponde a la integración o asimilación de nuevas relaciones cruzadas entre conceptos. La reconciliación integradora implicaría una revisión y reacomodamiento de toda la jerarquía conceptual modificada a raíz del nuevo aprendizaje.

Fuente: Adaptado de Reyes-Santander y Ramos-Rodríguez (2016)

El Cmap Tools es un software gratuito que facilita la creación y gestión de mapas conceptuales. Ha sido desarrollado por el Florida Institute for Human and Machine Cognition (IHMC). Permite crear fácilmente los nodos gráficos que representan conceptos, conectar estos nodos usando líneas, y enlazar palabras para formar una red de proposiciones interrelacionadas que representa el conocimiento sobre un tema. Se puede descargarse gratuitamente en https://cmap.ihmc.us/products/ que es la página web del IHMC.

El Cmap Tools es multiplataforma, es decir, cuenta con varias vistas. En la figura 1 se muestra las diferentes vistas de este software.

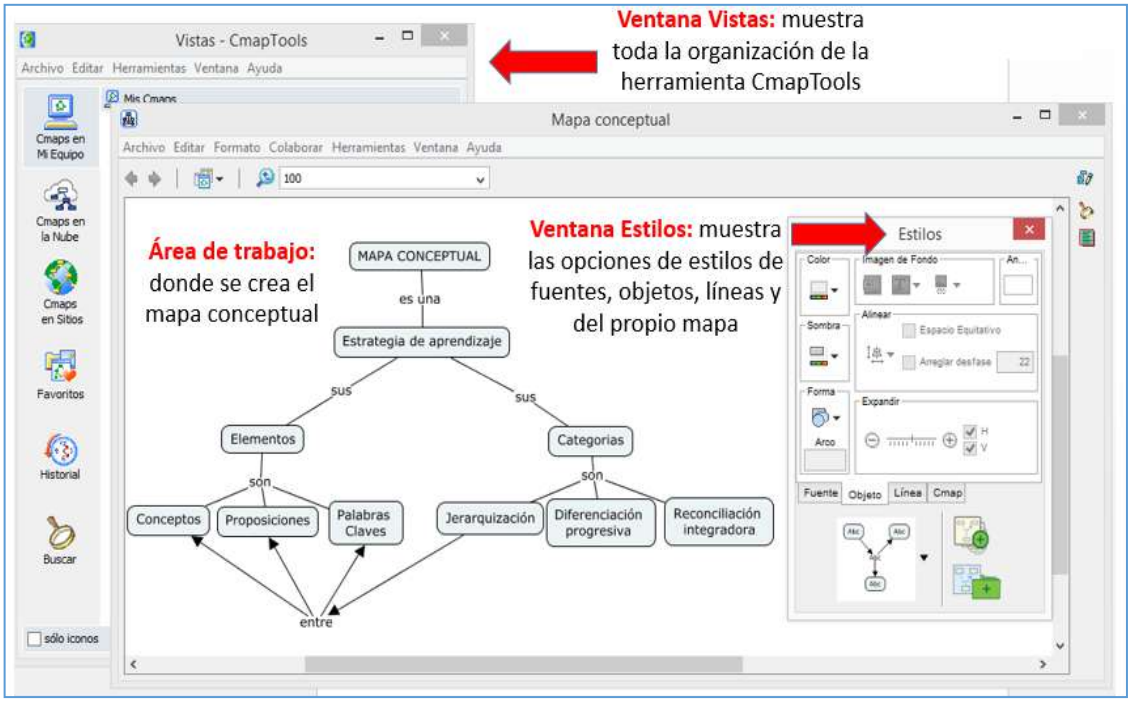


Figura 1. Vistas del software Cmap Tools. Elaboración propia.

Este software es una herramienta que considera la jerarquía de los mapas conceptuales, así como palabras enlaces o también llamados conectores entre los conceptos, por ello no se puede crear conceptos aislados.

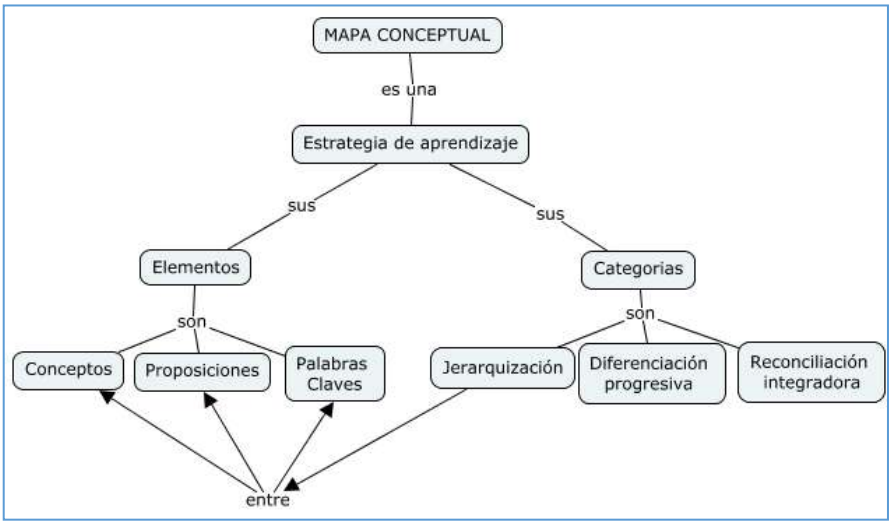


Figura 2. Mapa conceptual de lo que es un mapa conceptual elaborado con Cmap Tools

Fuente: Elaboración propia.

Según Nieto y García (2009), los mapas conceptuales pueden ser usados como:

- *Guía en la presentación y explicación de un tema*. Al comienzo de cada tema se presenta un mapa conceptual que comprende los contenidos más importantes que se tratan en él. El mapa sirve de hilo conductor en la explicación del tema.

- *Apoyo al estudio para el estudiante*. Esto les proporciona una visión estructurada del tema y una guía para su estudio.

- *Ayuda a la evaluación continua*. Se presenta a los alumnos, de forma individual o en grupo, un esqueleto de mapa o mapa incompleto para ser completado. De esta forma el alumno puede seleccionar los aspectos más significativos del tema y establecer las relaciones entre ellos.

Mapas mentales

Su creador, el psicólogo británico Tonny Buzan (2013), sostiene que un mapa mental es un diagrama organizado en el que se representan ideas, imágenes, proyectos, visiones y animaciones a fin de que estos contengan una sociedad entre ellos para que se interprete un mensaje en general. Este mensaje debe de estar representado por un globo central y alrededor de este todas las ideas que complementen la situación que describe la idea inicial.

Asimismo, Buzan (2013) indica que la perspectiva conceptual y técnica del mapa mental es una representación gráfica de la organización de conceptos que imita las formas de las redes neuronales. Además del resultado visual, es similar a otros organizadores en donde comparte aspectos técnicos como la idea central, palabras claves, selección y organización de conceptos, creatividad, interacción, entre otros. Buzan (2013) revela que la importancia de los mapas mentales radica en que son una expresión del pensamiento irradiante porque es una técnica gráfica que permite acceder al potencial del cerebro y facilita el proceso de comprensión para un buen aprendizaje.

Para la elaboración de un mapa mental, Rodas (2014) sostiene que se debe tener en cuenta su organización. Se inicia con la idea principal representada por una palabra o imagen que se coloca en el centro, luego se trabaja hacia afuera en todas direcciones para producir una estructura creciente y organizada compuesta de palabras e imágenes claves. Lo que se debe de tomar en cuenta para elaborarlo es en primer lugar la organización de ideas porque ello permitirá comprender mejor el tema de estudio. Las palabras claves pueden ser sustituidas

por imágenes para poder asociar el significado. Será necesario utilizar colores que permitan facilitarle el trabajo a la memoria visual.

Por otro lado, FreeMind es un sotfware para la elaboración y manipulación de mapas mentales. Es decir, una herramienta para organizar y estructurar las ideas, los conceptos, su relación entre ellos y su evolución. La página del proyecto es http://freemind.sourceforge.net. Es un software ligero, sencillo de instalar, configurar y utilizar.

Los conceptos básicos sobre los que se basa FreeMind son:

Nodo: Es un cuadro de texto que se utiliza para almacenar información. Los nodos están conectados mediante líneas curvas llamadas bordes. El primer nodo creado es el nodo raíz. Un mapa mental se construye añadiendo nodos al nodo raíz.

Nodos hijos y hermanos: Un nodo hijo se coloca siempre a un nivel más bajo que el padre. Un nodo hermano se coloca al mismo nivel que su nodo de referencia. El nodo raíz sólo puede tener nodos hijos o secundarios.

Bordes: Son las líneas que unen los nodos estableciendo las relaciones entre ellos. Pueden tener diferentes diseños y además se pueden personalizar.

A continuación, mostramos en la figura 3, el interfaz del software FreeMind y los elementos básicos que lo componen.



Figura 3. Interfaz del software FreeMind. Elaboración propia.

Un ejemplo de mapa mental elaborado con FreeMind se muestra en la figura 4

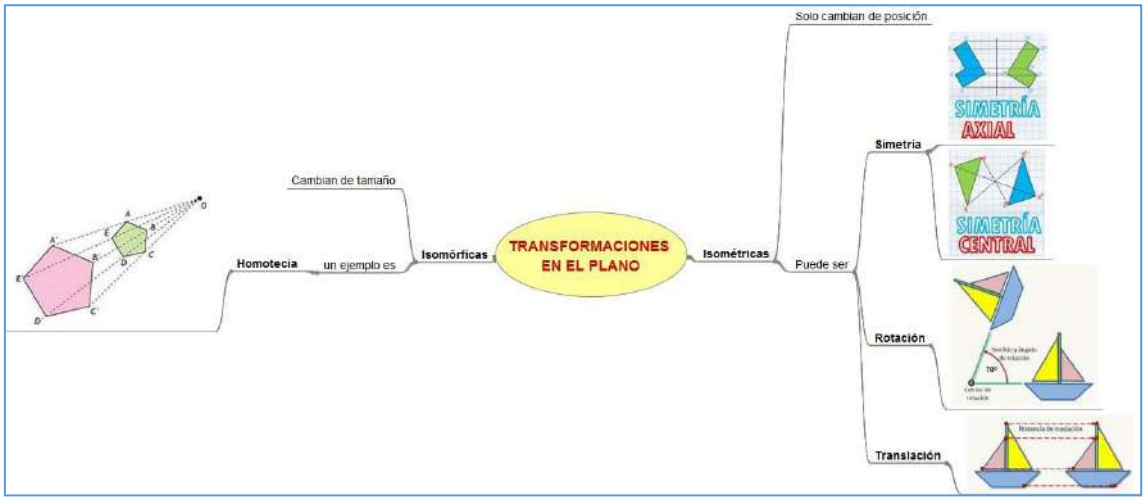


Figura 4. Mapa mental elaborado con FreeMind por una estudiante

Experiencia

La experiencia se realizó en marco del proyecto institucional “Aprendizaje en mis manos” que buscaba desarrollar diversas estrategias de aprendizaje en los estudiantes, de tal manera que sean conscientes de su proceso de aprendizaje y cuenten con herramientas de estudio de diversos temas, en nuestro caso, matemáticos.

En el segundo grado de secundaria se centró en la estrategia de organizadores visuales, entre ellos el mapa conceptual y el mapa mental. Para ello, profesores de matemática y tutores trabajaron en conjunto. En el área de tutoría se trabajó la elaboración de los mapas, sus estructuras y del uso de los softwares Cmap Tools y FreeMind. En el área de matemática, se enfatizaba el uso de los mapas conceptuales y mentales para el aprendizaje de los temas estudiados. Esta experiencia duró todo el año académico.

Los estudiantes fueron 40 entre dos secciones, ellos realizaban mapas mentales o mapas conceptuales en cada tema realizado, tenían libertad para escoger entre uno o el otro tipo de mapa estudiado. Los docentes de matemática revisaban los mapas y en caso sea necesario se pedía rehacer, para asegurar la comprensión del tema.

A continuación, presentamos algunos mapas conceptuales y mentales elaborados por los estudiantes:

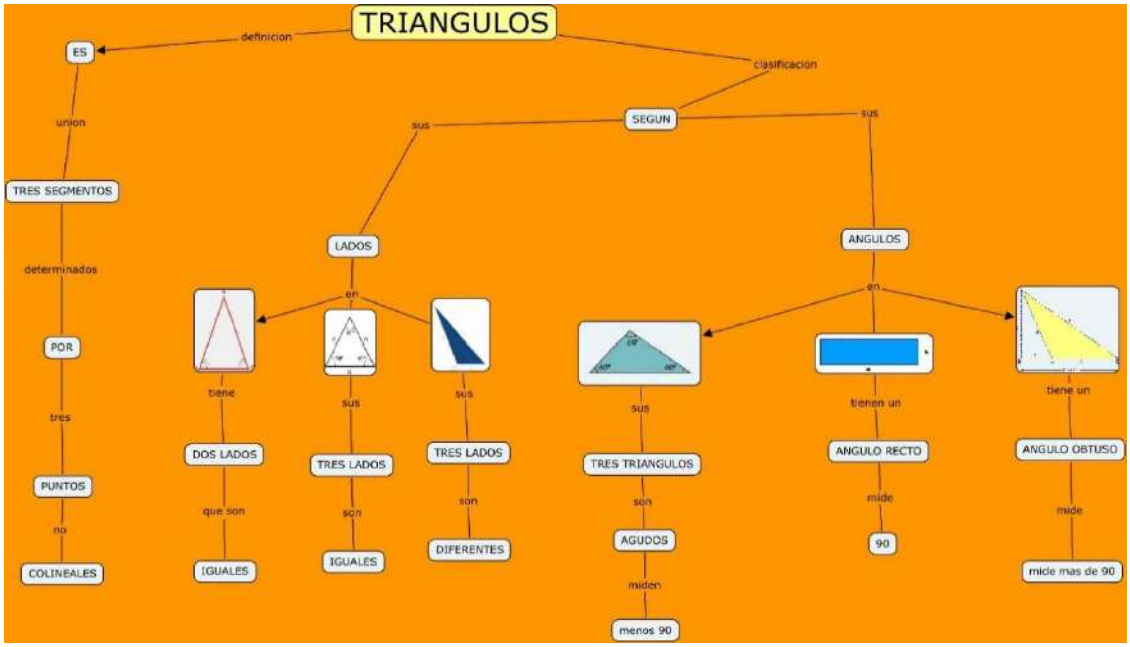


Figura 5. Mapa conceptual elaborado por uno de los estudiantes con Cmap Tools sobre el tema Triángulo.

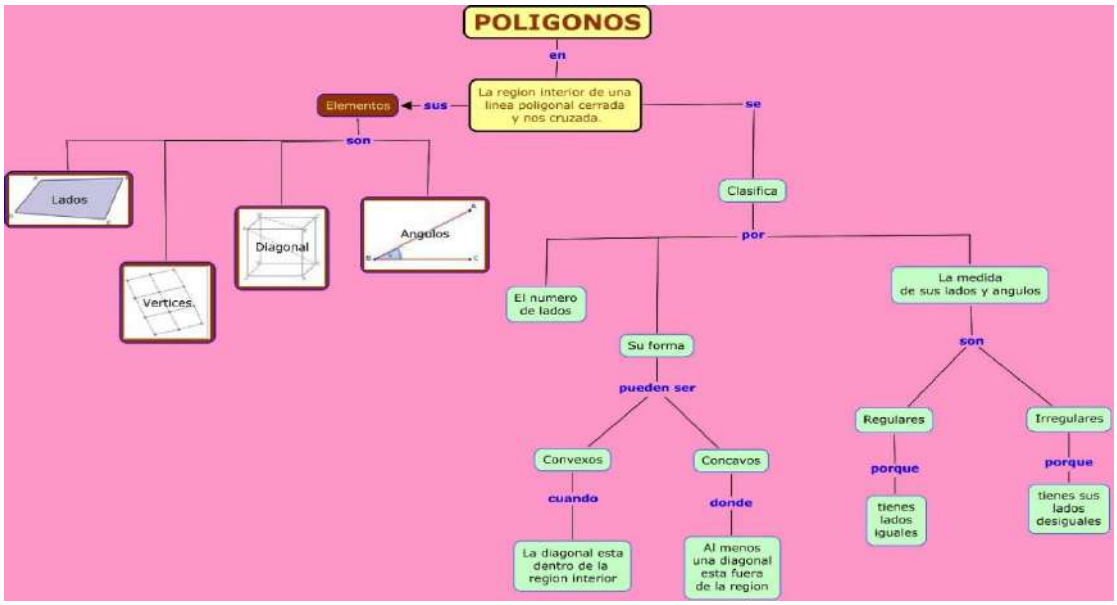


Figura 6. Mapa conceptual elaborado por uno de los estudiantes con Cmap Tools sobre el tema Polígonos

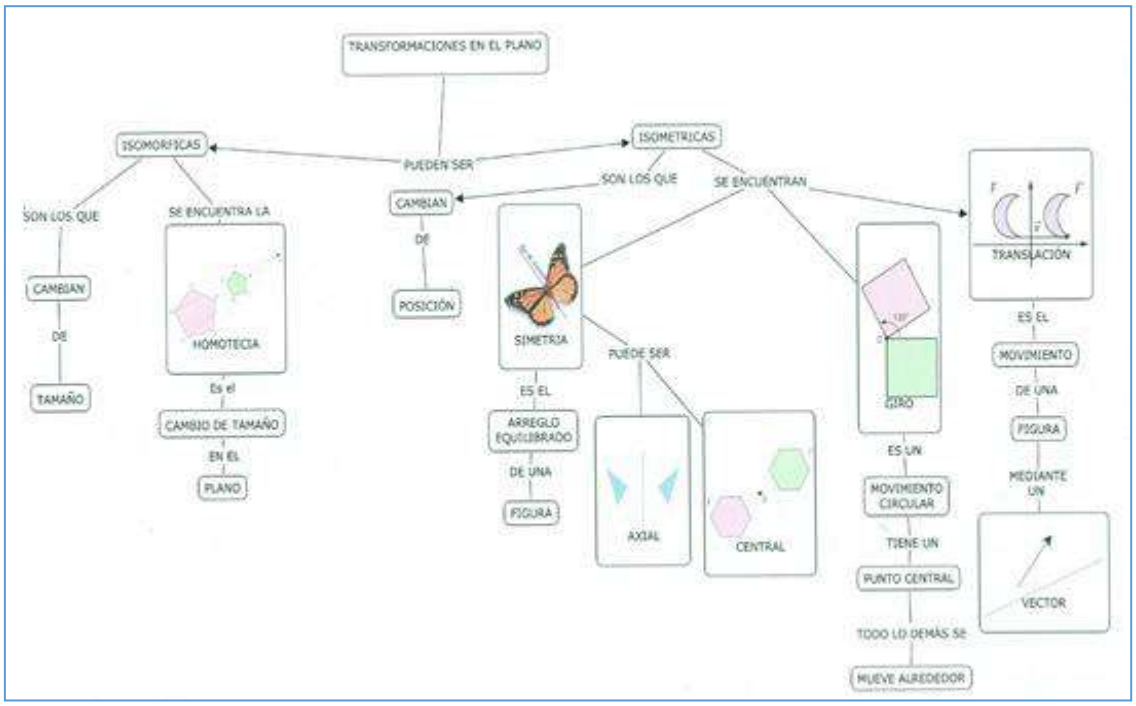


Figura 7. Mapa conceptual elaborado por uno de los estudiantes con Cmap Tools sobre el tema Transformaciones en el plano

Algunos de los mapas mentales y conceptuales, elaborados por los estudiantes fueron expuestos en el día del logro de los aprendizajes que se realiza anualmente en la institución educativa.

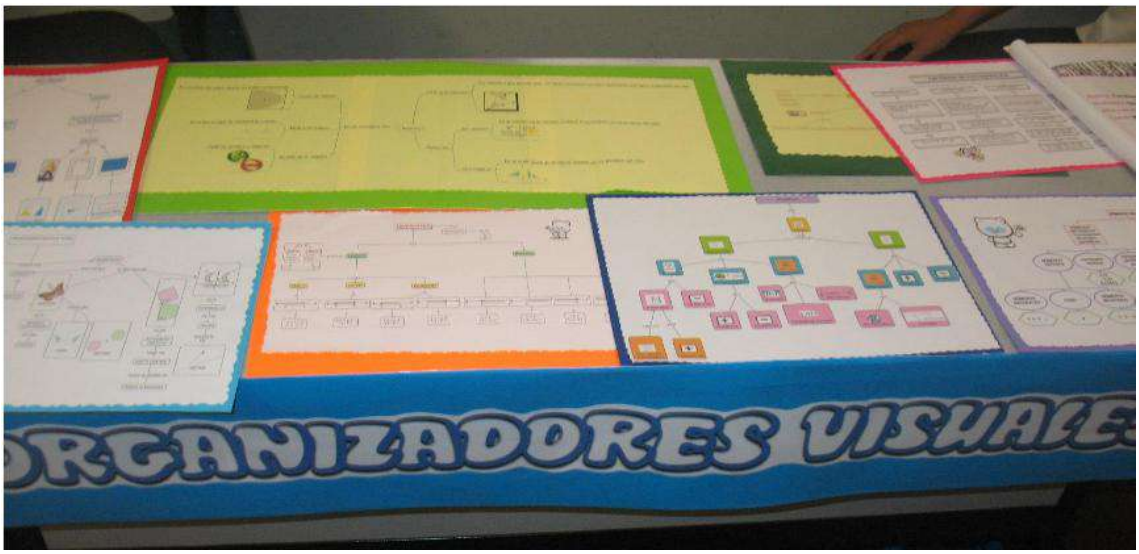


Figura 8. Mapa conceptual y Mapas mentales elaborados por los estudiantes y expuestos por ellos en el día del logro de los aprendizajes.

Conclusiones

La elaboración de mapas mentales y conceptuales familiariza a los estudiantes con la visión de conjunto y estructurada de un concepto o de un proceso y les ayuda a retener información de forma significativa.

La experiencia con el trabajo con mapas mentales y conceptuales muestra la importancia que estos tienen en la estructuración del pensamiento de los estudiantes. Cada estudiante tenía la misma tarea, elaborar un mapa mental o conceptual de tema trabajado, sin embargo, el resultado cambiaba de estudiante en estudiante en cuanto a la forma de presentación, las jerarquías usadas, los enlaces establecidos, entre otros.

Los mapas mentales y conceptuales, por tratarse de herramientas que dejan en evidencia el proceso cognitivo de los estudiantes (conexiones entre conceptos, jerarquías, etc.), fueron de gran utilidad para la retroalimentación en el proceso de aprendizaje, pues se podían detectar algunos errores en las conexiones entre conceptos, lo cual podría llevar al estudiante a un error en la concepción de objeto matemático estudiado.

Los softwares Cmap Tools y FreeMind ayudaron a comprender cómo se elaboran los mapas conceptuales y mentales, respectivamente, dado que cada uno respetaba la estructura de los mapas mencionados, lo cual restringía a los estudiantes a respetar sus estructuras. Por ejemplo, en el Cmap Tools no podían escribir otro concepto si no escribían el conector (palabra enlace) entre ellos.

Esta experiencia se enfocó en el proceso de aprendizaje; se recomienda también que se enfoque en el proceso de enseñanza, pues los maestros pueden elaborar mapas mentales y conceptuales para introducir un nuevo concepto matemático en el aula.

Referencias

Brockbank, A., & MC Gill, I. (1998). *Facilitating Reflective Learning in Higher Education.* London: Society for Research into Higher Education.

Buzan, T. (2013). *Mapas Mentales*. España: Urano.

Carretero, M. (2003). *Constructivismo y educación.* Zaragoza: Edelvives.

Coll, C. (2001). *Constructivismo y educación: la concepción constructivista de la enseñanza y del aprendizaje*. En: Coll, C.; Palacios, J., & Marchesi, A. (Comps.). *Desarrollo psicológico y educación. 2. Psicología de la educación*. pp. 157-188. Madrid: Alianza.

Mayor, J.; Suengas, A., & González, J. (1995). *Estrategias metacognitivas. Aprender a aprender y aprender a pensar.* Madrid: Síntesis.

Monereo, C. (2000). *El asesoramiento en el ámbito de las estrategias de aprendizaje*. En: Estrategias de aprendizaje, pp. 15-62. Madrid: Visor.

Nieto, C y García, M. (2009). Uso de mapas conceptuales en dos asignaturas de matemáticas. XV Jornadas de Enseñanza Universitaria de la Informática. https://upcommons.upc.edu/revistes/bitstream/2099/7857/6/p141.pdf Consultado 01/05/2018.

Novak, J. D. y Gowin, D. B. (1988). *Aprendiendo a aprender*. Barcelona: Martínez Roca.

Novak, J. D. (2010). *Learning, creating, and using knowledge: Concept maps as facilitative tools in schools and corporations*. Nueva York: Routledge.

Pimienta, JH. (2004). *Constructivismo: estrategias para aprender a aprender*. D.F México: Pearson Educación.

Reyes-Santander, P. y Ramos-Rodríguez, E. (2016). Mapas conceptuales en educación matemática a nivel universitario. Revista Electrónica de Investigación Educativa, Vol. 20, Núm. 2, 25-36.

Rodas, L. (2014). Mapas mentales en el aprendizaje de las funciones trigonométricas. (Tesis de pregrado). Universidad Rafael Landívar, Guatemala.

Ruiz-Primo, M., (2000). El uso de mapas conceptuales como instrumentos de evaluación del aprovechamiento en ciencias: lo que sabemos hasta ahora. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, vol. 2, (1). https://redie.uabc.mx/redie/article/view/16 Consultado 05/05/2018.

Trianes, M. y Gallardo, J. (2004). *Psicología de la educación y del desarrollo en contextos escolares*. Madrid: Pirámide.

Volver al índice de autores

2.3.8. Levantamiento bibliográfico: prueba y demostraciones en geometría espacial

Maritza Luna Valenzuela
Saddo Ag Almouloud
Pontifícia Universidade Catolica de São Paulo, Brasil

Resumen

En este artículo se presentará una revisión bibliográfica con respecto a la enseñanza de la geometría espacial teniendo como objeto de estudio Vectores y sus operaciones, con enfoque en las concepciones de los alumnos acerca de las pruebas y demostraciones (en el sentido de Balacheff) de diversas proposiciones y parte de esos resultados se presentará en este artículo. Se utilizó la revisión bibliográfica en tesis de pós-graduación y en artículo de revistas. Para dicha búsqueda utilizamos los descriptores: Enseñanza de la geometría espacial, demostraciones en geometría, vectores, geometría vectorial.

Introducción

La geometría vectorial es una herramienta poderosa para resolver problemas de ingeniería y los fenómenos físicos, por ello en la formación profesional en el Perú algunas carreras de graduación, en especial las de ciencias e ingenierías, incluyen en el currículum el curso de AMGA (Álgebra Matricial y Geometría Analítica), que es requisito para los cursos de cálculo en varias variables, cálculo aplicado, cursos de mecánica y física. En el curso de AMGA se inicia el estudio de los Vectores y propiedades, donde para la resolución de problemas y en particular las demostraciones en Geometría ponen en juego la movilización de conceptos y propiedades que requieren ser de algún modo una representación gráfica con lápiz y papel y lograr el desarrollo de la percepción, intuición y sentido estético y poder desarrollar actividades que requieran el planteo de conjeturas. Por ello estamos interesados en investigar las concepciones de los alumnos en pruebas y demostraciones.

Revisión de la literatura

Iniciamos la revisión bibliográfica primero con pruebas y demostraciones en matemática, en particular demostraciones en geometría y finalmente en enseñanza de vectores tanto en tesis como en artículos. Presentaremos en esta oportunidad presentaremos la de revisión de algunos resultados cuatro artículos en diversas revistas y cuatro tesis de las cuales una es de maestría y las tres siguientes son de doctorado.

Artículos revisados

En su artículo Almouloud (2007) presenta los resultados de un proyecto realizado por el grupo de pesquisa Pensamiento Matemático (PEA-MAT) del Programa de los Estudios de Pós Graduación en Educación Matemática de la PUC-SP, cuyo objetivo fue investigar los factores que interfieren en el proceso de enseñanza y aprendizaje involucrando raciocinio deductivo en matemática. La investigación se aplicó a un grupo de profesores de Enseñanza Fundamental y Medio. Se enfatiza dos objetivos en la investigación: (1) Los modos de organización y los procedimientos teórico-metodológico relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las pruebas y demostraciones en matemática en las series finales de enseñanza fundamental y (2) las representaciones de los profesores de esas series finales en cuanto al papel del raciocinio deductivo en la formación del alumno. La conclusión a la que llego el autor es que los profesores tenían dificultades en identificar hipótesis y tesis en las actividades propuestas y además confundían dichos términos; dificultad en reconocer las demostraciones en libros didácticos; para ellos una demostración en matemáticas era sinónimo de ilustración de conceptos por medio de representaciones gráficas.

Morales y Samper (2015) describen y ejemplifican dos tipos de dificultades identificadas en los estudiantes de un curso de geometría euclídea del primer semestre de la Licenciatura en Matemáticas y Física, en la Universidad de la Amazonia. Para su fundamentación teórica se conceptualizó acerca de los siguientes tópicos: la demostración, tipos de demostración, dificultades en la construcción de demostraciones geométricas, el manejo y la comprensión del enunciado de un teorema, los autores indican que: En matemáticas, una demostración generalmente es el encadenamiento de afirmaciones. Se usa el esquema de razonamiento válido Modus Ponendo Ponens, en el que las afirmaciones se van deduciendo de postulados, definiciones y teoremas demostrados con anterioridad, a partir de unos datos dados y, mediante el empleo de esquemas de razonamiento válidos. Ello es lo que permite decidir la veracidad o no de una afirmación, dentro de un sistema teórico específico. Además, mencionan a Dreyfus, citado por Bernardis & Moriena (2015) y expresa que "es necesario que los estudiantes se enfrenten realmente a preguntas cuya naturaleza les pida que razonen, argumenten y justifiquen las afirmaciones matemáticas". La conclusión a la que arribaron fue: (i) El uso de la geometría dinámica puede incidir en la comprensión de la necesidad de las condiciones establecidas en la hipótesis de un teorema o de un problema para que la tesis se cumpla. (ii) Se sugiere que antes de iniciar el proceso de demostración, el estudiante identifique y dé a conocer a los coequiperos y al profesor, los datos válidos

que se infieren de la hipótesis dada en el enunciado. (iii) En el proceso de producción de demostraciones deductivas formales en geometría euclídea, es necesario usar propiedades de los números reales, las cuales se supone fueron estudiadas en la educación básica y/o media. Su desconocimiento es causa de dificultad. Se recomienda analizar éstas con los estudiantes, cada vez que se vayan a usar, para que identifiquen los errores en los que pueden estar incurriendo. (iv) De la misma manera, se recomienda hacer un repaso acerca de algunos elementos fundamentales de la teoría de conjuntos, de manera específica: conjuntos, clases, operaciones y su relación con la lógica matemática. (v) El uso incorrecto del lenguaje propio de la geometría afecta la comunicación clara, concisa y, posiblemente, la comprensión. Como estrategia que ayudará a obviar este tipo de dificultad, se recomienda que tanto el estudiante como el profesor que socializan por escrito en el tablero la producción de demostraciones, se esfuercen por utilizar y exigirse mutuamente el uso de la sintaxis y el lenguaje icónico propio de la geometría.

Como indica Balacheff (2010), en la mayoría de las veces, el problema de la enseñanza de la prueba matemática se ha abordado casi independientemente de la enseñanza del "contenido" matemático mismo. Además, el autor indica que algunos planes de estudio han expuesto a los estudiantes a una cantidad significativa de matemáticas sin aprender acerca de la prueba matemática como tal (Herbst, 2002, p.288); otros enseñando la demostración matemática como una materia en sí misma sin relacionarla significativamente con ejemplos prácticos concretos (véase Usiskin, 2007, p.75). La tradición didáctica más común elige introducir pruebas en el contexto de la geometría, generalmente al final del octavo grado, esto en el sistema escolar de Francia, mientras que las ignora por completo en álgebra o aritmética, donde las cosas parecen reducirse a "meras" cuentas. Esta orientación ha cambiado ligeramente en la última década con un énfasis creciente en la enseñanza de la prueba. Sin embargo, una distinción implícita entre forma y contenido ha llevado a referencias a la enseñanza de "razonamiento matemático" (por ejemplo, normas NCTM) o "razonamiento deductivo" (por ejemplo, programas nacionales franceses) en lugar de una prueba matemática que habría cambiado de "forma" mucho más a la vanguardia de la escena didáctica.

Existen investigaciones donde utilizan vectores y parte de sus tareas realizan demostraciones pero no analizan concepciones de los alumnos, como muestra Lacués (2014) quien desarrolla una investigación utilizado temas de vectores y matrices como parte de una investigación que muestra en el reporte donde presenta los efectos sobre los

aprendizajes de un diseño didáctico, con la finalidad de enseñar Sistemas Matemáticos de Símbolos (SMS) en un primer curso universitario de Álgebra Lineal, basado en la retroalimentación a los estudiantes a partir de su desempeño en tareas de resolución de ejercicios. Se reporta complementariamente el estudio de la incidencia de esta intervención en los desempeños de los alumnos en un curso de Cálculo. Se utilizó un diseño experimental con un grupo experimental (GE) y uno de control (GC), con un test inicial y otro final para evaluar desempeños. Se clasificó a los estudiantes mediante el test inicial en dos categorías (calificación alta- calificación baja) y se estableció que los de calificación alta de GE consiguieron desempeños en el test final significativamente mayores que los correspondientes de GC (se utilizó una prueba de Mann-Whitney). No se detectaron diferencias entre los subgrupos de estudiantes de calificación baja. Los integrantes de GE tuvieron desempeño significativamente mayor que los de GC en la tarea de Cálculo (se utilizó un Student's t-text). Estos resultados permiten utilizar este diseño en grupos de estudiantes con alta calificación inicial, y desafía a buscar estrategias alternativas para enseñar a los de menor calificación.

Disertaciones y Tesis revisadas

En la tesis de Ordem (2015) el objetivo fue analizar las concepciones de prueba y demostración en geometría plana de estudiantes de Licenciatura en matemáticas de la Universidad Pedagógica de Mozambique. Los resultados a los que arribó el autor sobre los estudiantes del grupo de investigación fueron: (i) no mostraban estrategias consistentes de elaboración de demostraciones, ni justificaban con base matemática plausible - sus estrategias parecen más influenciadas por el abordaje de la geometría en los libros didácticos adoptados en la enseñanza fundamental. (ii) tratan con pruebas y demostraciones como otro tema de aprendizaje en matemáticas y no como medio de comunicación y de validación en matemáticas. (iii) no utilizan criterios consistentes para evaluar pruebas y demostraciones. (iv) la concepción de que pruebas y demostraciones son simples rituales disociados de una de sus funciones principales, la de validar propiedades y conjeturas verídicas, o de refutar conjeturas falsas. Finalmente, el estudio revela que, entre los estudiantes de la investigación, reina la concepción de que existen métodos empíricos que validan propiedades geométricas, aunque no sean demostraciones, y métodos empíricos que no validan propiedades geométricas, según el tipo de instrumento utilizado.

Mientras que la tesis de Brito (2016) investiga una propuesta didáctica cuyas tareas articulan pruebas y demostraciones como estrategia metodológica de enseñanza para minimizar las dificultades relacionadas al tópico "cuadriláteros" en un curso de licenciatura en matemáticas. Las tareas involucran construcciones geométricas en un ambiente de papel y lápiz en el que los alumnos son solicitados a construir figuras geométricas y justificar matemáticamente las técnicas utilizadas. En la ejecución de las tareas los alumnos efectúan conversiones de registros y movilizan las diferentes aprehensiones de una figura geométrica (secuencial, perceptiva, operatoria y discursiva). Los resultados a lo que arribo la autora evidenció dificultades conceptuales relativas a la caracterización de cuadriláteros notables y las relaciones entre ellas. Donde algunas de esas dificultades están relacionadas con las justificaciones propuestas por los alumnos. La autora menciona que ese hecho es reforzado por Duval (2009a, b) cuando afirma que la limitación de la representación de un objeto matemático a un único registro puede provocar confusión entre el objeto y su representación. Además de eso, la aprehensión perceptiva es la primera visión del alumno sobre la figura y puede bloquear las otras aprehensiones. Constató también la experiencia de los alumnos con la geometría se restringe a la intuición (conocimientos basados en experiencias empíricas) y la característica de una geometría científica (evidenciada en

momento en que se afirma que mejor manera de dar inicio a la geometría es por las nociones primitivas). Por lo cual afirma la autora que el análisis del perfil de los alumnos y de sus concepciones sobre la enseñanza de la geometría da indicios de que los alumnos no experimentaron en su formación momentos favorables a la construcción de conocimientos/saberes geométricos.

Saldariaga (2012) presenta algunos aspectos de la evolución conceptual de la noción de vector. Los resultados fueron obtenidos a partir de revisiones con trasfondo histórico-epistemológico. El autor establece dos líneas de desarrollo histórico: la línea matemática y la línea física. También indica que, aunque se analizan algunos aspectos de la línea física, en especial en lo concerniente a la modelación de algunos fenómenos naturales, nos centramos en la línea matemática. Mostró que la evolución del álgebra genera el ambiente propicio para acoger estructuralmente a estos nuevos objetos de naturaleza no necesariamente numérica. La construcción histórica de la noción de vector se fue manifestando en la medida que se iban identificando elementos de causalidad de la triada: magnitud, dirección y número. En este proceso contribuyeron matemáticos de diferentes entornos geográficos, entre los que sobresalen Euclides, Descartes, Galileo, Newton, Hamilton, Grassmann y Maxwell, entre otros. Dedicó una parte de la tesis al libro Elementary Treatise on Quaternions del matemático y físico escocés Peter Tait porque es un texto clave para entender la instauración del moderno análisis vectorial.

En Coelho (2015), se realiza una investigación para analizar como los autores de libros didácticos organizaron las actividades propuestas en lo que se refiere al estudio de la Recta y del Plano para la enseñanza de la Geometría Analítica en el Espacio. La autora analiza los libros didácticos basándose esencialmente en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). Los resultados del análisis de los libros investigados indican que, a pesar de una diversidad de las tareas, con base en la TAD, propuestas por los autores, pocos manuales contemplan las sugerencias de abordaje para la Recta y para el Plano en el Espacio indicadas por Lebeau (2009). Además, se encontró que es posible inferir que los autores privilegian una modelización algébrica de los objetos matemáticos, así como las técnicas adoptadas por los mismos encontrándose situadas en el campo del Álgebra Lineal y de la Geometría Analítica.

Conclusiones

Muchas de las investigaciones nos muestran las dificultades de los estudiantes en relación con las demostraciones en cursos de graduación de Universidades. Los autores advierten que la aplicación de conceptos y propiedades, traen consigo algunas dificultades en términos de comprensión principalmente, cuando se apoyan esbozos gráficos errados. Por ello algunos autores insisten, también, en la importancia de la interacción entre diferentes representaciones para generalizar los principales aspectos de la geometría. Hasta el momento hemos encontrado en esta revisión bibliográfica pesquisas que tratan de demostraciones en geometría en el plano es decir dos dimensiones y ninguna en demostraciones con vectores en dos y tres variables reales. Este resultado está nos conduce a profundizar nuestra revisión y buscar caminos para ampliar la enseñanza de vectores en la geometría espacial y propiciar la construcción de conocimientos más significativos para los alumnos porque se apoyaría en demostración y verificación problemas reales.

Referencias

Almouloud, S. A. (2007). Provas e Demonstrações em Matemática. Problemática de seus processos de ensino e aprendizagem. GT Mathematics Education / n.19 http://www.anped.org.br/sites/default/files/gt19-2957-int.pdf

Balacheff, N. (2010). Bridging knowing and proving in mathematics An essay from a didactical perspective. In: Hanna G., Jahnke H. N., Pulte H. (eds.) *Explanation and Proof in Mathematics* (pp. 115-135). Heidelberg: Springer.

Brito, M. (2016). *Uma Organização Didática em quadrilátero que aproxime o aluno de licenciatura das demonstrações geométricas*. Disertación publicada en el Doctorado de Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo-Brasil.

Coelho (2015). Geometria Analítica no Espaço: Análise das Organizações Matemática e Didática em Materiais Didáticos. Disertación publicada en el Doctorado de

Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo-Brasil.

Duval, R. (2009a) Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em Matemática:** registros de representação semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2009a. p. 11-33.

Duval, R., (2009b). **Semiósis e Pensamento Humano**: Registros Semióticos e Aprendizagens Intelectuais. Coleção Contexto da Ciência. São Paulo: Livraria Editora da Física.

Gutiérrez, A. (2001). Estrategias de investigación cuando los marcos teóricos existentes no son útiles. Actas del 5° Simposio de la SEIEM. Almería.

Lacués, E. M. (2014). Aprendizaje de Sistemas Matemáticos de Símbolos en Álgebra Lineal y Cálculo. *Bolema,* Rio Claro (SP), v. 28, n. 48, p. 299-318.

Lebeau, C. (2009) Etude d'une genèse d'un modèle algébrique du système formé par les points, droites et plans de l'espace usuel. 2009. 390 f. Thèse de doctorat. Université de Liège.

Morales, S. & Samper, C (2015). Dificultades en el aprendizaje de la demostración deductiva formal en geometría euclídea. *Amazonia Investiga*. Florencia, Colombia, Vol. 4 Núm.6. 55-68.

Ordem, J. (2015). *Prova e demonstração em Geometria Plana: concepções de estudantes da licenciatura em ensino de Matemática em Moçambique.* Disertación publicada en el Doctorado de Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo-Brasil.

Saldariaga, C. (2012) *La instauración histórica de la noción de vector como concepto matemático.* Disetación publicada en la maestría de Universidad del Valle facultad de Educación y Pedagogía Programa Académico Maestría en Educación con Énfasis en Educación Matemática. Santiago de Cali. Colombia.

Volver al índice de autores

2.3.9. Uso del Moodle en el aprendizaje del cálculo en la Facultad de Educación

Marta Celinda Ríos Zea
Universidad Nacional del Centro del Perú, Huancayo, Perú

Resumen

Gracias a las nuevas tecnologías de la información se ha dado un importante paso en la evolución y adaptación de la educación a los tiempos que vivimos, a través de entornos diferentes y usos de materiales en forma digitalizada, buscando la participación de los estudiantes de manera no presencial, utilizando diferentes recursos que ofrece internet.En la presente investigación se utilizó la plataforma Moodle en el aprendizaje del Cálculo, para ello se consideró el trabajo con los alumnos de la Escuela Académico Profesional de Ciencias Matemáticas e Informática, esencialmente los del octavo semestre con la asignatura de Cálculo III. Se aplicó una encuesta previa al uso de la plataforma, posteriormente en el desarrollo de las clases se hizo uso de la misma mediante sus diferentes módulos, posterior a su uso se aplicó nuevamente la encuesta

Introducción

Todos los educadores tenemos presente de que la escuela está inmersa en una sociedad concreta y que una de las muchas definiciones que podemos dar de educación es la de Piaget: "*Educar es adaptar el individuo al medio social ambiente*", luego deberíamos empezar por preguntarnos cuál es el medio social ambiente en el que se desarrolla la escuela actual y los avances de la tecnología que existen especialmente en la formación del docente.

Gracias a la plataforma Moodle se ha dado un importante paso en la evolución y adaptación de la educación a los tiempos que vivimos, a través de entornos diferentes y usos de materiales en forma digitalizada, buscando la participación de los estudiantes de manera no presencial, utilizando diferentes recursos que ofrece internet. Todos los avances actuales amplían la capacidad de comunicación, permiten así mismo el uso de técnicas multimedia e interactivas mejorando de esta manera la percepción y adquisición de conocimientos por parte de los estudiantes. Sin embargo, en medios universitarios la utilización de estos recursos es muy limitada, frente a esta situación nos permitimos plantear la siguiente interrogante: ¿Qué efectos produce en el aprendizaje del Cálculo el uso del Moodle?

Con el presente trabajo se pone a prueba la plataforma Moodle, usando las aulas virtuales en el aprendizaje del Cálculo. Sin embargo, dada la naturaleza de la enseñanza en la Universidad Nacional del Centro del Perú, la cual es presencial, la aplicación hará uso de una enseñanza semi virtual. Se pretende detallar las ventajas y desventajas en nuestra experiencia, la percepción de los estudiantes, así como sus preferencias en el aprendizaje del Cálculo.

MATERIALES Y MÉTODOS

Tipo de Investigación

La investigación es de tipo aplicada ya que, según Sánchez, (Sánchez & Reyes, 2006, pág. 37) esta "se caracteriza en la aplicación de los conocimientos teóricos a determinada situación concreta".

Diseño de Investigación

Para efectuar la investigación se hará uso de un diseño pre experimental, según Sánchez (Sánchez & Reyes, 2006, pág. 117): los diseños pre experimentales no tienen la capacidad de controlar adecuadamente los factores que influyen contra la validez interna …y externa", trabajando con una sola muestra la de los estudiantes del VIII semestre, aplicándose el pre test y post test,

M_1: O_1 x O_2

$O_{1:}$ Encuesta tomada antes del uso de la plataforma Moodle.

x: Uso de la plataforma Moodle.

$O_{2:}$ Encuesta aplicada después del uso de la plataforma Moodle

Población y Muestra de Estudio

La población está constituida por estudiantes de la Facultad de Educación y la muestra está constituida por estudiantes del VIII semestres de la Facultad de Educación de la EAP. de Ciencias Matemáticas e Informática.

Técnicas e instrumentos de recolección de datos

La recolección de datos se realizó mediante la aplicación de encuestas antes y después del uso de Moodle utilizándose además fichas de observación y de análisis. Los instrumentos empleados son las fichas de registro y las fichas textuales, de resumen y los planes de estudio.

Procedimiento de recolección de datos

Para recoger la información se realizó la investigación bibliográfica documental.

Se reconoció los elementos de la población constituida por los estudiantes de la carrera profesional de Ciencias Matemáticas e informática, se determinó la muestra conformada por los estudiantes del VIII semestre y se aplicaron los respectivos cuestionarios.

Técnicas de procesamiento y Análisis de datos.

Para el procesamiento de los datos se uso el paquete estadístico SPSS.

Se utilizaron además cuadros y gráficos para las variables cualitativas o de tipo nominal.

IV.- Resultados

Para trabajar en la plataforma Moodle y con aulas virtuales, al no tener aún la Facultad de Educación el dominio público que permita el funcionamiento en forma institucional del aula, se acudió a Moodle Social, que es una plataforma que brinda su dominio en forma gratuita a los usuarios. Hasta el año 2011, los espacios que brindaba eran absolutamente libres de toda propaganda, sin embargo, actualmente si existen anuncios en cada semana de clases programada.

A pesar de lo mencionado anteriormente, se ha logrado la creación del Aula virtual para la asignatura de Cálculo I, se han incluido materiales desde el sílabo de asignatura, prácticas calificadas, encuesta, lecturas para ser comentadas. Así mismo se han propuesto temas para la comunicación interna, para hacer uso del blog, de los foros, del chat, wikis, etc.

A la fecha se viene implementando todo lo necesario para poner en marcha esta primera aula virtual,; además, se piensa colocar estas aulas en el sitio web de la Facultad lo que permitiría un uso libre de anuncios de productos.

Clasificación de estudiantes por sexo

Sexo	N°	%
Masculino	13	65
Femenino	7	35
TOTAL	20	100

En la Escuela Académico profesional de Ciencias Matemáticas e informática, la mayoría de estudiantes (65%) son del sexo masculino, lo que ocurre en una proporción mayor en otros semestres diferentes al octavo

USO DE REDES SOCIALES

Medio	Internet		Facebook		Twiter		Blogs	
Característica	N°	%	N°	%	N°	%	N°	%
Si usa	19	95	15	75	9	45	16	80
No usa	1	5	5	25	11	55	4	20
TOTAL	20	100	20	100	20	100	20	100

USO DE AULAS VIRTUALES (1)

Medio	Base de datos		Chat		Consulta		Cuestionario		Foro		Lección		Scorm	
Descripción	N°	%	N°	%	N°	%	N°	%	N°	%	N°	%	N°	%
Conoce	18	90	19	95	12	60	19	95	15	75	15	75	1	5

No conoce	2	10	1	5	8	40	1	5	5	25	5	25	19	95
TOTAL	20	100	20	100	20	100	20	100	20	100	20	100	20	100

USO DE AULAS VIRTUALES (2)

Medio	Talleres		Wiki		Archivos		Carpetas		Etiquetas		Libros virtuales		Software libre	
Descripción	N°	%	N°	%	N°	%	N°	%	N°	%	N°	%	N°	%
Conoce	19	95	18	90	15	75	19	95	10	50	5	25	9	45
No conoce	1	5	2	10	5	25	1	5	10	50	15	75	11	55
TOTAL	20	100	20	100	20	100	20	100	20	100	20	100	20	100

Luego de aplicar la encuesta, en dos sesiones de clases se explicó a los alumnos sobre cómo diseñar, crear y administrar una plataforma Moodle, Luego se hizo uso de ella en el aprendizaje del cálculo, todos llegaron a elaborar su propia aula virtual y se tomaron en cuenta las ventajas y desventajas a través de la evaluación cualitativa de la plataforma, no llegando a aplicarse encuestas, sino analizando el tema en una sesión de clase.

DISCUSIÓN

La matemática como una ciencia que precisa establecer relaciones entre datos y hechos. Permite así mismo estrategias, las mismas que revisten un aspecto de juego de reglas practicables en dos modos: como aplicación y como descubrimiento.

La matemática como una ciencia cuyo objetivo es el establecimiento de relaciones de muy diversos tipos. Estas relaciones, que implican operaciones formales, tienen lugar entre objetos, reales o no, y se traducen a través de un lenguaje simbólico, que le es propio, a modelos que las generalizan y representan desde los cuales las situaciones de partida se obtienen por particularización. Estamos interesados en estudiar cómo se construyen desde el punto de vista cognoscitivo y de qué manera los recursos tecnológicos ayudan o dificultan el aprendizaje específicamente del Cálculo en la Facultad de Educación de la Universidad Nacional del Centro del Perú.

De lo aplicado concordamos con Carmen Padrón (Padrón, 2009) en que se hace necesario describir y evaluar los componentes de un material o recurso didáctico y considerar los requisitos para que sea efectivo en un proceso, debiendo servir de guía a las diferentes etapas del desarrollo.

Discrepamos un tanto con Miguel Mora (Mora, 2006), en cuanto a la facilidad de la creación de material didáctico porque consideramos que se requieren saberes previos respecto a las tecnologías de la información para poder hacer uso de ellas.

Recogemos de José María Sordo, (Sordo, 2017) , la opción de un uso más cómodo que el lápiz y papel respecto a cierto programa, sin embargo ello mismo limita el desarrollo de la habilidad de graficar del estudiante, concordando en que puede ser una herramienta complementaria, considerando además que sus logros están basados en el trabajo con una pequeña cantidad de estudiantes.

Cujó (2003) destaca, al igual que en nuestra investigación la necesidad de incluir el uso de las nuevas tecnologías en nuestro proceso de enseñanza aprendizaje.

Vicente Bustillo, (Bustillo, 2002), nos hace notar la necesidad de replantear las metas y naturaleza de la investigación, considerando al igual que nosotros y otros investigadores el uso de las TIC como un apoyo al proceso educativo, buscándose una implantación progresiva de los mismos.

Margarita Marín, (Marín, 2001), coincide en que debemos cambiar la forma de enseñar, haciéndose necesaria la alfabetización digital, puesto que la mera introducción de la herramienta tecnológica, no garantiza la efectividad de los aprendizajes, facilitándose la educación personalizada y potenciando el autoaprendizaje.

CONCLUSIONES

La plataforma Moodle es una herramienta muy versátil para el aprendizaje del Cálculo en la Facultad de Educación, resultando el uso de la plataforma en sí y la creación del aula virtual de conocimiento y aplicación de todos los alumnos.

Existen dificultades para presentar mediante la plataforma, y en general mediante la digitalización la resolución de ejercicios y problemas con su correspondiente procedimiento.

Se observa mayor motivación por parte de los alumnos en el uso de las nuevas tecnologías de la información.

Para usar el aula virtual, es necesario que los estudiantes tengan acceso permanente a internet así como saberes previos para poder disponer de su tiempo en el aprendizaje.

Referencias

Bustillo, V. (2002). *Integración educativa de las NNTT en la sociedad de la información: Influencia del proyectro ATENEA en la educación obligatoria en Palencia.* Madrid: Universidad complutense de Madrid.

Cujó, J. (2003). *Un modelo de enseñanza aprendizaje de los conceptos de límites de sucesiones, límites de fubciones y derivadas a través del MAPLE (libro electrónico interactivo.* Madrid.: Universidad Complutense de Madrid.

Marín, M. (2001). *Estudio de los ambientes de enseñanza aprendizaje generado en redes de ordenadores.* Madrid: Universidad complutense de Madrid.

Mora, M. (2006). *Generqación de recursos interactivos y análisis colaborativo del proceso de aprendizaje.* Madrid: Universidad Autónoma de Madrid.

Padrón, C. (2009). *Desarrollo de materiales didácticos desde una perspectiva basada en modelos.* Madrid: Universidad Carlos III.

Sánchez, H., & Reyes, C. (2006). *Metodología de la investigación científica.* Lima.: Visión Universitaria.

Sordo, J. M. (21 de Febrero de 2017). *Biblioteca Universidad Complutense de Madrid*. Obtenido de http://biblioteca.ucm.es/tesis/edu/ucm-t28911.pdf

Volver al índice de autores

2.3.10. Una experiencia de aprendizaje cooperativo con el uso de dispositivos móviles en la asignatura de Cálculo I para estudiantes de ingeniería

Marco Antonio Tamariz Milla
Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas, Lima, Perú

Resumen

El trabajo tiene como objetivo compartir una experiencia de aprendizaje con el uso de dispositivos móviles en la asignatura Cálculo I que se dicta a todos los estudiantes de las carreras de ingeniería de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas (UPC). El curso es de carácter teórico práctico y está en la modalidad blended. Esta experiencia tuvo como objetivo que el estudiante analice razones de cambio relacionadas con ayuda de apletts dinámicos en dispositivos móviles, apropiándose del proceso y expresando sus resultados adecuadamente mediante símbolos matemáticos, ordenando y relacionando ideas para llegar a conclusiones relevantes

Razones de cambio, dispositivos móviles, Applet

En el curso de Cálculo I se aborda el cálculo diferencial e integral. Un concepto fundamental aquí es la derivada y dentro de sus aplicaciones están las tasas relacionadas, con los recursos tradicionales de uso de pizarra y apuntes el estudiante no capta la naturaleza dinámica de este tipo de problemas. Al respecto Artigue, Douady, Moreno (1995) dicen que se puede llegar a enseñar a los estudiantes a realizar operaciones mecánicas de cálculo de derivadas y primitivas y a resolver algunos problemas estándar, pero se encuentran grandes dificultades para que los estudiantes comprendan conceptos y procesos del cálculo. Es así que particularmente en el curso de Cálculo I históricamente se ha encontrado que los estudiantes tienen un bajo rendimiento en el tema razones de cambio relacionadas, por lo que se vio la necesidad de crear una metodología que permita a los estudiantes captar la naturaleza dinámica de los problemas de este tema identificando las magnitudes que son variables, magnitudes que son constantes y razones de cambio en los problemas del tema. Para este fin se elaboraron applets dinámicos elaborados con Geobebra de distintos problemas de razones de cambio; donde se vea la naturaleza dinámica de estos problemas.

La línea de matemática de las carreras de ingeniería del Área de Ciencias de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas (UPC) se propuso implementar en el ciclo 2016 – 2, dos

actividades de aprendizajes con el uso de Dispositivos Móviles (DM) que contribuyan a alcanzar habilidades matemáticas básicas utilizando el IPad y otros similares de forma experimental y que consideren los logros que alcanzan los estudiantes con estas actividades de aprendizajes alineados a los logros del curso y tengan en cuenta aspectos como, la motivación, fácil implementación, que no requiera una herramienta específica, que sea aplicable en varias secciones y estén alineadas a la propuesta de la UPC considera para este año académico. Es así que se conjugaron el Ipad que permitió potencializar el uso interactivo de los Applet.

Los dispositivos móviles son llevados consigo por sus usuarios durante todo el día, y ofrecen grandes posibilidades de adaptación a sus necesidades individuales por su portabilidad y manejo inductivo; por ejemplo, algunas aplicaciones móviles permiten seleccionar textos fácilmente o facilitan cierto trabajo de lectura en función a las competencias y conocimientos de cada usuario. Las computadoras también ofrecen algunas de estas herramientas, pero los educandos no pueden trasladarlas fácilmente a sus centros de aprendizaje, ni viceversa y además de sus altos costos, aun cuando estuviera disponible en las aulas de informática del centro de aprendizaje no es realmente personal. Al ser las tecnologías móviles fáciles de transportar y relativamente baratas, han ampliado enormemente las posibilidades y la viabilidad del aprendizaje personalizado (Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura [UNESCO], 2013).

Dentro de las directrices para las políticas de aprendizaje móvil en UNESCO (2013) se plantea incentivar la creación de contenidos específicos para móviles en los programas de estudio; es decir aperturar espacios donde el estudiante pueda usar los dispositivos móviles con un fin educativo y así usar las potencialidades de estas herramientas para conseguir un aprendizaje significativo.

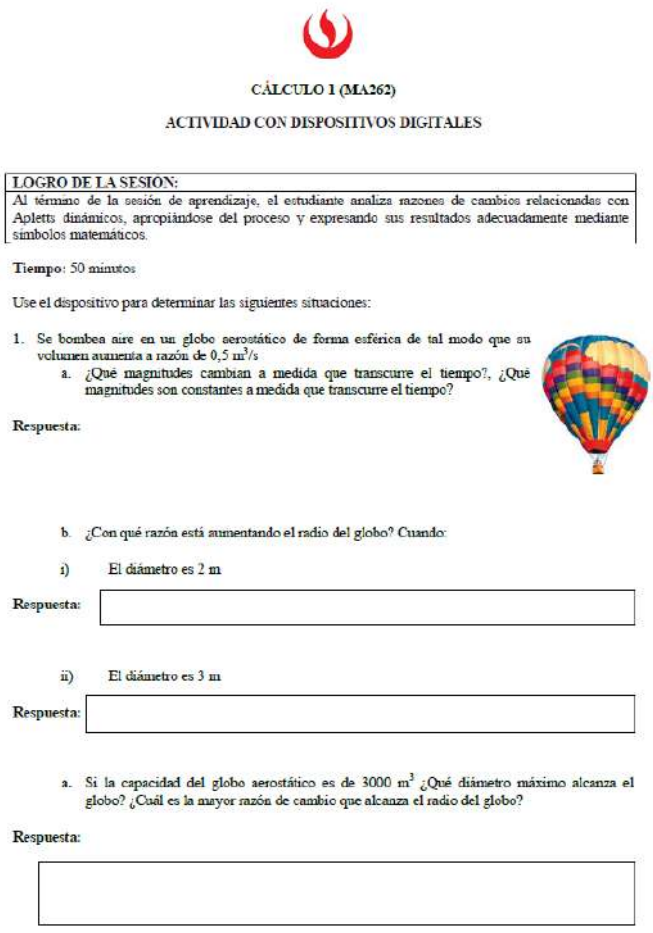
La experiencia:

En este trabajo se presenta una experiencia de aprendizaje cooperativo con DM en la asignatura de Cálculo I, que se dicta a todos los estudiantes de las carreras de ingeniería, es de carácter teórico práctico y está en la modalidad blended. Para esto se diseñó un material impreso de trabajo que los estudiantes debían trabajarlo cooperativamente formando grupos de cuatro integrantes en la clase (figura 1). La secuencia de aprendizaje de la actividad sigue los pasos para resolver un problema de Polya (1965) que son entender el problema, configurar el plan, ejecutar el plan y examinar la solución. El objetivo planteado

de la experiencia fue que el estudiante analice razones de cambios relacionadas. El material consistía de tres preguntas tomadas de Stewart (2010) de razones de cambio relacionadas (figura 2). Benito y Cruz (2005) respecto al aprendizaje cooperativo indican que es un método que utiliza el trabajo conjunto de pequeños grupos de estudiantes para maximizar el aprendizaje; además, añade que en este método el estudiante no solo se preocupa de su aprendizaje sino también del de sus compañeros. Podemos decir que el aprendizaje cooperativo permite homogenizar los aprendizajes; es por ello que para la experiencia se optó por esta metodología. La experiencia se aplicó a 49 secciones del curso con un total de 1821 alumnos y la metodología aplicada para la investigación es exploratoria y descriptiva.



Figura 1: Estudiantes trabajando la actividad



CÁLCULO 1 (MA262)

ACTIVIDAD CON DISPOSITIVOS DIGITALES

LOGRO DE LA SESIÓN:

Al término de la sesión de aprendizaje, el estudiante analiza razones de cambios relacionadas con Apletts dinámicos, apropiándose del proceso y expresando sus resultados adecuadamente mediante símbolos matemáticos.

Tiempo: 50 minutos

Use el dispositivo para determinar las siguientes situaciones:

1. Se bombea aire en un globo aerostático de forma esférica de tal modo que su volumen aumenta a razón de 0,5 m^3/s
   a. ¿Qué magnitudes cambian a medida que transcurre el tiempo?, ¿Qué magnitudes son constantes a medida que transcurre el tiempo?

Respuesta:

b. ¿Con qué razón está aumentando el radio del globo? Cuando:

i) El diámetro es 2 m

Respuesta:

ii) El diámetro es 3 m

Respuesta:

a. Si la capacidad del globo aerostático es de 3000 m^3 ¿Qué diámetro máximo alcanza el globo? ¿Cuál es la mayor razón de cambio que alcanza el radio del globo?

Respuesta:

Figura 2: Material impreso elaborado para la experiencia

El material diseñado estuvo complementado con applets hechos con Geogebra para cada problema (figura 3), donde el estudiante disponía del planteamiento gráfico de cada problema de tal forma que podía manipular la figura y ver las magnitudes variables, constantes y razones de cambio del problema. Así después de poder plantear una ecuación que relacione las variables y constantes, derivarla con respecto a la variable independiente, reemplazar sus datos y encontrar la incógnita. Finalmente, al concluir con el desarrollo del material cada estudiante rindió una evaluación en línea para medir el nivel del logro que se buscaba con esta experiencia. Esta evaluación en línea consistía en tres preguntas que buscan medir, de manera progresiva, que el alumno haya llegado al nivel más alto del objetivo de la experiencia.

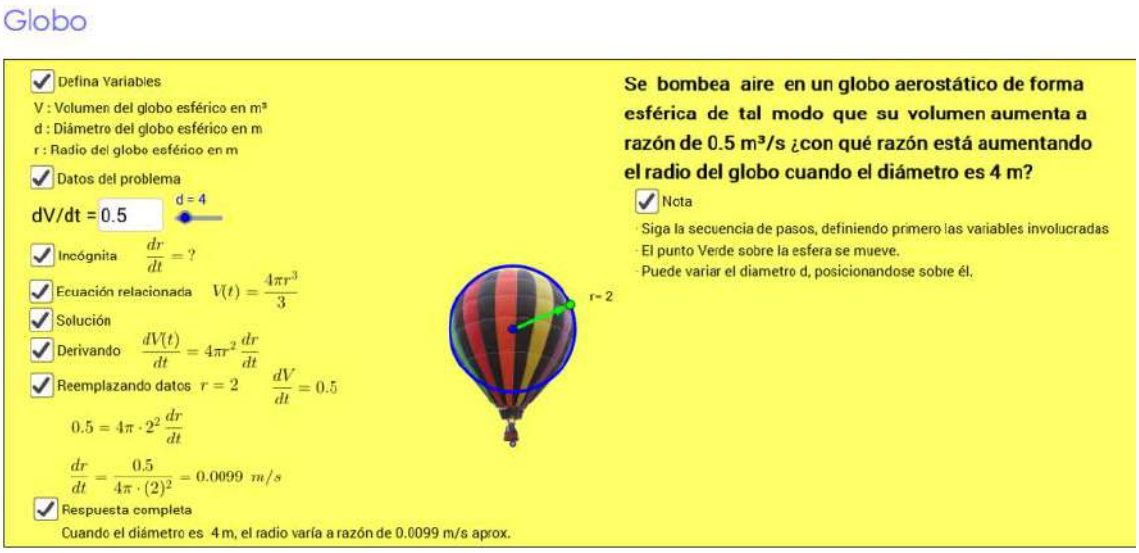


Figura 3: Aplett creado con Geogebra

Conclusiones:

Las principales conclusiones de la experiencia son:

- La motivación y predisposición de los estudiantes fue muy positiva, el trabajo en equipo y el uso de los diferentes DM y las tablets fue muy bien aprovechado según lo experimentado en sus clases por cada uno los profesores del curso.

- La motivación y percepción de los docentes por la aplicación de la experiencia fue muy positiva.

- Los resultados de la evaluación a través de un formulario de Google indican que más de un 80% de los estudiantes alcanzaron el objetivo de la actividad.

- En el análisis de factibilidad que se hizo, se recogieron seis recomendaciones, que serán levantadas y tomadas en cuenta para próximas actividades.

- Los objetivos de la actividad están totalmente alineados con los del curso y los resultados de la evaluación son muy alentadores.

Referencias

Artigue M., Douady R., Moreno L. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamericana S. A

Benito, A., Cruz, A. (2005). *Nuevas claves para Docencia Universitaria en el Espacio Europeo de Educación Superior*. España: Narcea S. A.

Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (2013). *Directrices para las políticas de aprendizaje móvil*. Francia: Autor. Recuperado de http://unesdoc.unesco.org/images/0021/002196/219662S.pdf.

Polya G. (1965). *Como plantear y resolver problemas*. México: Editorial Trillas S. A.

Stewart, J. (2010). *Calculo: Conceptos y Contextos*. México: Cengage Learning.

Volver al índice de autores

2.3.11. Construcción del concepto de estimación de parámetros a través de simulación con software R

Félix Amadeo Canales Conce
Ubaldo Cayllahua Yarasca
Universidad Nacional de Huancavelica, Huancavelica, Perú

Resumen

Esta experiencia se realizó en la asignatura de estadística inferencial con estudiantes del VII ciclo del programa de estudios de Matemática, Computación e Informática de la Escuela Profesional de Educación Secundaria de la Facultad de Educación de la Universidad Nacional de Huancavelica, con el propósito de construir y comprender la estimación de parámetros por el método de estimación puntual empleando la simulación como recurso didáctico mediado con el software R. Para este efecto, previamente se hizo la consideración del contexto de trabajo, luego se diseñó las actividades de simulación para el objeto estadístico y finalmente la ejecución de las secuencias didácticas y su evaluación. La mayoría de los estudiantes lograron comprender que la estimación de parámetros, es obtener información sobre una población, para el cual no se requiere estudiar a todos y cada uno de los individuos de la población, sino es suficiente aplicar técnicas de muestreo y hacer la generalización del análisis realizado. El uso de la simulación como recurso didáctico mediado con el software R, facilita la construcción y comprensión del concepto y sus propiedades de estimación de parámetros por el método de estimación puntual.

Introducción

El objetivo principal de la estadística inferencial es la *estimación* de los parámetros de una población de estudio. Para calcular necesitaríamos tener todos los posibles valores de la población, lo cual no suele ser posible en la realidad. No obstante, la estadística emplea la teoría de muestreo para obtener una muestra aleatoria de esta población y calcular los valores estadísticos y generalizar esta información a la población; es decir, la estimación son valores estadísticos calculados a partir de lo observado en una muestra, las que se generalizan dicho resultado muestral a la población total, de modo que lo estimado es el valor generalizado a la población. La notación general para un parámetro poblacional es θ y para un estadístico de la muestra es $\hat{\Theta}$.

Existen dos formas de estimar parámetros, la estimación puntual y la estimación por intervalo de confianza. En la primera se busca, con base en los datos muestrales, un único valor estimado para el parámetro. Para la segunda, se determina un intervalo dentro del cual se encuentra el valor del parámetro, con una probabilidad determinada.

Para esta experiencia didáctica se ha considerado la estimación de parámetros a través de la estimación puntual, cuyas propiedades fundamentales (Walpole, Myers y Myers, 1999), son las siguientes:

a) Insesgamiento. Significa que su media o valor esperado coincide con el parámetro poblacional.

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

La diferencia entre el valor esperado del estimador de un parámetro y el parámetro a estimar se llama sesgo del estimador que se escribe como:

$$Sesgo(\hat{\Theta}) = E(\hat{\Theta}) - \theta$$

Cuando el sesgo del estimador es positivo, este tenderá a sobrestimar el valor del parámetro, mientras si el sesgo es negativo, el estimador tenderá a infravalorar. Finalmente, si el sesgo es cero, el estimador es insesgado.

b) Eficiencia. Dos estimadores $\hat{\Theta}_1$ y $\hat{\Theta}_2$ de una parámetro poblacional obtenidos de la misma muestra, el estimador $\hat{\Theta}_1$ será más eficiente que el estimador $\hat{\Theta}_2$ si:

$$Var(\hat{\Theta}_1) < Var(\hat{\Theta}_2)$$

Esta propiedad emplea dos o más estimadores para comparar las varianzas y determinar como el estimador más eficiente aquel que tenga menor variabilidad.

Las propiedades de insesgamiento y eficiencia, son independientes del tamaño muestral. Sin embargo, el tamaño muestral influye en la precisión del estimador.

c) Consistencia. Es cuando el valor del estimador puntual tiende a estar más cerca del parámetro poblacional a medida que el tamaño de la muestra aumenta.

$$\lim_{n\to\infty} P(\left|\hat{\theta} - \theta\right| > \varepsilon) = 0$$

En otras palabras, una muestra grande tiende a proporcionar mejor estimación puntual que una pequeña.

La simulación a través del software R

El diccionario de la Real Academia Española (1992, p. 1883), define la simulación como una acción de simular, que significa representar una cosa, fingiendo o imitando lo que no es. Shannon y Johannes (1976), citado en Wikipedia, enciclopedia libre, la simulación se define, como el proceso de diseñar un modelo de un sistema real y llevar a término experiencias con él, con la finalidad de comprender el comportamiento del sistema o evaluar nuevas estrategias (…) para el funcionamiento del sistema (párr. 2). Es decir, la simulación debe entenderse como la reproducción o representación simplificada de un fenómeno real mediante un modelo más sencillo y más adecuado para ser estudiado, a fin de obtener de ella algunas propiedades o características de su funcionamiento.

La modelación de algún fenómeno, puede realizarse por sistemas físicos, matemáticos o computacionales. Girard (1997, citado en Batanero, 2003), menciona que "al trabajar mediante simulación estamos ya modelizando, porque debemos no solo simplificar la realidad, sino fijar los aspectos de la misma, que queremos simular y especificar unas hipótesis matemáticas sobre el fenómeno estudiado" (p. 45). Esta referencia permite considerar que la simulación es un instrumento de modelización de fenómenos aleatorios dentro de la estadística y probabilidades.

Para este estudio se considera la simulación como una herramienta para el proceso de enseñanza y aprendizaje de la estadística. Katz y Medina (2010), nos indica que "la simulación no constituye solamente un medio propicio para obtener respuestas aproximadas a una variedad de problemas. También es un recurso didáctico para facilitar la comprensión de algunas propiedades que resultan complejas por el nivel de abstracción que requieren".

Elousa, López, Artamendi, Yenes y Mujica (2013), concuerdan con esta posición de recurso didáctico, además refieren que el uso de la simulación en la enseñanza del análisis de datos y de la psicometría, debe realizarse con apoyo de Tecnologías de Información y Comunicación, herramienta fundamental en el proceso de enseñanza de las probabilidades.

Desde estas consideraciones cobra sentido considerar a la simulación además de ser un modelo que representa la realidad, una herramienta de apoyo para la enseñanza del docente y para el aprendizaje del estudiante de objetos estadísticos que tienen alto grado de abstracción, empleando ordenadores y software. Asimismo, facilita acercamientos formales en la enseñanza y a la vez permite generar datos y contextos a modo de experimentos controlados por el propio estudiante de acuerdo a su requerimiento.

El software R, de acuerdo a Paradis (2002), es un lenguaje orientado a objetos, con una simplicidad y flexibilidad en su programación. Es un lenguaje interpretado (como Java) y no compilado (como C, C++, Fortran, Pascal, ...), lo cual significa que los comandos escritos en el teclado son ejecutados directamente sin necesidad de construir ejecutables. Su sintaxis es muy simple e intuitiva, el cual hace que un principiante adquiera las nociones básicas de programación y avanzar progresivamente.

Este software tiene la potencialidad por su funcionalidad al brindar dos posibilidades: de programación a través de una sintaxis computacional y por el uso de sus funciones propias de manera directa de la librería base y paquetes especializados, en vista que es un programa basado en comandos. Por el aspecto pedagógico, es un recurso didáctico de excelente mediación en el proceso de construcción de aprendizaje de objetos estadísticos.

La simulación de cualquier objeto o fenómeno empleando como recurso software R, se realiza a través de un conjunto de funciones que componen un paquete implementado, por ejemplo la función *tosscoin* del paquete de probabilidades (*prob*) permite la simulación del lanzamiento de monedas; también pueden ser funciones elaboradas o creadas por el propio usuario de acuerdo a las necesidades, las que realizan tareas que no estaban definidas en el paquete base u otro, el cual es una característica de la potencialidad y comodidad del software R (Elosua, 2011; Jay Kerns, 2013).

En esta experiencia, se hizo uso las funciones de la librería base y la función *sample* del paquete de probabilidades, que permite tomar una muestra aleatoria simple de tamaño *n* a partir de un vector de valores con o sin reemplazamiento. Su sintaxis es *sample (x, size, replace=TRUE, prob=NULLL)*. Donde *x* es un vector de datos de tipo integer (números enteros) o character (cadena de caracteres) del cual se eligen aleatoriamente los elementos, *size* es un entero positivo que indica el número de elementos que se quieren elegir, *replace=FALSE* es un valor lógico que indica que el muestreo se hace sin reemplazamiento, mientras que *replace=TRUE* indica con reemplazamiento. Por último, *prob* es un vector

de probabilidades en el que cada elemento será la probabilidad con la que se elegirá el elemento que corresponde del vector *x* que va a ser muestreado (Jay Kerns, 2013).

Las ventajas fundamentales de este software R, tanto para el usuario particular como para las empresas o universidades, es la completa gratuidad, que es libre y de código abierto. Este hecho es clave especialmente en entornos universitarios (donde cada vez su penetración es mayor), dado que es un software que, aparte del ahorro económico, permite evitar la dependencia por parte del estudiante de lugares físicos, como centros de cómputo, para poder realizar sus tareas y prácticas académicas. Otra ventaja es una herramienta de análisis estadístico permanentemente actualizada gracias a la contribución de una comunidad de desarrolladores a nivel mundial, mediante la incorporación de las últimas técnicas estadísticas a través de la creación de librerías, o pequeños programas que se pueden instalar dentro del entorno (Méndez, 2018).

Metodología

Contexto de trabajo. La experiencia se ha realizado en la asignatura de estadística inferencial con un grupo de 12 estudiantes del VII ciclo del programa de estudios de Matemática, Computación e Informática de la Escuela Profesional de Educación Secundaria de la Facultad de Educación de la Universidad Nacional de Huancavelica, quienes previamente han llevado la asignatura de estadística descriptiva como prerrequisito para estadística inferencial y los mismos que cuentan con saberes previos de uso de software de entorno gráfico y de programación que es software R.

Planificación de medios. Previo al desarrollo de la sesión de aprendizaje, se hace llegar a través del aula virtual el código de comandos escrito en lenguaje R y el resumen del tema de la clase, a fin de que se revise los propósitos que tiene cada uno de las actividades y cuáles serán los elementos de entrada y salida respectivamente en cada actividad.

Ejecución de actividades y evaluación. El tiempo de desarrollo de la sesión de aprendizaje fue de tres horas. Planteado la situación problemática, los estudiantes trabajan en grupos de dos ejecutando los códigos y analizando los resultados para diferentes valores y condiciones en cada actividad, luego intercambian resultados y formalizan en un lenguaje verbal los resultados. La evaluación se realiza durante el proceso de desarrollo de las actividades en base a una lista de cotejo.

Resultados

Se presenta por cada uno de las actividades de simulación desarrolladas en la experiencia.

Actividad 1. Definición de una población de datos

Con el código en R (anexo), se genera una población de datos sobre el peso de 1000 estudiantes, que se encuentran entre 40 y 80 kilogramos. En referencia a esta información se grafica el histograma y se hace el cálculo de algunos valores de los parámetros de la población, por ejemplo, la media poblacional, como se ve en la siguiente figura.

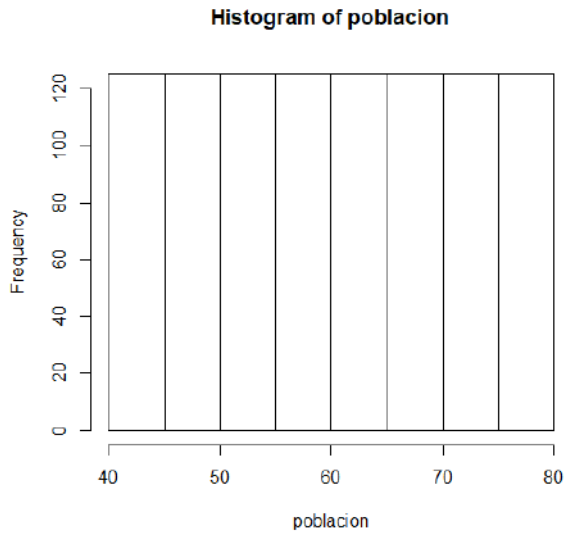


Figura 1. Distribución de los datos de la población.

De esta actividad, se evidencia que la totalidad de los estudiantes lograron identificar la forma de la distribución que tienen los datos de la población, como una distribución uniforme, observando que los datos no tienen una tendencia a concentrarse alrededor de la media poblacional de 60 kilogramos.

Actividad 2. Obtención de muestras aleatorias de diferentes tamaños con y sin reemplazo

Con esta actividad se realiza la simulación de sacar muestras aleatorias de cualquier tamaño con reemplazo o sin reemplazo y analizar la representación que hacen a toda la población.

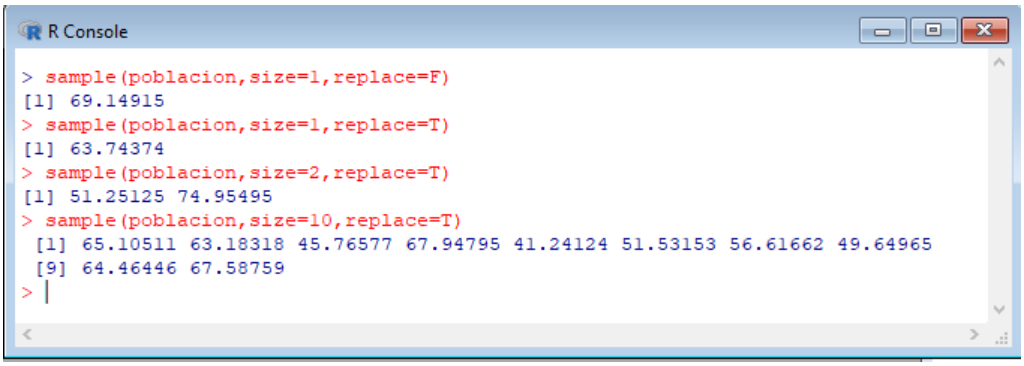


Figura 2. Extracción de muestras con y sin reemplazo.

Los resultados nos evidencian que la mayoría de los estudiantes diferencia entre una muestra con y sin reemplazo, haciendo una analogía con bolas numeradas en una urna; indicando que en una muestra sin reemplazo nunca un individuo puede salir dos veces. Respecto a la representación que hace una muestra a toda la información de la población, solo algunos de los estudiantes logran explicar que muestras pequeñas no hacen una buena representación a toda la información de la población.

Actividad 3. Representación del histograma y el valor del estimador

Se realiza la simulación de sacar muestras aleatorias de cualquier tamaño con reemplazo, luego representar la distribución de la muestra y del valor de la estadística (círculo rojo).

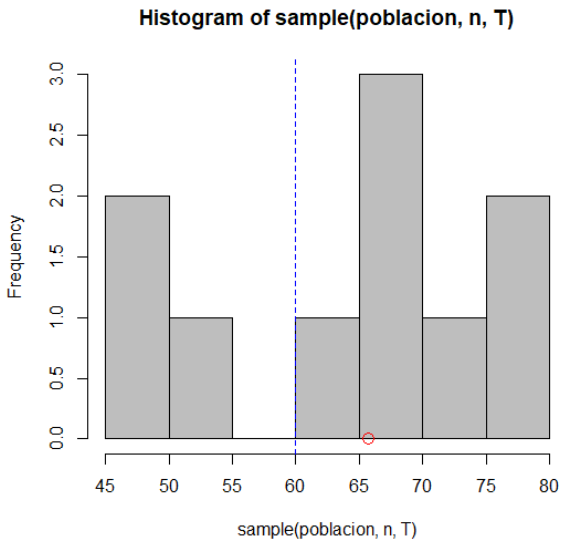


Figura 3. Distribución de los datos de una muestra y representación del valor del estimador con respecto al parámetro.

Todos los estudiantes reconocen que el histograma es la distribución de la muestra y el círculo rojo es la que representa al valor del estimador. Pero no todos evidencian que lo normal es que sea muy raro que se aleje muchísimo del parámetro, y lo más frecuente es que se obtengan valores más o menos cercanos a la verdadera media de la población.

Actividad 4. Representación de la distribución y del estimador para diferentes tamaños de muestra

Se realiza la simulación de extraer muestras aleatorias de cualquier tamaño con reemplazo, cuyas representaciones se presentan en la siguiente figura.

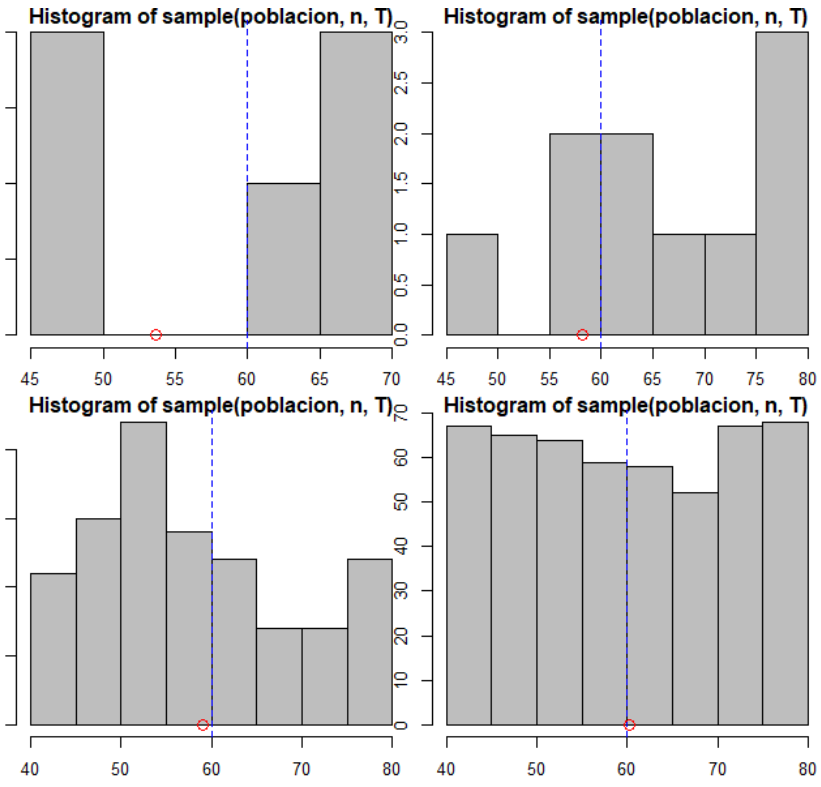


Figura 4. Distribución de una muestra de tamaño 5, 10, 100 y 500, y representación del valor del estimador respecto al parámetro de 60.

A partir de la figura, la mayoría de los estudiantes reconocen que a mayor tamaño de la muestra la distribución muestral tiende a tomar la forma de la distribución poblacional que una distribución uniforme. De igual manera, los valores de los estimadores también tienden a ser igual al valor del parámetro a medida que el tamaño de la muestra se hace grande.

Conclusiones

La experiencia didáctica con estudiantes de matemática, ha permitido arribar a las siguientes conclusiones:

- El uso de la simulación como recurso didáctico mediado con el software R, permitió en los estudiantes realizar la construcción y comprensión del concepto de estimación de parámetros poblacionales por el método de estimación puntual, así como de sus propiedades fundamentales que deben tener un buen estimador puntual.

- Los estudiantes muestran interés para investigar y desarrollar modelación y simulación con software R en otros temas de la estadística y probabilidades para procesos de enseñanza y aprendizaje en los diferentes niveles educativos.

- Fue una oportunidad en los estudiantes para fortalecer sus conocimientos y habilidades de programación utilizando códigos del software R.

Referencias

Batanero, C. (2003). La simulación como instrumento de modelización en probabilidad. *Revista Educación y Pedagogía*, 35(15), 37-54.

Elousa, P. (2011). *Introducción al entorno R*. Bilbao: Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea.

Elousa, P., López, A., Artamendi, J., Yenes, F. y Mujika, J. (2013). Simulación con R y aprendizaje cooperativo: dos niveles de innovación educativa en la enseñanza/aprendizaje de conceptos cuantitativos en las ciencias sociales. En *Educar para transformar, X Jornadas Internacionales de Innovación Universitaria* (pp. 904-910). Universidad Europea: Facultad de Psicología. Recuperado de http://www.ehu.es/gip/publicaciones/articulos/2013/4.pdf

Jay Kerns, G. (2013). *Elementary probability and the prob package*. http://127.0.0.1:24148/library/prob/html/prob.html. Consultado 17/03/15.

Katz, R. D., y Medina, M. A. (2010). La simulación: un recurso didáctico para facilitar el aprendizaje de la Probabilidad y la estadística. Presentado en la *III Jornadas de experiencias Innovadas en educación en la FCEIA*, Universidad Nacional del Rosario: EPEC-FCEIA. Recuperado de http://www.fceia.unr.edu.ar/fceia/3jexpinnov/

Méndez, M. (2018). *Análisis de datos con R: una aplicación a la investigación de mercados*. Madrid, España: ESIC.

Paradis, E. (2002). *R para principiantes.* France: Institut des Sciences de l'Évolution Universit Montpellier II.

Real Academia Española (1992). *Diccionario de la lengua española*. Tomo II, (21ª ed.). Madrid España: Espasa Calpe, S. A.

Shannon, R. y Johannes, J. D. (1976). Systems simulation: the art and science. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 6(10), pp. 723-724. Recuperado de http://es.wikipedia.org/wiki/Simulaci%C3%B3n

Walpole, R., Myers, R. y Myers, S. (1999). *Probabilidad y estadística para ingenieros,* (6ª ed.). Mexico: Prentice Hall, Hispanoamericana, S.A.

Volver al índice de autores

ANEXO

CÓDIGOS EN SOFTWARE R

```
##############################################################################
# Actividad 1: Generar una población de 1000 personas cuyos pesos varíen
# entre 40 y 80 kilogramos.
##############################################################################
poblacion <- seq(40, 80, length=1000)
poblacion
hist(poblacion)
mean(poblacion)
median(poblacion)
##############################################################################
# Actividad 2: Extraer de la población una muestra aleatoria de tamaño "n"
# con reemplazo.
##############################################################################
sample(poblacion, size=1, replace=T)
sample(poblacion, size=2, replace=T)
sample(poblacion, size=2, replace=T)
# Para una muestra de tamaño 10, calcular la media y graficar histograma.
muestra1=sample(poblacion, size=10, replace=T)
muestra1
mean(muestra1)
hist(muestra1, col=8)
##############################################################################
```

```
# Actividad 3: Función para sacar una muestra de tamaño "n" de la población,
# luego representar su histograma y la media.
#############################################################################
dibujaMuestra <- function(poblacion, n){
        poblacion.media <- mean(poblacion)
        muestra.media <- mean(sample(poblacion, n, T))
        hist(sample(poblacion, n, T), col="gray")
        abline(v=poblacion.media,col="blue", lty=2)
        points(muestra.media, 0, col ="red", bg="black", cex=1.5)
        print(muestra.media)
        }
dibujaMuestra(poblacion, 20)
# Sacar 6 muestras para diferentes tamaños
par(mfrow=c(3, 2), mai=c(0.4, 0.1, 0.1, 0.1))
dibujaMuestra(poblacion, 5)
dibujaMuestra(poblacion, 10)
dibujaMuestra(poblacion, 50)
dibujaMuestra(poblacion, 100)
dibujaMuestra(poblacion, 500)
dibujaMuestra(poblacion, 800)
# Sacar cuatro muestras de tamaño 20 de la población y representar histograma
par(mfrow=c(2, 2), mai=c(0.5, 0.1, 0.1, 0.1))
for(i in 1:4) {dibujaMuestra(poblacion, 20)}
```

2.3.12. Aplicación del software geogebra para el aprendizaje de la función cuadrática

Franklin Surichaqui Gutiérrez
Mercedes Surichaqui Gutiérrez
Universidad Nacional de Huancavelica, Huancavelica, Perú

Resumen

El propósito del trabajo de investigación fue analizar la Influencia del uso de software Geogebra en el aprendizaje de la función cuadrática en los estudiantes del primer ciclo académico 2017-I de la Escuela Profesional de Ingeniería Informática de la Universidad para el Desarrollo Andino. Se usó la técnica de la encuesta con una Iista de preguntas de opción múltiple, "Pre Prueba" y "Post Prueba" en cada etapa del proceso, determinando el efecto de la aplicación del Software Geogebra. Se consideró un solo grupo de investigación. Se analizó si poseían conocimiento conceptual y procedimental relacionados con la resolución de problemas sobre función cuadrática; esto es, graficar una función cuadrática, representar la función a partir de una gráfica, actividades ante la que otros grupos similares habían evidenciado dificultades.

Introducción

En la presente investigación se usó la encuesta con una Iista de preguntas de opción múltiple, "Pre Prueba" y "Post Prueba" en cada etapa del proceso, determinando el efecto de la aplicación del software Geogebra en el aprendizaje conceptual y procedimental de la función cuadrática en los estudiantes del primer ciclo académico 2017- I de la Escuela Profesional de Ingeniería Informática de la Universidad para el Desarrollo Andino.

Instrumentos empleados

Los instrumentos que se usaron en el presente trabajo de investigación fueron:

1. El instrumento de evaluación de la prueba escrita: fue sometido a una evaluación de juicio de expertos para su validación.

   La validez externa del instrumento, es el grado en que los instrumentos miden las variables de estudio, se efectuó, en principio, mediante Juicio de Expertos, para lo cual se seleccionó a Magister en la especialidad de Matemática y Física. A los

referidos expertos se les proporcionó, la pre y post prueba, donde una vez evaluados los instrumentos por ellos emitieron sus resultados de evaluación para la aplicación del instrumento de la pre y post test, como vemos en la tabla Nº 1

Tabla N°1

Juicio de expertos

	Prueba de pre y post test	
Expertos	**Puntaje**	**Porcentaje**
Mg. CAYLLAHUA YARASCA, UBALDO	80	80%
Mg. QUILCA CASTRO, ALEJANDRO RODRIGO	85	85%
Mg. CANALES CONCE, FELIX AMADEO	80	80%
	81.6666667	81.66666667 %

Fuente elaboración propia del investigador.

Estos resultados se relacionaron al siguiente cuadro de valoración de coeficientes de validez instrumental canónico, registrado en Briones (2002):

Tabla N° 2

validez instrumental por Briones (2002)

Coeficiente	**Nivel de medición**
81 - 100	Excelente
61 - 80	Muy bueno
41 - 60	Bueno
21 - 40	Regular
00 - 20	deficiente

Fuente: Briones (2002)

De la relación anterior hallamos que, dado el juicio de los expertos, que alcanza un promedio de 81.66666667 % para la prueba estandarizada, el nivel de validez en que se ubica este instrumento es el de excelente, lo que se interpreta como de muy

alta la validez y se concluye que los cuestionarios de los conocimientos conceptuales, procedimentales son fiables.

2. Prueba de diagnóstico sobre el contenido conceptual y procedimental de las funciones cuadráticas se usó el instrumento de evaluación de una prueba escrita para ver el nivel de conocimiento conceptual y procedimental de los estudiantes respecto al tema de función cuadrática

3. Uso del software Geogebra: se realizó inducción del uso y aplicación del software matemático Geogebra aplicando conceptos y procedimientos de la función cuadrática.

4. Finalmente se realizó la Post Prueba usando el instrumento de evaluación de una prueba escrita de contenido conceptual y procedimental sobre el aprendizaje de la función cuadrática.

5. Se usó el software estadístico SPSS versión 23 para realizar la comparación de aprendizaje del antes y después con el instrumento de evaluación de las pruebas escritas realizadas.

6. Además, para determinar la normalidad se usó la prueba de Kolmogorov - Smirnov y para el contraste de la hipótesis se usó el estadístico de la prueba t de Student.

Para verificar si la aplicación del software Geogebra influye positivamente en el aprendizaje de función Cuadrática en los estudiantes del primer ciclo académico 2017- I de la Escuela Profesional de Ingeniería Informática de la Universidad para el Desarrollo Andino, se ha usado el promedio de notas del grupo que se ha experimentado después de culminada todas las sesiones de clases, en donde se hizo la contratación de las hipótesis específicas mediante Ia prueba paramétrica de t de Student de dos muestra independientes a través del paquete estadístico SPSS V23,

Todo ello se realizó en el salón de clases del primer ciclo primer ciclo académico 2017- I de la Escuela Profesional de Ingeniería Informática de la Universidad para el Desarrollo Andino.

El presente trabajo de investigación se realizó en función a algunos trabajos ya realizados como a continuación se detalla.

En el trabajo de Martinez (2013) se concluye que el software "Geogebra" es una herramienta de gran utilidad para la orientación de un sinnúmero de temáticas (incluidas funciones cúbicas, exponenciales, logarítmicas, entre otras) con el potencial para generar aprendizajes significativos en los estudiantes.

Mientras que en el trabajo de Bonilla (2013) se analizan los resultados de las calificaciones en base 10, logrando determinar que el grupo experimental alcanza un promedio 7.6 frente a un promedio de 5.6 del grupo control, determinando que sí influye el uso del programa Geogebra en el rendimiento académico en Geometría Analítica Plana en los estudiantes del tercer año de la especialidad de Físico Matemático.

Bustos (2013) concluye que con el uso del software mejoró el nivel de aprendizaje evidenciándose un mayor rendimiento académico, ya que el grupo Experimental obtuvo un promedio de 4.46 mientras que el Grupo control 3.54.

De otro lado, Bello (2013), en su trabajo de investigación: "mediación del software Geogebra en el aprendizaje de programación lineal en alumnos del quinto grado de educación secundaria", concluye que la mediación de GeoGebra influye el aprendizaje de programación lineal porque facilita el diseño de estrategias de solución a problemas propuestos.

Figueroa (2013) señala que el uso del GeoGebra ayuda a que los alumnos resuelvan y creen problemas considerando variaciones de los parámetros en un sistema de ecuaciones lineales de dos variables donde los alumnos mostraron interés por resolverlo y obtuvieron resultados satisfactorios.

Los trabajos de investigación mencionados anteriormente sirvieron de referencia para la presente investigación; así, nos planteamos analizar si el uso del Software Geogebra influye o no en el aprendizaje conceptual y procedimental del de la función cuadrática en los estudiantes del primer ciclo académico 2017-I de la Escuela Profesional de Ingeniería Informática de la Universidad para el Desarrollo Andino, para ello comprobamos:

La hipótesis específica (1): La aplicación del software geogebra en el cálculo algebraico y cálculo geométrico como recurso didáctico influye positivamente en el aprendizaje conceptual de la función cuadrática en los estudiantes del primer ciclo académico 2017-I

de la Escuela Profesional de Ingeniería Informática de la Universidad para el Desarrollo Andino.

Considerando $\alpha = 0.05$; mediante la Prueba de t de Student se calculó a través del SPSS, el P-valor que es 0.00 como se muestra en la tabla 3.

Tabla N° 3

Prueba de muestras emparejadas conceptual(post –pre)

		Diferencias emparejadas							
					95% de intervalo de confianza de la diferencia				
		Media	Desviación estándar	Media de error estándar	Inferior	Superior	t	gl	Sig. (bilateral)
Par 1	Notafinal_Postconcep - Notainicial_Preconcep	2,074	,749	,102	1,870	2,278	20,359	53	,000

Fuente: elaboración propia del investigador.

Como P-valor ≤ 0.05 , se rechaza la hipótesis nula ($H01$) y se acepta la hipótesis de la investigación (Hi1).Lo que demuestra que existe diferencia en el aprendizaje de contenido conceptual entre la pre y la post prueba", donde según la tabla N° 4 , se observa que la nota promedio de la pre prueba de contenido conceptual es 11.30 y la nota promedio de la post prueba de contenido conceptual es de 13.37. Es decir, la nota promedio de la post prueba de contenido conceptual es superior a la nota promedio de la pre-prueba de contenido conceptual.

Tabla N° 4

Prueba de kolmogrov-smirnov para una muestra

		Nota inicial Pre conceptual	Nota final Post conceptual
N		54	54
Parámetros normales	Media	11,30	13,37
	Desviación estándar	2,724	2,542
Máximas diferencias extremas	Absoluta	,113	,112
	Positivo	,080	,112
	Negativo	-,113	-,110

Estadístico de prueba	,113	,112
Sig. asintótica (bilateral)	,081	,086

Fuente: elaboración propia del investigador

Donde la aplicación del software Geogebra en el cálculo algebraico y cálculo geométrico como recurso didáctico influye positivamente en el aprendizaje conceptual de la función cuadrática en los estudiantes del primer ciclo académico 2017-I de la Escuela Profesional de Ingeniería Informática de la Universidad para el Desarrollo Andino.

La hipótesis específica (2): La aplicación del software Geogebra en el cálculo algebraico y cálculo geométrico como recurso didáctico influye positivamente en el aprendizaje procedimental de la función cuadrática en los estudiantes del primer ciclo académico 2017-I de la Escuela Profesional de Ingeniería Informática de la Universidad para el Desarrollo Andino

Considerando $\alpha = 0.05$; mediante la Prueba de t de Student se calculó a través del SPSS, el P-valor que es 0.00 como se muestra en la tabla N° 5.

Tabla N° 5

Prueba de muestras emparejadas procedimental(post-pre)

		Diferencias emparejadas							
					95% de intervalo de confianza de la diferencia				
		Media	Desviación estándar	Media de error estándar	Inferior	Superior	t	gl	Sig. (bilateral)
Par 1	Notafinal_Postprocedimental - Notainicial_Preprocedimental	2,370	2,830	,385	1,598	3,143	6,154	53	,000

Fuente: elaboración propia del investigador

Como P-valor ≤ 0.05 , se rechaza la hipótesis nula ($H02$) y se acepta la hipótesis alterna (Hi2). Lo que demuestra que existe diferencia en el aprendizaje de contenido procedimental entre la pre y la post prueba", donde según la tabla N° 6 , se observa que la nota promedio de la pre prueba de contenido procedimental es 11.35 y la nota promedio de la post prueba de contenido procedimental es de 13.72. Es decir, la nota promedio de la

post prueba de contenido procedimental es superior a la nota promedio de la pre-prueba de contenido procedimental.

Tabla N° 6

Prueba de kolmogrov-smirnov para una muestra

		Nota inicial Pre procedimental	Nota final Post procedimental
N		54	54
Parámetros normales	Media	11,35	13,72
	Desviación estándar	2,816	2,645
Máximas diferencias extremas	Absoluta	,112	,111
	Positivo	,087	,094
	Negativo	-,112	-,111
Estadístico de prueba		,112	,111
Sig. asintótica (bilateral)		,089	,092

Fuente: elaboración propia del investigador.

Se infiere que la aplicación del software Geogebra en el cálculo algebraico y cálculo geométrico como recurso didáctico influye positivamente en el aprendizaje procedimental de la función cuadrática en los estudiantes del primer ciclo académico 2017-I de la Escuela Profesional de Ingeniería Informática de la Universidad para el Desarrollo Andino.

Conclusiones

La aplicación del software Geogebra como recurso didáctico en el cálculo algebraico y cálculo geométrico resulto beneficioso en el aprendizaje de contenido conceptual de la función cuadrática, pues que el promedio de la calificación de los estudiantes de la post prueba que usaron el software Matemático Geogebra frente a la pre prueba del mismo grupo de estudiantes sin el uso del software Matemático Geogebra figuran en la tabla N° 4.

La aplicación del software Geogebra como recurso didáctico en el cálculo algebraico y cálculo geométrico resulto beneficioso en el aprendizaje de contenido procedimental de la función cuadrática, pues el promedio de la calificación de los estudiantes de la post prueba que usaron el software Matemático Geogebra frente a la pre prueba del mismo

grupo de estudiantes sin el uso del software Matemático Geogebra figuran en la tabla N° 6.

Referencias

Bello Durand, J. (2013). *Mediación del Software Geogebra en el Aprendizaje de Programación Lineal en alumnos del quinto grado de educación secundaria*. Tesis de Maestría. Pontificia Universidad Católica del Perú

Bonilla Guachamin, G. (2012). *Influencia del uso del programa Geogebra en el rendimiento académico en Geometría Analítica Plana, de los estudiantes del tercer año de bachillerato, especialidad Físico Matemático, del colegio Marco Salas Yépez.*Tesis de Licenciatura. Universidad Central del Ecuador. 2012-2013.

Bustos Gonzales, J. (2013). *Propuesta didáctica La enseñanza del concepto de limite en el grado undécimo, haciendo uso del Geogebra*. Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia.

Figueroa Vera, R. (2013). *Resolución de problemas con sistemas de ecuaciones lineales con dos variables. Una propuesta para el cuarto año de secundaria desde la teoría de situaciones didácticas.* Tesis de Maestría. Pontificia Universidad Católica del Perú.

Hernández S., Fernández, C. y Baptista, L. (2010). *Metodología de la Investigación*. (5a ed.). México: Mac Graw Hill, Interamericana.

Martínez Gómez, J. (2013). *Apropiación del Concepto de Funciones usando el software Geogebra.* Tesis de Maestría. Manizales.Universidad Nacional de Colombia.

Volver al índice de autores

2.3.13. Propuesta de una metodologia de adaptación de contenidos para e-learning de las matematicas en educación superior

Walter Rubén Bernuy Blanco
Universidad Nacional Agraria de la Selva, Tingo María, Perú

Resumen

Se expone la necesidad de innovación de varios aspectos de la enseñanza cuando se trata de educación a distancia, más aún, en matemáticas. Si bien se hace uso de la modalidad e-learning, no se aborda adecuadamente la presentación de contenidos. No hay producción de contenidos diferenciados para cada tipo de curso. Al virtualizar un currículo, debe diferenciarse los tipos de contenidos de los cursos, y elaborar los contenidos virtuales de acuerdo a ello; no se puede ofrecer con los mismos esquemas los cursos "de letras" que los "de números" o los "de ciencias". Hoy es común ver que los cursos virtuales se remiten a presentar fríamente los contenidos completos referidos a cada tema o capítulo, sin diferenciar la naturaleza de los mismos, esto debe ser corregido. La virtualización debe hacerse para cada contenido empleando las tecnologías considerando el método heurístico para asegurar el aprendizaje de las matemáticas. Se propone crear un equipo que se encargue de la virtualización de contenidos, el cual debe contar con el apoyo de los expertos en tecnología educativa, en diseño, en programación y centrar su accionar en el profesor de curso. Al final debe producirse un objeto de aprendizaje que sea particular para cada curso y que permita asegurar una transferencia óptima de conocimiento.

INTRODUCCION

En estos momentos los departamentos de recursos humanos de las diversas están viviendo una enorme transformación debido fundamentalmente a la Infotecnología, donde el fenómeno de Internet está revolucionándolo todo. Este nuevo entorno, que emerge de la globalización a través de estas tecnologías, ofrece multitud de posibilidades en la tarea de gestionar el conocimiento de las empresas. Las propias empresas tendrán que sensibilizar a sus directivos en relación a lo que supone Internet para los procesos de gestión de recursos humanos, cada vez más compartidos y menos propiedad del departamento específico. La gestión de los profesionales deberá ser cada vez más directa, serán los propios responsables de los equipos de trabajo quienes actúen como gestores de RH (Recursos Humanos) y

necesitarán apoyos cada vez más importantes en materiales, herramientas y contenidos que faciliten su trabajo. Este hecho será propiciado claramente por las plataformas tecnológicas que funcionarán tanto a través de Internet como a través de desarrollos de las propias intranets corporativas. Emerge de manera intensa el mundo del "coaching", "mentoring", "counselling", y todo tipo de herramientas, metodologías y sistemas que mejoran la relación profesional-jefe, buscando la máxima eficacia productiva de la organización y el desarrollo del profesional. La máxima del concepto de "empleabilidad" se hará cada vez más evidente.

En este contexto, el nuevo paradigma del e-learning se pone de manifiesto como una alternativa que complemente la educación en todos los niveles, especialmente en el nivel superior.

Pero el proceso de adaptación de los contenidos no es estandarizado para todas las disciplinas o temas, por lo que se deberá analizar qué tipos de contenidos son susceptibles de ser virtualizados o digitalizados.

ENFOCANDO EL PROBLEMA

EL PROBLEMA DE LA VIRTUALIZACION INADECUADA.

Cuando se trata de educación a distancia se piensa en plataformas educativas, modelos educativos constructivistas, técnicas didácticas, infraestructura pro mediática, inversión en tutorías, etc. sin embargo no se toca adecuadamente el tema de contenidos y formas adecuadas de estos que aseguren un óptimo aprendizaje. Se presentan muy continuamente eventos académicos como congresos, seminarios sobre *e-learning*, existen plataformas diversas, videoconferencias con expertos, normativas foros, etc. pero no hay producción de contenidos inéditos para los alumnos del país y menos se trata de la naturaleza, forma y características de los contenidos que sean concordantes y pertinentes para cada tipo de curso dictado.

Cuando las instituciones encargan a sus profesores a entregar contenidos para los cursos virtuales, estos cumplen con el encargo, pero se producen incongruencias que desvirtúan la posibilidad de lograr los objetivos de enseñanza, así tenemos:

- Trasladan íntegramente los "apuntes" de clase al formato digital o copian libros como si fueran autores.

- Preparan ppt´s "rellenos" de texto, atiborrantes.

- Si no tienen apuntes, recurren a la fácil tarea de buscar en Internet, "copian y pegan" lo que encuentran y rellenan de materiales el curso. Creen que nadie se dará cuenta del plagio. Esta misma acción aplican para las clases presenciales. (Acción que es replicada por los alumnos, para cumplir con presentar los trabajos encargados).

- No existe uniformidad de contenidos en casos de cursos análogos.

- Cada profesor decide por cuenta propia los porcentajes de cada parte del contenido del curso.

- Copian literalmente los ejercicios y ejemplos de los libros que disponen.

Debemos partir reconociendo también que no hay uniformidad en todos los cursos que se imparten en cualquier especialidad. Por ejemplo, de modo general, podemos establecer dos grandes tipos: los teóricos o "de letras" y los prácticos o "de números". No es posible tratar de una misma forma los contenidos de ambos grupos. En lo presencial, los cursos "de letras" generalmente se remiten a clase expositiva, tipo conferencia mientras que, en los otros cursos, deben necesariamente pasar por un conjunto de explicaciones de los sustentos teóricos de cada tema y cada aplicación debe ser explicitada gradualmente (como en la solución de problemas de matemática o de física). A partir de lo anterior, lógicamente la forma de presentar o virtualizar los contenidos será diferente para cada caso. Así sucede en lo presencial: mientras que el profesor de historia o geografía o literatura o biología "explica" verbalmente los temas con ayuda de gráficos que refuerzan la explicación, el profesor de matemáticas debe desarrollar cada ejercicio "explicando" cada paso, intentando hacer entender cada etapa, puesto que sobre esta se apoya el siguiente paso. Mientras que la "gráfica" de refuerzo en los cursos de "letras" puede ser una fotografía, un cuadro sinóptico o esquema parecido, en matemáticas no tiene mucha utilidad presentar en "gráfico" el ejercicio completamente resuelto, para entenderlo debe irse explicando paso a paso y si existe necesidad de un gráfico real, éste será presentado al final, para explicar o interpretar el fenómeno, por lo tanto, de modo correspondiente, la virtualización no será idéntica para ambos.

Actualmente, muchos cursos virtuales se remiten a presentar fríamente los contenidos completos referidos a cada tema o capítulo, sin diferenciar la naturaleza de los temas, eso hay que corregir.

Es necesario aprender a virtualizar cada contenido, solo así la educación virtual podrá acercarse a tener logros idénticos a la presencial, que es su objetivo principal y, si pueda superarlo, mejor. José Silvio (2000) sugiere "cambios en los métodos pedagógicos y en la forma de dirigir y gestionar los procesos de enseñanza y de aprendizaje". Es importante ofrecer al estudiante un contenido adaptado a sus necesidades y además que le permita aprender de forma interactiva, el contenido debe estar muy bien diseñado, teniendo en cuenta que virtualizar los materiales educativos es para enseñar y no distraer al estudiante (Vargas, N. 2013).

Además, la educación a distancia requiere además de nuevas formas de entregar los conocimientos, de otras habilidades por parte del estudiante. Estas habilidades también deben ser preocupación del sistema, y debe facilitarse su dominio a través de los profesores, los contenidos alcanzados y las actividades complementarias. Hay exigencia de cambios actitudinales, de mayor valoración del aprendizaje, de saber buscar en la inmensidad de la Internet, de sentido crítico en la selección de la información, etc.

PROPUESTA DE FASES DE LA METODOLOGÍA:

1. Análisis de contenidos del curso o tema.
2. Definición de requerimientos didácticos para el tema
3. Definición de requerimientos tecnológicos
4. Propuesta de interfaces. Desarrollo de rutinas según la naturaleza del contenido
5. Control de métodos de seguimiento y evaluación
6. Producción y evaluación del objeto de aprendizaje

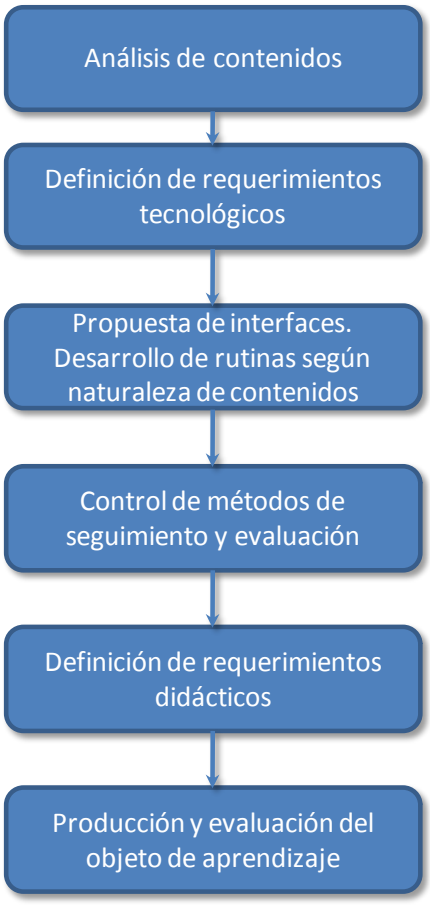


Figura Nº 1. Proceso metodológico de la adaptación de contenidos

Fuente: Elaboración propia

DESARROLLO DE CONTENIDOS.

Descripción del proceso. Del análisis de contenidos se recibe la información sobre la naturaleza del curso a preparar. Así, podemos tener básicamente dos tipos de cursos: altamente interactivos o menos interactivos. Para los cuales debe prepararse adecuadamente la adaptación de sus contenidos.

Para el caso de un **curso altamente interactivo** (matemática, física, química, estadística, etc.) la secuencia de diseño debe ser: Primero, pantalla de exposición del tema principal, ejemplos de aplicación y propuesta de problema. Eventualmente, de modo casi paralelo, debe disponerse de pantallas sobre los temas básicos que subyacen al tema principal. Es

decir, para el caso ejemplo de matemática; si el tema fuera *La ecuación de primer grado*, en este repositorio deberá, estar un "glosario" referido a leyes del álgebra, teoría de signos, procesos de despeje, asociación de términos semejantes, transposición, etc.

Una siguiente pantalla será la propuesta de un problema que debe tardar unos minutos hasta que el alumno interiorice y comprenda lo que se pide. Las siguientes *n* pantallas, deberán ser las que secuencialmente corresponden al desarrollo del problema. Es decir, cada pantalla mostrará un solo paso subsecuente, de modo que el alumno antes de pasar a la siguiente debe reconocer y entender dicho paso. La solución entonces se irá presentando paso a paso, a la velocidad del entendimiento y comprensión del alumno, hasta llegar a la respuesta final[1].

Enfatizamos que el desarrollo de la solución no deberá presentarse en una sola pantalla, sino que debe ser gradual, paso a paso, para permitir que el mismo alumno vaya construyendo su solución[2].

Para el caso de un **curso menos interactivo** (geografía, historia, biología, etc.) le corresponderá otra secuencia de diseño: En primer lugar, una pantalla de exposición del tema principal y necesariamente una imagen o información que emule la condición gráfica; tras la imagen la explicación de los detalles, que no necesariamente tiene que ser secuencial, la única condición es que toda la información aparezca para que el alumno pueda asimilarlo. Una vez cumplido un tiempo apropiado, puede repetirse con otras nuevas imágenes y su correspondiente explicación. Cuando se considera que el alumno ha asimilado, se seguirá a otra unidad.

En cualquiera de ambos tipos de cursos, corresponde luego la evaluación que deberá también se rediseñada y analizada previamente por los expertos. El sistema deberá preparar un *banco de preguntas* o diseñarse el programa de modo que siempre exista una variedad aleatoria de preguntas.

[1] Cocinero. 2015. Método heurístico y su incidencia en el aprendizaje del álgebra. Guatemala
[2] Ausubel. Teoría del aprendizaje significativo. En: http://uoctic-grupo6.wikispaces.com/Constructivismo

METODO DE VIRTUALIZACION PROPUESTO. ETAPAS.

a). Análisis de contenidos- que permitirá primero conocer la naturaleza del curso objeto de estudio. En función de ello se optará por la metodología apropiada. Esta etapa permitirá conocer la extensión del curso, los contenidos a enseñar y el tipo de contenidos a presentar. Aquí se debe establecer las características que debe tener el curso virtual, la forma de interactuar y los tipos de evaluación.

b). Definición de requerimientos didácticos para el tema- Aquí deben establecerse las herramientas didácticas a utilizar. Podrá definirse si el curso puede apoyarse en presentaciones estáticas, en presentaciones dinámicas, en documentos textuales, etc. Esta etapa define que actividades de enseñanza son indispensables para el curso, que apoyos requerirá y que metodología podrá adaptarse mejor. Así, por ejemplo, decidirá la cantidad de "reuniones" semanales que debe tener el profesor con sus alumnos, si estas serán meramente verbales o se requerirán necesariamente imagen para explicar los desarrollos. Decidirá además si las evaluaciones serán bajo "control" del docente o simplemente pueden ser rendidas en diferido. También podrá definirse la naturaleza de cada examen o evaluación, los trabajos "encargados" y su nivel de exigencia. Básicamente el enfoque constructivista que hoy domina el contexto de la enseñanza deberá ser trasladado al sistema en red.

Esta es la parte crítica que diferencia los cursos por sus contenidos y al mismo tiempo permite poner a disposición del alumno un curso adecuadamente preparado y dimensionado para los objetivos de la carrera.

En esta etapa y en la anterior, se requerirán a los tecnólogos en educación y especialistas en didáctica y metodología de la enseñanza.

c). Definición de requerimientos tecnológicos- Aquí, en base a los requerimientos didácticos de la etapa previa, los técnicos establecerán que herramientas tecnológicas serán necesarias, como documentos estáticos (doc, pdf), o dinámicos (ppt, flash) así como chat, foros, tablones, videos, animaciones, correos, juegos, videoconferencias, repositorios, etc. Complementariamente, también deberá definirse el requerimiento de infraestructura tecnológica para el curso, pues debe considerarse que un curso con alto número de animaciones, videos y multimediales requerirá mayor espacio en disco, a la vez mayor capacidad de procesamiento.

En esta etapa también deben producirse los mecanismos que permitan al alumno repasar los contenidos del curso, así como un seguimiento "histórico" del tiempo de permanencia en el módulo y del número de veces que visita, lo que permitirá al docente tomar una opinión sobre el "interés" del alumno respecto al su tema.

Esta etapa deberá estar a cargo de los técnicos en programación y en desarrollo de tecnologías web.

d). Propuesta de interfaces. Desarrollo de rutinas según la naturaleza del contenido-

Los especialistas en programación deberán elaborar la propuesta de transferencia de contenidos, desde los clásicos libros hasta el hipertexto o multimedial.

Las etapas anteriores han definido las características metodológicas y técnicas, en ésta los técnicos deben asegurar unas interfaces con una alta usabilidad, entendiendo con ello que deben mostrar amigabilidad, funcionalidad, accesibilidad, navegabilidad y diseño. Los expertos deben verificar que se logre la interactividad requerida al inicio.

Todas las etapas deben contar permanentemente con el asesoramiento metodológico y didáctico de los expertos, asegurándose una actividad continua de intercambio de opiniones y perfeccionamiento del producto.

e). Control de métodos de seguimiento y evaluación- En una especie de feedback, los expertos deben revisar y comprobar los métodos de control de aprendizaje, seguimiento y evaluación del curso. Los programadores deben alcanzar un sistema que asegure que las propuestas didácticas sean logradas. Cuando se evidencia que el curso requiere que la evaluación sea bajo "control" del docente, podrán hacerse uso de herramientas como videoconferencias y en caso contrario, simplemente podrán ser paginas de evaluación que pueden entregarse dentro de un determinado plazo.

Igualmente deben considerarse las alternativas para las "recuperaciones" o en caso contrario, corresponde a la institución establecer las políticas mas adecuadas al caso mediante normativas o reglamentación pertinente.

f). Producción y evaluación del "objeto de aprendizaje"- Llamaremos objeto de aprendizaje al producto obtenido, el cual, antes de incorporarse a la red, deberá ser sometido a evaluación consensuada por los expertos que participaron en su construcción

además del profesor de curso y de docentes del área académica de conocimientos al cual pertenece el curso.

El método propuesto puede sentar las bases de una mejor estructuración de contenidos de los cursos para ser puestos en la red para formación continua

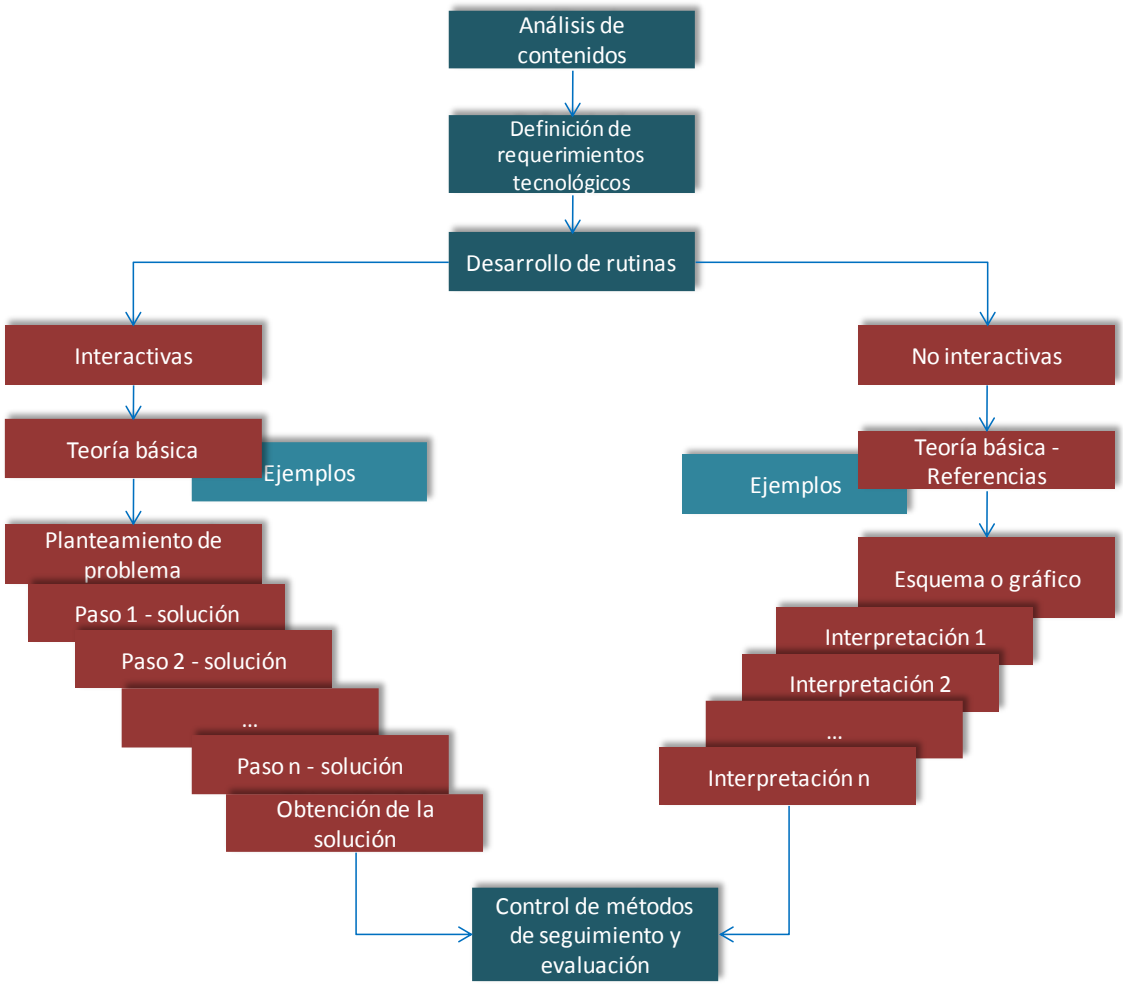


Figura Nº 2. Detalle del desarrollo de interfaces

Fuente: Elaboración propia

DISCUSION

Se debe establecer en cada universidad una unidad de virtualización de contenidos. Como se puede observar, la creación y publicación de un curso virtual implica el trabajo en

colaboración de un equipo multiprofesional y de una estructura funcional determinada (Santoveña, 2007). Esta unidad debe estar integrada por especialistas en tecnología educativa, técnicos en programación, técnicos en herramientas web, diseñadores digitales, revisores idiomáticos, etc. además del profesor de curso y del grupo de profesores revisores de fondo y forma. Todos forman un conjunto de expertos. El producto para cada curso debe ser el "objeto de aprendizaje", que será el elemento que verdaderamente transfiera el conocimiento al estudiante. Para lograr esto debemos desarrollar una serie de etapas secuenciales, que pueden constituir la metodología apropiada para el requerimiento: Análisis de contenidos, definición de requerimientos didácticos para el tema, de requerimientos tecnológicos, propuesta de interfaces, métodos de seguimiento y evaluación, producción de objeto de aprendizaje.

Esta propuesta sienta las bases para poder definir y establecer la mecánica más apropiada para poder adaptar los contenidos de un curso para *e-learning.* Blanco (2002) plantea "almacenar en un mismo espacio todos los objetos que puedan resultar útiles en el desarrollo del trabajo colaborativo: documentos de texto, bases de datos, imágenes, sonidos, anotaciones sobre los mismos, comentarios, listas de direcciones, etc." Corresponde ahora caracterizar y especificar cada etapa de modo que se construya un objeto instruccional eficiente para el aprendizaje del alumno. Un aspecto a considerar también es la necesaria adaptación del profesor para preparar contenidos virtuales. Es decir habilitar a los docentes para que tengan la capacidad de dejar en la Web la descripción del curso, el programa, las lecturas y trabajos requeridos; animar a los estudiantes a recabar en Internet información relacionada con el curso y a presentar trabajos y demás ejercicios a través del correo electrónico; entablar discusiones personalizadas entre la facultad y el alumno (una práctica conocida en ocasiones como *horas de oficina virtual*) y llevar a cabo debates de clase más amplios mediante e-mail. Producir cursos enteros a través de Internet, con lecciones íntegras y la posibilidad de realizar presentaciones multimedia, disponibles bajo demanda o *asincrónicamente*; que permita el acceso de los estudiantes a bibliotecas y fuentes de información completas, simulaciones interactivas de fenómenos complejos basadas en ejemplos del mundo real, videoconferencias a través de Internet con especialistas distinguidos en un campo determinado y proyectos de colaboración entre estudiantes y expertos de todo el mundo. (Masterman, 2003).

CONCLUSIONES

1. Los nuevos paradigmas de enseñanza-aprendizaje basados en TICs se están convirtiendo en un complemento necesario a la educación tradicional, donde se necesitan de nuevas herramientas, cambio de actitudes, nuevos planteamientos curriculares que permitan aprovechar este nuevo esquema en su real dimensión.

2. La propuesta de la metodología de adaptación de contenidos para e-learning, se enmarca en reconocer que podemos agrupar básicamente los cursos, según la naturaleza de sus contenidos, en dos grupos: números o ciencias, y letras o humanidades

3. El aplicar la metodología propuesta adecuadamente, deberá tener un efecto positivo en el grado de retención de conocimientos por parte de los estudiantes; asimismo en la producción de material académico que realmente corresponda a los conceptos y contextos de e-learning.

Referencias

Belly, Knowledge Management. (2013). *Primer Programa Latinoamericano de Posgrado en Gestión del Conocimiento y Capital Intelectual desde una Perspectiva Humana*. Belly Knowledge Management International, Buenos Aires.

Blanco, Santiago. *Colaborar y Aprender: BSCW y BSCL*. Enlace web: http://web.archive.org/web/20100925160821/http://users.servicios.retecal.es/sblanco2/. Consultado 17/11/2017

Castells, M. (2014). *La galaxia internet*. 3ra.Edic. Barcelona. Debolsillo.

Masterman, L. (2012). *Teaching the Media.* London: Comedia Press.

Vargas, N. (2013) *Diseño Instruccional y virtualización de contenidos*. https://prezi.com/l7z_1hg-pjmt/propuesta-diseno-instruccional-y-virtualizacion-de-contenidos/. Consultado 17/11/2017.

Santoveña, Sonia. (2007). El Proceso de Virtualización en las Disciplinas de la UNED. En: Edutec. Revista Electrónica de Tecnología Educativa. Núm. 23 / Julio 07.

Silvio, J. (2010). *La virtualización de la educación superior*. Caracas. Ediciones IESALC – UNESCO.

Volver al índice de autores

2.4. Talleres

2.4.1. Análisis de dominio y rango de funciones con Geogebra

Elizabeth Advíncula C.
Elton Barrantes R.
María Iris Flores Q.
Nancy Saravia Molina
Marco Solórzano M.
Pontificia Universidad Católica del Perú-IREM, Perú

Resumen

La determinación del dominio y el rango de una función resulta una tarea complicada para los estudiantes de los primeros ciclos universitarios, ya sea a partir de su gráfica o regla de correspondencia. Desde nuestra experiencia consideramos que está dificultad se debe, en parte, a que los estudiantes no logran comprender los conceptos de dominio y rango de una función. Ante esta problemática, decidimos usar un software de geometría dinámica que permita construir animaciones que ayuden a los estudiantes a comprender los conceptos de dominio y rango de funciones a partir de sus gráficas. En este taller mostraremos algunas animaciones dinámicas con GeoGebra que faciliten la comprensión de estos conceptos. Nuestro trabajo toma en cuenta aspectos del Enfoque Instrumental de Rabardel y sigue una metodología cualitativa. Por ello, plantearemos actividades para ser desarrollados con GeoGebra, promoviendo en todo momento que los participantes observen la relación que existe entre las variables involucradas, a partir de diversas gráficas de funciones. Esperamos que los participantes construyan actividades que faciliten la comprensión del dominio y el rango de una función, usando GeoGebra. Finalmente, promoveremos una reflexión acerca de las ventajas y desventajas que ofrece el GeoGebra en la enseñanza de las funciones

Introducción

En el presente artículo compartiremos nuestra experiencia al incorporar aplicaciones realizadas con GeoGebra en nuestras clases con estudiantes universitarios de los primeros ciclos, que cursan Estudios Generales Ciencias o Estudios Generales Letras en la Pontificia Universidad Católica del Perú. En relación al objeto matemático función, observamos que

los estudiantes presentan dificultades para comprender el concepto función y resolver problemas usando dicho concepto. Entre las dificultades que observamos, identificamos que no logran entender la relación entre dos variables, no logran comprender el concepto de dominio ni de rango, tienen dificultades para determinar reglas de correspondencia, tienen dificultades para graficar funciones seccionadas, entre otras.

En relación a las dificultades observadas, en este trabajo, nos interesa acercar a los estudiantes de manera dinámica y flexible a los conceptos de dominio y rango de una función con la intención de facilitar su comprensión, esto debido a que este es un concepto que se requiere a lo largo de todo el trabajo con funciones y la dificultad aumenta para los estudiantes cuando trabajan con funciones definidas por tramos (Chumpitaz, 2013). En nuestra búsqueda de recursos dinámicos, encontramos el software GeoGebra y lo incorporamos en el desarrollo de nuestras actividades, ya que consideramos que sus herramientas son muy útiles para realizar y manipular construcciones de manera casi inmediata, lo cual facilita el descubrimiento y generalización de propiedades matemáticas, la elaboración y verificación de conjeturas y la comprensión de conceptos como es el caso del dominio y el rango de una función, que es nuestro interés en este artículo.

Enfoque instrumental de Rabardel

Nuestras actividades han sido diseñadas tomando en cuenta el enfoque instrumental de Rabardel (1995), ya que consideramos que este nos permitirá analizar la relación que se establece entre un sujeto (estudiante de primer ciclo universitario) y un objeto matemático (dominio o rango de una función) mediado por el uso de un artefacto (software GeoGebra o gráficas de funciones), que al convertirse en un instrumento (software GeoGebra o gráficas de funciones en situaciones de uso) para el estudiante mediante un proceso de génesis instrumental (proceso donde el estudiante se apropia del instrumento asignándoles funciones específicas, distintas a sus funciones constitutivas), éste logra apropiarse del mismo y lo usa de manera eficiente en la resolución de diversas tareas.

Actividades

Las actividades que trabajaremos en el taller fueron diseñadas para ser desarrolladas usando las herramientas del software GeoGebra. Estas actividades incluyen gráficas de diversas funciones algebraicas y funciones seccionadas que involucran tramos lineales, polinómicos, racionales, trigonométricos, exponenciales o logarítmicos.

En la primera sesión, trabajaremos con gráficas de funciones lineales, funciones escalonadas y funciones seccionadas con tramos lineales y cuadráticos. Proponemos las actividades 1, 2 y 3.

En la segunda sesión, trabajaremos con gráficas de funciones definidas por tramos que incluyen funciones polinómicas, racionales, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas. Proponemos las actividades 4, 5 y 6.

A continuación,,mostramos algunas actividades abordadas.

Actividad 1

Dada la función f definida por $f(x) = x + 1,\ x \in [0;\ 3]$.

a) Proyecte la gráfica de f sobre el eje *X*. Explique el procedimiento utilizado e indique el nombre que recibe la proyección obtenida.

b) ¿Cómo se relaciona la proyección obtenida en la parte a) con la función f? Explique.

c) Proyecte la gráfica de f sobre el eje *Y*. Explique el procedimiento utilizado e indique el nombre que recibe la proyección obtenida.

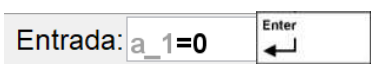
d) ¿Cómo se relaciona la proyección obtenida en la parte c) con la función f? Explique.

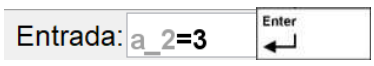
Comente con los participantes la intención de esta actividad.

Actividad 2

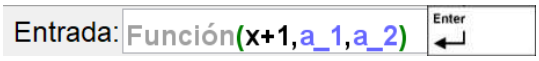
Abra una nueva ventana en GeoGebra y realice lo siguiente:

1. Ingrese los números a_1 = 0 y a_2 = 3, por separado, en la barra de entrada y presione la tecla enter, tal como se muestra a continuación:



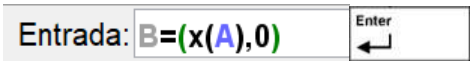


2. Ingrese la función $f(x) = x + 1$ digitando Función(x+1,a_1,a_2) en la barra de entrada y presione la tecla enter, tal como se muestra a continuación:



3. Ubique un punto A sobre la gráfica de la función ingresada.

4. Ingrese el punto B = (x(A),0) en la barra de entrada y presione la tecla enter para obtener un punto B sobre el eje X. Es decir,

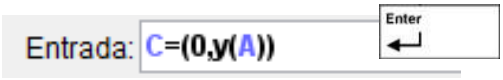


5. Seleccione la herramienta segmento en la caja de herramientas y trace un segmento con extremos en los puntos A y B.

6. Arrastre el punto A y observe que sucede con el punto B. Comente.

7. Active la herramienta rastro para el punto B. Vuelva a arrastrar el punto A y observe lo que sucede con el punto B. Comente que rastro genera el punto B.

8. Ingrese el punto C = (0, y(A)) en la barra de entrada y presione la tecla enter para obtener un punto C sobre el eje Y. Es decir,



9. Arrastre el punto A y observe que sucede con el punto C. Comente.

10. Active la herramienta rastro ubicado en el punto C. Vuelva a arrastrar el punto A y observe lo que sucede con el punto C. Comente que rastro genera el punto C.

11. Active la herramienta animación para el punto A.

12. Comente cómo se relacionan los rastros generados por los puntos B y C con la función f.

13. Guarde esta construcción con el nombre Actividad 2.

Comente con los participantes el objetivo de esta actividad.

Actividad 3

Trace la función f definida por $f(x) = \begin{cases} x+1, & -2 \leq x \leq 0 \\ (x-1)^2+2, & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$

a) Proyecte la gráfica de f sobre los ejes X e Y. Explique el procedimiento utilizado e indique el nombre que recibe las proyecciones obtenidas.

b) ¿Cómo se relacionas las proyecciones obtenidas en la parte a) con la función f? Explique.

Comente con los participantes la intención de esta actividad.

Actividad 4

Abra una nueva ventana en GeoGebra y realice lo siguiente:

1. Ingrese los números a_1 = - 2, a_2 = 0, b_1 = 1 y b_2 = 3, por separado, en la barra de entrada y presione la tecla enter.

2. Ingrese cada una de las funciones f_1(x) = x + 1 y f_2(x) = (x - 1)^2 + 2, por separado, en la barra de entrada y presione la tecla enter.

3. Oculte las gráficas de las funciones f_1 y f_2.

4. Ingrese la función por tramos f(x) = Si (a_1<= x < a_2, f_1, Si(b_1 <= x <= b_2,f_2)) en la barra de entrada y presione la tecla enter.

5. Ubique un punto A sobre la gráfica de la función por tramos ingresada en 4).

6. Ingrese el punto B=(x(A),0) y el punto C=(0,y(A)) en la barra de entrada y presione la tecla enter.

7. Seleccione la herramienta segmento en la barra de herramientas y trace los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.

8. Arrastre el punto A y observe que sucede con los puntos B y C. Comente.

9. Active la herramienta rastro para los puntos B y C. Vuelva a arrastrar el punto A y observe lo que sucede con los puntos B y C. Comente que rastro genera los puntos B y C.

10. Active la herramienta animación para el punto A.

11. Comente cómo se relacionan los rastros generados por los puntos B y C con la función f.

12. Guarde esta construcción con el nombre Actividad 4.

Comente con los participantes el objetivo de esta actividad.

Actividad 5

Construya nuevas gráficas cambiando los números a_1, a_2, b_1 y b_2 y describa los cambios observados. También, experimente cambiando las funciones f_1 y f_2 ingresadas y describa lo que obtiene.

Comente con los participantes el objetivo de esta actividad.

Actividad 6

Elabore una hoja de trabajo dinámica con GeoGebra. Para ello siga las indicaciones dadas en el siguiente link: https://www.geogebra.org/m/K2ekJs69#material/wftr3KCe

Comente con los participantes el objetivo de esta actividad.

Resultados

A continuación, describiremos algunos resultados observados en el trabajo con nuestros estudiantes y otros que esperamos observar cuando los participantes desarrollan las actividades propuestas en este trabajo.

Resultados esperados en la Actividad 1

Esta actividad tiene por objetivo que el estudiante realice la proyección de la gráfica de f sobre el eje *X* con o sin GeoGebra. Se pretende que use sus conocimientos sobre proyección

ortogonal y realice la proyección de la gráfica de f sobre el eje X proyectando diversos puntos, que puede ser tal como se muestra en la figura 1.

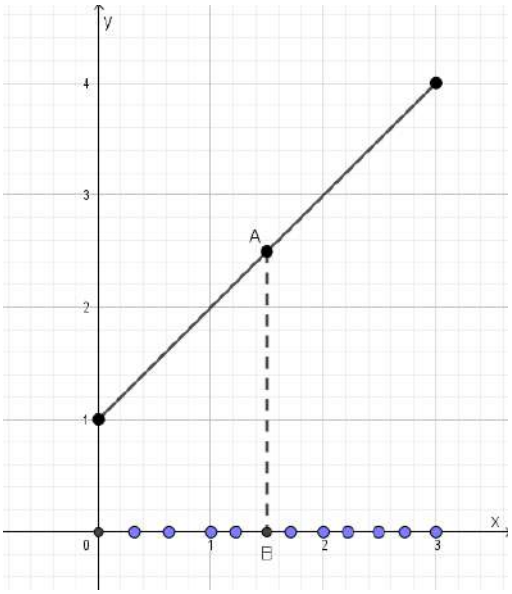


Figura 1. Proyección ortogonal de un punto de la gráfica de f sobre el eje X.

Esperamos que observen que los puntos mostrados en la figura 1 no son los únicos puntos que se pueden proyectar sobre el eje *X* y logren reconocer que la proyección de la gráfica de f sobre el eje *X* es un segmento horizontal con extremos en los puntos (0; 0) y (3;0). Cabe resaltar que durante toda la actividad nos interesa que los estudiantes discutan acerca de la proyección obtenida y elaboren sus propias conclusiones. Como en nuestras clases no todos los estudiantes tienen un dispositivo personal para realizar construcciones en GeoGebra, a modo de cierre mostramos una animación en GeoGebra donde observamos la proyección de todos los puntos de la gráfica de f sobre el eje *X*. Para esto, arrastramos el punto *A* sobre la gráfica de f y obtenemos la traza que corresponde al segmento horizontal con extremos en los puntos (0; 0) y (3; 0), tal como se muestra en la figura 2.

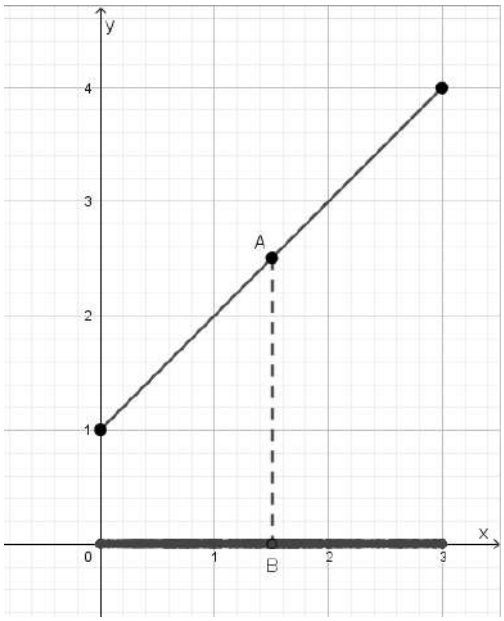


Figura 2. Rastro de un punto de la gráfica de f proyectado sobre el eje X.

Finalmente, discutimos con los estudiantes la relación que podemos establecer entre el segmento con extremos en (0; 0) y (3; 0) y la función de f, esperando que surja el concepto de dominio de f.

De manera similar, esperamos que los estudiantes establecen una relación entre el segmento con extremos en (0; 1) y (0; 4) y la función de f, esperando que surja el concepto de rango de f.

Resultados esperados en la Actividad 2

Esta actividad tiene por objetivo que los participantes del taller construyan la animación en GeoGebra que utilizó el docente al finalizar la actividad 1. Consideramos que es importante que los participantes construyan la aplicación en GeoGebra pues así podrán reflexionar acerca de las ventajas y desventajas que ofrece este software para trabajar el concepto de dominio y rango de una función. Además, al realizar ellos mismos la construcción tendrán un recurso digital que podrán incorporar en sus clases de matemática.

Resultados esperados en la Actividad 3

En esta actividad esperamos que los estudiantes desarrollen la actividad con o sin GeoGebra, pero para una función definida por tramos. Esperamos que relacionen las

proyecciones obtenidas sobre el eje X e Y, con el dominio y el rango de la función *f*, respectivamente.

Resultados esperados en la Actividad 4

En esta actividad se espera que los participantes del taller construyan una aplicación en GeoGebra siguiendo las indicaciones dadas y reflexionen tanto sobre las ventajas y desventajas que ofrecen las herramientas de este software cuando se trabaja con funciones seccionadas.

Esperamos que los participantes entreguen una construcción similar a la que se muestra a continuación.

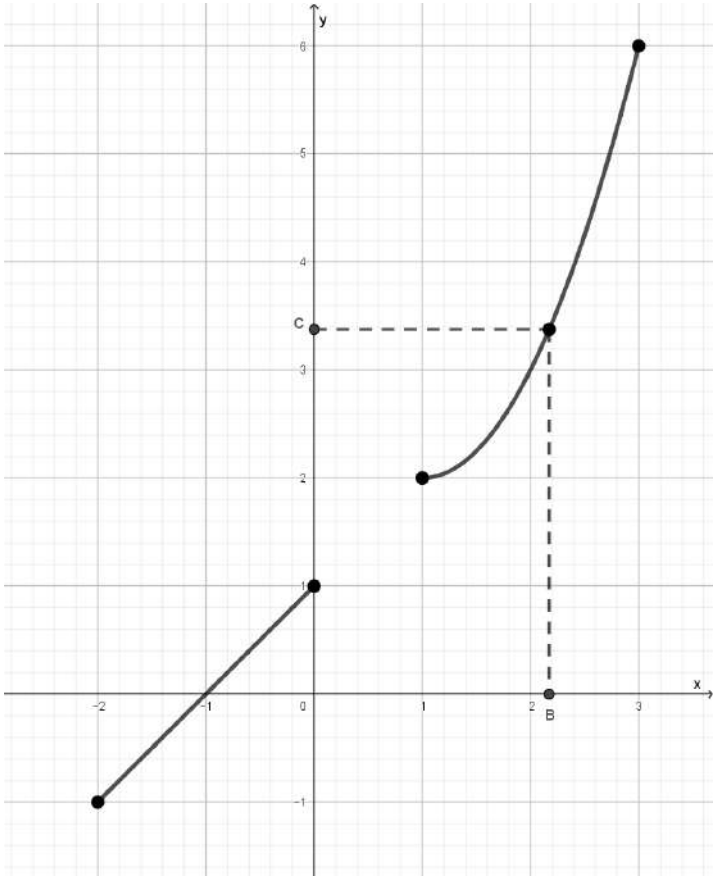


Figura 3. Proyección ortogonal de un punto de la gráfica de f sobre los ejes X e Y.

Resultados esperados en las Actividades 5 y 6

En estas actividades esperamos que los participantes elaboren recursos en GeoGebra que sean útiles para su práctica docente, reflexionando sobre el uso adecuado de dichos recursos, así como sobre el potencial y las limitaciones que ofrece el software GeoGebra al trabajar con diversas funciones.

Conclusiones

Durante el desarrollo de las actividades realizadas con estudiantes universitarios de los primeros ciclos observamos que estos hacen uso de las herramientas del GeoGebra y los integran a sus esquemas de uso preexistentes o elaboran nuevos esquemas relacionados con las nociones de dominio y rango de una función, mostrando comprensión sobre dichos conceptos. Podemos decir que empiezan a apropiarse de dichos conceptos a través de un proceso de génesis instrumental.

Asimismo, podemos afirmar que las herramientas del GeoGebra como el *rastro* y la *animación* facilitan la comprensión de los conceptos dominio y rango de una función, contribuyendo de esta manera a promover el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes.

Finalmente, podemos mencionar que el aspecto dinámico y flexible del GeoGebra en la elaboración y manipulación de construcciones relacionadas con funciones, permite minimizar las dificultades que tienen los estudiantes al identificar el dominio y el rango de una función.

Referencias bibliográficas

Rabardel, P. (2011). *Los hombres y las tecnologías: Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos*. (Trad. por M. Acosta). Colombia: Universidad Industrial de Santander.

Chumpitaz, L. (2013). *Génesis instrumental: Un estudio de los procesos de instrumentalización en el aprendizaje de la función definida por tramos mediado por el software GeoGebra con estudiantes de ingeniería*. (Tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú.

Volver al índice de autores

2.4.2. La inversa de una función de variable real en un entorno de geometría dinámica

Maritza Luna V.
Elton John Barrantes R.
Edwin Villogas H.
Grupo de Investigación TecVEM-IREM PUCP, Perú

Resumen

Este taller tiene por objetivo dar a conocer una herramienta didáctica para la enseñanza y aprendizaje de la inversa de una función de variable real haciendo uso de un programa dinámico. Para ello elaboramos actividades basadas en algunos aspectos del Enfoque Instrumental de Rabardel, concretamente la génesis instrumental del objeto. Durante la aplicación se observará que el GeoGebra permite que los participantes descubran e identifiquen las propiedades particulares, para luego dar solución a dichas actividades. Mediante la socialización de experiencias entre los participantes, se espera que adopten una postura reflexiva valorando los aportes de la implementación del programa.

Introducción

En nuestra experiencia docente, observamos que los estudiantes presentan muchas dificultades para reconocer las características y propiedades propias de las gráficas de funciones inyectivas. En la búsqueda de alternativas para facilitar el aprendizaje de las funciones inversas encontramos que el uso de un entorno de geometría dinámica como el *software GeoGebra*, favorece la visualización de las principales características y propiedades de sus gráficas, así como la comprensión de estas. Asimismo, el potencial de arrastre que presenta este *software* permite realizar cambios de manera casi inmediata a las construcciones realizadas manteniendo invariante las propiedades geométricas existentes.

Existen funciones que por características generales no son inyectivas, pero restringiendo su dominio cumplen con las condiciones de la definición, el problema es determinar la regla de correspondencia, lo cual no es tan simple y muchas veces se comete error porque requiere un cierto análisis, es este problema el que debemos resolver.

Hacemos uso del enfoque instrumental, (Rabardel, 2002), ya que nuestro objetivo es enriquecer de manera progresiva el significado de la definición de la inversa de la función de variable real. Para ello hemos preparado actividades que permitirán la asimilación y

acomodación de un nuevo esquema, llamado proceso de instrumentalización. Haremos un ligero intento en orientar la definición, que el participante instrumentalizó en las primeras actividades, para observar su proceso de instrumentación. Sin embargo, la génesis estará básicamente orientada a la instrumentalización de la definición de inversa de una función de variable real.

Como indica Bartolini y Mariotti (2008) la construcción y el uso de artefactos parece ser característica de las actividades humanas, pero una característica aún más humana parece ser la posibilidad de la contribución de tales artefactos a ir más allá de la práctica, y contribuir al nivel cognitivo. Por lo cual consideramos el enfoque instrumental de Rabardel que se basa en la diferencia entre artefactos e instrumentos. Esta distinción lleva al análisis, por separado, de las potencialidades de un artefacto y el uso actual que se hace a través de éste. No sólo se separa lo que se ha relatado de la intencionalidad del diseñador de lo que realmente ocurre en la práctica, sino también para enfatizar la distinción entre perspectivas objetivas y subjetivas. De acuerdo con las terminologías de Rabardel, el artefacto es el material u objeto simbólico en sí; a veces sólo una parte de un artefacto complejo puede estar en foco, que es designado según una meta particular, y por esa razón, encierra un conocimiento específico.

El instrumento es definido por Rabardel como una entidad mixta, hecha de ambos componentes del artefacto y componentes esquemáticos que llamamos esquemas de utilización. Esta entidad mixta nace de ambos, del sujeto y del objeto.

Es la entidad que constituye el instrumento que posee un valor funcional para el sujeto. La utilización de esquemas se elaborará progresivamente durante la utilización del artefacto en la realización de una tarea particular; así el instrumento es una construcción individual, que posee un carácter psicológico y está estrictamente relacionado al contexto, donde la tarea se origina y naturalmente se desarrolla. La elaboración del instrumento es un proceso largo y complejo que Rabardel llamó génesis instrumental. Los géneros instrumentales pueden ser articulados en dos procesos:

- Instrumentalización: concerniente a la aparición y evolución de diferentes componentes del artefacto, el progresivo reconocimiento de sus potencialidades y restricciones.

- Instrumentación: se refiere a la aparición y desarrollo de esquemas de utilización.

En este taller desarrollaremos actividades y este articulo presentaremos algunas de ellas.

Sesión 1

Actividades con GeoGebra y teniendo presente las siguientes definiciones.

Definición(Función)
Es un conjunto de pares ordenados de números (x, y) en la que no existen dos pares ordenados diferentes con el mismo primer número.
Definición (Gráfica de función)
Es el conjunto de todos los puntos (x, y) del plano $\mathbb{R}^2$ para los cuales (x, y) es un par ordenado de f.
Definición (Inyectividad)
Se dice que una función es inyectiva si cada número de su rango corresponde a exactamente un número de su dominio; es decir, para toda x_1, x_2 del dominio de f
si $x_1 \neq x_2$ entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$ equivalentemente $f(x_1) = f(x_2)$ sólo cuando $x_1 = x_2$.
Leithold, (1998).

A modo de ejemplo, mostramos tres problemas propuestos a los estudiantes.

Actividad 1

Para cada una de las funciones cuyas reglas de correspondencia son las siguientes:

i) $f(x) = 3x + 2$

ii) $f(x) = x^2 - 4x + 3, \ \ 0 < x < 5$

iii) $f(x) = x^2 - 4x + 3, \ \ 2 < x < 5$

iv) $f(x) = \begin{cases} -2x + 3, & x < 2 \\ -x^2 + 2x - 1, & x \geq 2 \end{cases}$

Realice lo siguiente:

a) Haciendo uso del GeoGebra grafique y determine si es inyectiva. Justifique su respuesta.

b) Haciendo uso del GeoGebra, en el caso de que f es inyectiva trace la gráfica de la recta identidad ($y = x$), la función $y = f(x)$ y su simetría respecto a dicha recta.

c) Despeje la variable x en términos de y. Además, en la expresión obtenida cambie la variable y por x (y viceversa) y grafique la nueva función obtenida.

d) ¿Qué puede concluir de las gráficas obtenidas en las partes c) y d)? Además, piense en el nombre que le pondría a dicha función obtenida por simetría.

Solución.

a) Para la solución seguimos los siguientes pasos:

i) Ingresamos al Geogebra, nos ubicamos en la barra de entrada y escribimos

$f(x) = 3x + 2$ como se muestra en la figura 1.

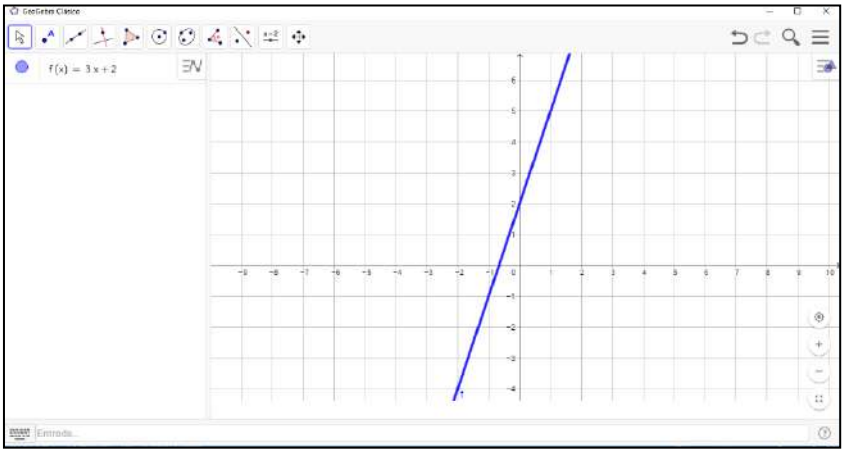


Figura 1. Trazo de la recta $y = 3x + 2$.

ii) Ingresamos al GeoGebra, nos ubicamos en la barra de entrada y escribimos $Función(x\text{^}2 - 4x + 3)$. De esta manera se obtiene la gráfica de la función como se muestra en la figura 2.

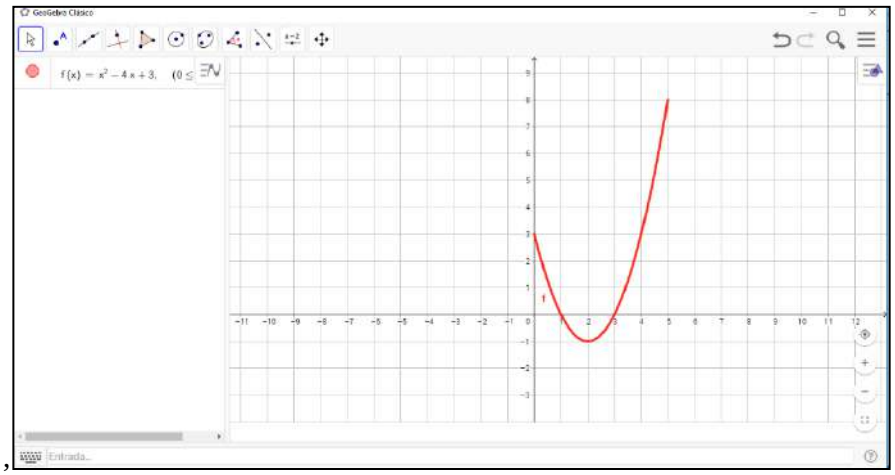


Figura 2.

iii) Ingresamos al GeoGebra, nos ubicamos en la barra de entrada y escribimos $Función(x^2 - 4x + 3)$. De esta manera se obtiene la gráfica de la función como se muestra en la figura 3.

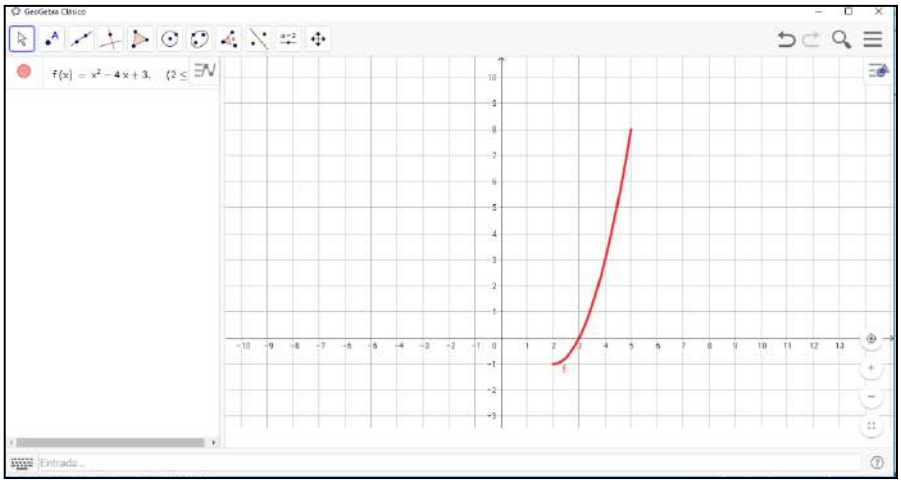


Figura 3.

iv) Ingresamos al GeoGebra, nos ubicamos en la barra de entrada y escribimos la regla de correspondencia de la lineal. Después escribimos la regla de correspondencia de la cuadrática. De esta manera se obtiene la gráfica de la función como se muestra en la figura 4.

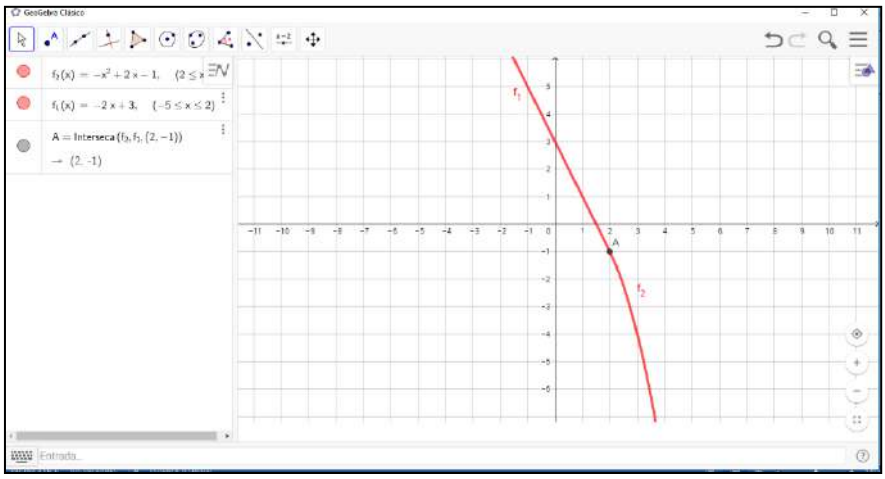


Figura 4. Gráfico final

b)

i) Paso 1. Ingresamos al GeoGebra, graficamos $f(x) = 3x + 2$ y digitamos $y = x$ para graficar la identidad como se muestra en la figura 5.

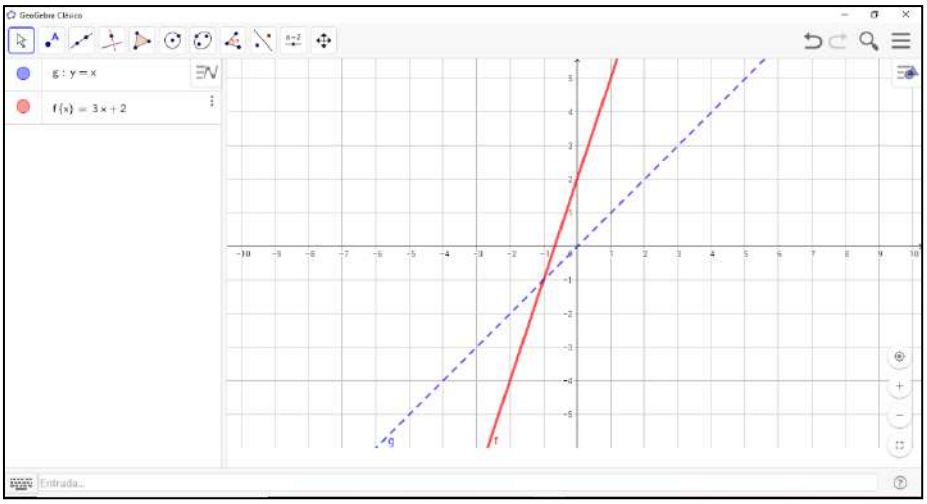


Figura 5.

Paso 2. Ubíquese en Geogebra y seleccione simetría axial. Obtendrá lo siguiente

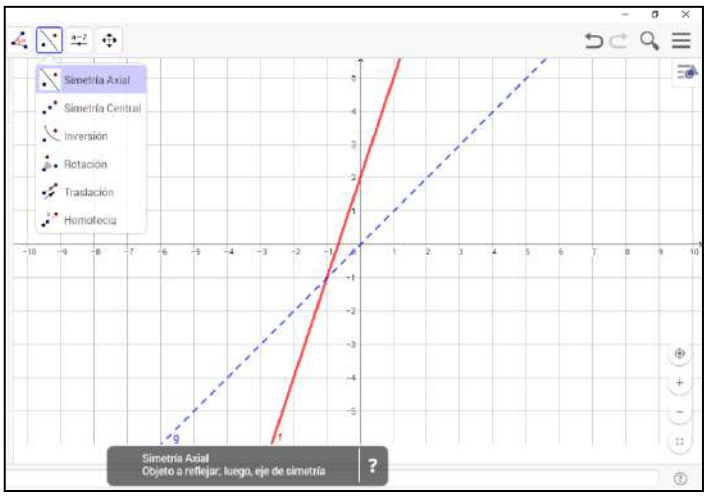


Figura 6.

Paso 3. Haga click en la gráfica de la función luego en el eje de simetría y obtendrá la gráfica de la función inversa

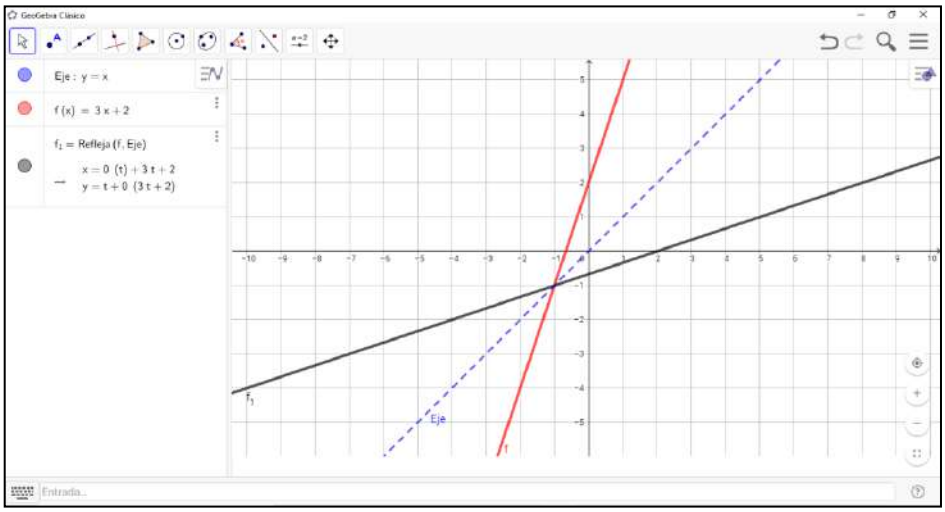


Figura 7.

Se observa que la gráfica de f es una recta que pasa por $(0,2)$ y (1,5) y la gráfica que se obtiene por simetría es una recta que pasa por $(2,0)$ y (5,1). En general, se observa que si la gráfica de f pasa por (a, b) entonces la otra gráfica pasa por (b, a).

ii) No es inyectiva

iii) Es análogo a lo mostrado en i) y se obtiene la figura 8.

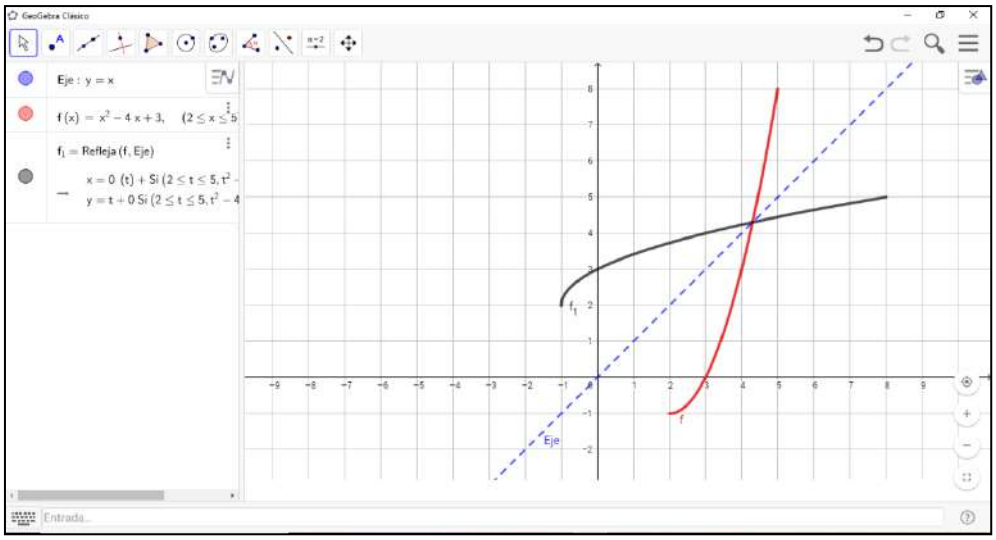


Figura 8.

Se observa que la gráfica de f es una semiparábola que pasa por $(2,-1)$ y (5,8) y la gráfica que se obtiene por simetría es también una semiparábola que pasa por $(-1,2)$ y (8,5). En general, se observa que si la gráfica de f pasa por (a,b) entonces la otra gráfica pasa por (b,a).

iv) Es análogo a lo mostrado en i) y se obtiene la figura 9.

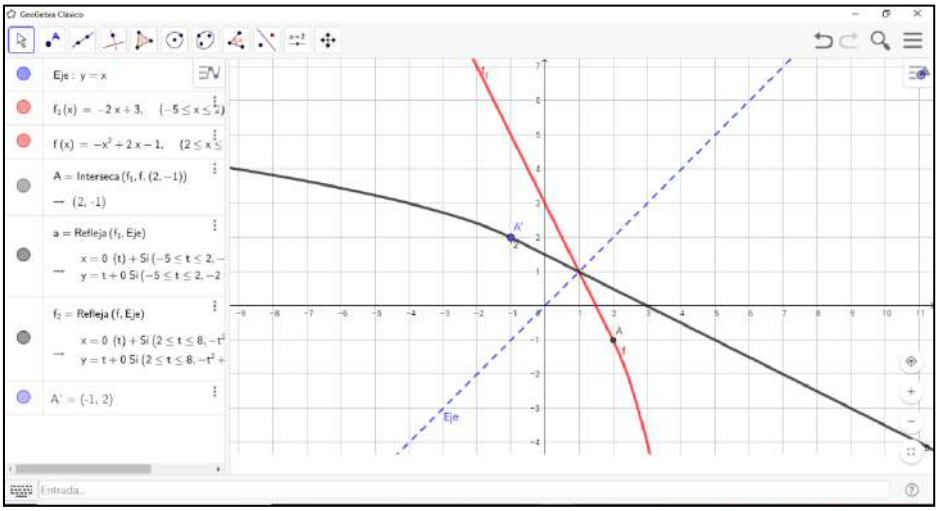


Figura 9.

Se observa que la gráfica de f está conformada por un tramo lineal y un tramo parabólico; y la gráfica que se obtiene por simetría también. En general, se observa que si la gráfica de f pasa por (a, b) entonces la otra gráfica pasa por (b, a).

Definición (Inversa de una función)
Si f es una función inyectiva considerada como el conjunto de pares ordenados (x, y), entonces existe una función $x = f^{-1}(y)$, llamada inversa de f, que es el conjunto de pares ordenados (y,x) definida por $x = f^{-1}(y)$ si y solo si $y = f(x)$.
El dominio de f^{-1} es el rango de f y el rango de f^{-1} es el dominio de *f*. Leithold (1998).

Actividad 2

Indique cuál de las funciones de la actividad 1 cumplen la definición dada y halle la regla de correspondencia de f^{-1}.

Cada participante debe comentar su solución.

Actividad 3

Para la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x + 2, & 0 \leq x < k, \\ kx + 2, & 3 \leq x < 5. \end{cases}$$

a) Determine el mayor valor de k para el cual f es inyectiva.

b) Halle la regla de correspondencia de la función inversa de f.

c) Bosqueje las gráficas de f y f^{-1} en un mismo plano cartesiano.

Solución

a) Aquí se trabaja con un contador k que va variando como se muestra en la figura 10.

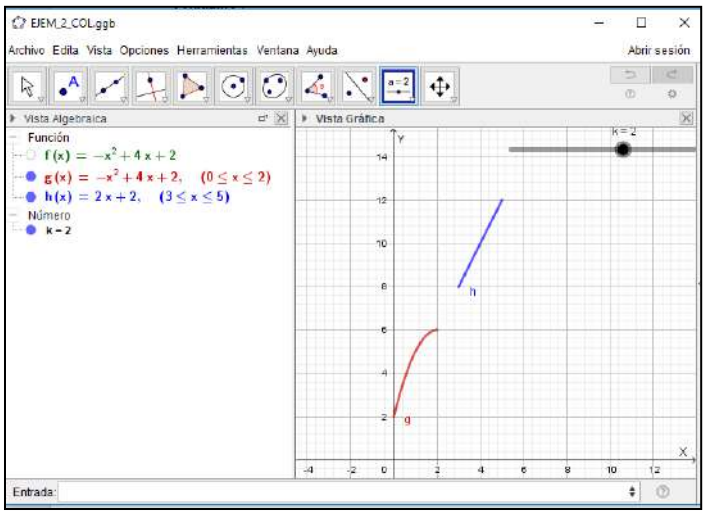


Figura 10.

En la figura se muestra que el mayor valor de k es 2. Este valor coincide con la abscisa del vértice.

A continuación, se presentan mas actividades para que continúen practicando e instrumentalizando el artefacto.

Actividad 4

Dada la función: $p = f(q) = -0{,}6q + 12$, en donde p representa precio y q la cantidad de un bien.

a) ¿Es una función de oferta o de demanda?

b) ¿Cuál es su dominio?

c) Grafique la función $p = f(q)$

d) Halle $q = f^{-1}(p)$

e) Grafique la función $q = f^{-1}(p)$

Actividad 5

Para la siguiente función:

$$f(x) = 2^x + 3$$

a) ¿Es cierto que f es inyectiva?

b) Si su respuesta es afirmativa en el ítem a), halle la función inversa de f y trace las gráficas de f y f^{-1} en un mismo plano cartesiano.

Para reflexionar

Uno de los principios del enfoque instrumental es que la instrumentación de un artefacto no es un acto sino un proceso complejo. Según esto, mencione que actividades debiera enriquecer para que la definición de función inversa, en este caso mediada por el GeoGebra, se convierta en un instrumento que le permita resolver determinada tarea.

Conclusiones

Con este taller se espera lograr la Genesis instrumental de la definición de inversa de una función de variable real mediado por el GeoGebra, Además se espera tener la reflexión de los participantes al comentar su experiencia con la manipulación del artefacto y logrando la instrumentalización e instrumentación.

Referencias

Bartolini, M. G. & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: artifacts and signs after a Vygotskian perspective.

Leithold, L. (1998) El Cálculo, Oxford University Press-Harla México, S.A de C.V. 7ma edición.

Rabardel, P. (2002). Les hommes et les technologies. Une approche cognitive des instruments contemporains. Paris: Univ. Paris 8. [traducción al inglés: Rabardel, P. (2002). People and technology. A cognitive approach to contemporary instruments. Paris: Univ. Paris 8].

2.4.3. Modelos de población en ecuaciones diferenciales

Liliana Puchuri Medina
Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú

Resumen:

Se busca introducir el tema de ecuaciones diferenciales mediante una propuesta didáctica basada en la visualización y simulaciones numéricas usando Matlab y Geogebra. Es importante observar que esta metodología de enseñanza se deja en segundo plano en los cursos básicos de ecuaciones diferenciales, dados en la universidad. Mediante las gráficas obtenidas se visualizará de qué manera se ven afectadas las poblaciones de depredador y presa a lo largo del tiempo, se predecirá su comportamiento a largo plazo y se podrán verificar predicciones hechas de manera teórica. De esa manera, los alumnos desarrollarán la visualización matemática, entendiéndola como la habilidad de representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflexionar sobre la información visual generada a través del uso de tecnología.

1. Introducción

El siglo XVII se caracterizó por el desarrollo de la Física y las Matemáticas. En el campo de la Física, surgieron innumerables problemas que requirieron de las ecuaciones diferenciales para su resolución. Por ejemplo, Jacob Bernoulli (1654 – 1705) propuso el famoso problema de la braquistócrona, que consiste en determinar la curva entre dos puntos que es recorrida en menor tiempo por un cuerpo que comienza en el punto inicial con velocidad cero, y que debe desplazarse a lo largo de la curva hasta llegar al segundo punto. Para encontrar esta curva debemos resolver una ecuación diferencial.

La teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales se originó en 1889, a partir de una memoria del matemático francés Henri Poincaré (1854 – 1912) a finales del siglo XIX. Dicha memoria trataba acerca del problema restringido de los n cuerpos, que es un caso general del problema de determinar la trayectoria de los planetas del sistema solar. El aporte

de Poincaré fue la de obtener información acerca de la forma de las soluciones a partir de la ecuación, pero sin obtener explícitamente la solución.

Así, uno de los principales logros de esta área en este siglo, fue describir fenómenos reales descritos por ecuaciones diferenciales que no habían sido previamente resueltas de manera explícita.

Al finalizar con éxito este taller, el participante será capaz de:

- Entender los conceptos básicos de ecuaciones diferenciales.
- Usar el Geogebra para visualizar las soluciones de una ecuación diferencial.
- Predecir, a partir del gráfico de una solución de un modelo depredador-presa, el comportamiento a largo plazo de las poblaciones de depredadores y presas.

2. Ecuaciones diferenciales ordinarias

A grandes rasgos, las ecuaciones diferenciales son expresiones que vinculan una función con sus derivadas. Comenzaremos viendo algunos ejemplos sencillos donde las ecuaciones diferenciales aparecen de manera natural en la biología y la ecología. Para más detalles, vea (Samanta & Gómez-Aíza, 2014).

Ejemplo 1 (Modelo Exponencial). Este modelo fue desarrollado por Malthus, y supone únicamente que la velocidad de crecimiento de una población en el instante t es proporcional al tamaño de la población en ese instante. Luego, si $N(t)$ representa la población de personas (o animales, o bacterias) en el instante t, entonces

$$\frac{dN}{dt} = rN, \tag{1}$$

donde *r* es una constante de proporcionalidad.

- ¿Qué representa r? ¿Qué podemos decir de la población si r es positivo o negativo?
- Compruebe que $N(t) = Ce^{rt}$, donde C es una constante real, satisface la ecuación (1).

- Reemplacemos $t = 0$ en $N(t)$ para obtener $N(0) = C = N_0$. ¿Qué representa este valor?

- La solución de la ecuación (1) será $N(t) = N_0 e^{rt}$.

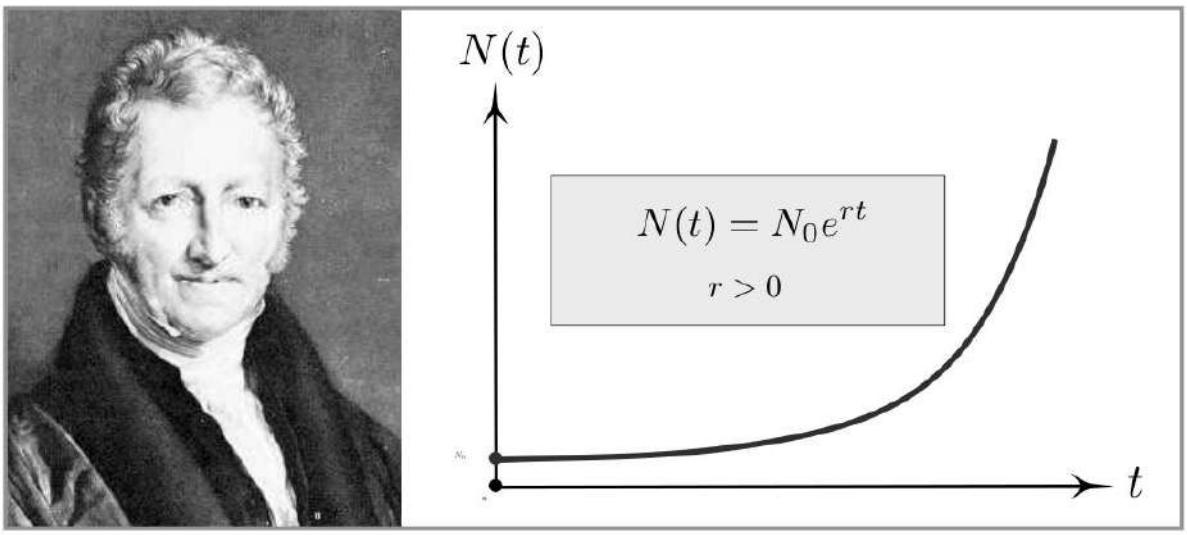


Figura 1: Thomas Maltus y el modelo exponencial cuando $r > 0$

En la figura 1 se muestra que, para r positivo, la ecuación modela un crecimiento exponencial. Por otro lado, si r es negativo, la población tiene un decaimiento exponencial hasta su extinción. Este tipo de decrecimiento se da en fenómenos tales como decrecimiento radioactivo, decrecimiento de las ventas de un producto cuando se interrumpe la publicidad, etc.

- Si $r > 0$, ¿qué sucede con $N(t)$ a largo plazo, es decir, cuando $t \to \infty$?

- Si N(t) representa la población humana, ¿considera que el modelo predice adecuadamente el comportamiento de la población a largo plazo?

En realidad, el crecimiento de una población, por ejemplo, la humana, no puede continuar de manera ilimitada debido a que el espacio y los recursos disponibles son limitados. Esto implica una limitación al modelo exponencial. En estos casos, resulta adecuado introducir un término que dé cuenta de la capacidad del ecosistema para sostener una población. Uno de los modelos más sencillos es el modelo logístico que veremos a continuación.

Ejemplo 2 (Modelo logístico). Este modelo fue introducido por el matemático belga Verhulst, que consideró la ecuación

$$\frac{dN}{dt} = r\left(1 - \frac{N}{K}\right)N = f(N)N, \tag{2}$$

donde $K > 0$ es la capacidad de soporte, que representa la máxima población $N(t)$ que se puede sostener a medida que avanza el tiempo. Observe que si comparamos las ecuaciones (1) y (2) vemos que hemos substituido r por $f(N) = r\left(1 - \frac{N}{K}\right)$. En la figura 2 podemos apreciar como es el crecimiento de la población para este modelo.

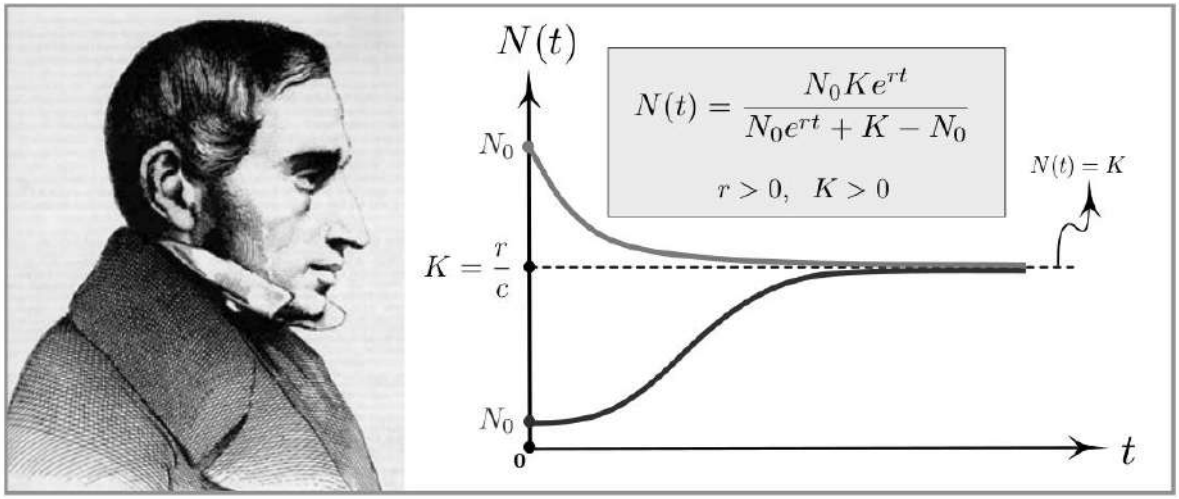


Figura 2: Pierre-François Verhulst y el modelo logístico

De la figura 2,

- ¿Qué se puede decir de la población a largo plazo?

Uno de los modelos que incorporan interacciones entre dos especies fue propuesto en 1925 por el biofísico americano Alfred Lotka y, de manera independiente, por el matemático italiano Vito Volterra. Este modelo será estudiado con detalle en la sección 4, pero lo introduciremos a continuación.

Ejemplo 3 (Modelo depredador-presa de Lotka-Volterra). Supongamos que $x(t)$ y $y(t)$ representan las poblaciones de presas y depredadores, respectivamente. Supongamos además que, en ausencia de depredadores, la razón de cambio de las presas es en cada momento proporcional al número de ellas, es decir,

$$\frac{dx}{dt} = a\,x(t) - b\,x(t)y(t), \qquad a, b > 0,$$

Del mismo modo, la razón de cambio de la población de depredadores es proporcional a esta, pero considerando una constante de proporcionalidad negativa en ausencia de presas, más una tasa proporcional a $x(t)y(t)$ debido al encuentro entre presas y depredadores, es decir,

$$\frac{dy}{dt} = -d\,y(t) + c\,x(t)y(t) \qquad c, d > 0.$$

Luego, obtenemos una ecuación diferencial con dos variables x e y,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax - bxy, \\ \frac{dy}{dt} &= -dy + cxy, \end{aligned} \tag{3}$$

donde a, b, c, d son constantes reales positivas que describen la interacción de las dos especies. Algunas de las preguntas naturales sobre este modelo son:

- ¿Pueden coexistir los depredadores y las presas en un mismo espacio geográfico?
- ¿Cuándo una de las especies conlleva a la extinción de la otra?

A continuación, desarrollaremos los conceptos necesarios (vea (Chicone, 2006), (Coddington & Levinson, 1955), (Puchuri Medina, 2017), (Wang, 2006)) para poder responder a las preguntas propuestas.

3. Teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales

Las ecuaciones (1), (2) y (3) son ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias. Una ecuación diferencial en el plano es de la forma

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y) \end{aligned} \tag{4}$$

donde $f, g: U \longrightarrow \mathbb{R}$ y U es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^2$.

La función $X: U \longrightarrow \mathbb{R}$, $X = (f, g)$, es llamada *campo de vectores* asociado a la ecuación diferencial (4). Un punto $p \in U$ se denomina *punto de equilibrio* si $X(p) = (0,0)$. Una solución de la ecuación (4) es una curva $\alpha(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ definida en un intervalo tal que satisface $\alpha'(t) = X(\alpha(t))$ o equivalentemente

$$x'(t) = f\big(x(t), y(t)\big),$$
$$y'(t) = g\big(x(t), y(t)\big).$$

Geométricamente, la condición $\alpha'(t) = X(\alpha(t))$ significa que el vector tangente a la curva en el punto $\alpha(t)$ es dado por el campo vectorial X en $\alpha(t)$.

Consideremos el siguiente ejemplo de ecuación diferencial y mostraremos el campo de vectores usando Geogebra.

Ejemplo 4. Considere el sistema lineal

$$\frac{dx}{dt} = -y,$$
$$\frac{dy}{dt} = x.$$

Entonces

- El campo asociado es $X(x, y) = (-y, x)$.
- Verifique que $X(0,0) = (0,0)$. Luego $(0,0)$ es un punto de equilibrio del sistema. ¿Qué significado tiene este punto?
- En la figura 3 se muestra que el campo X asocia a cada punto (x, y) el vector $(-y, x)$.
- Se puede apreciar que las soluciones son circunferencias que son tangentes al campo X.
- ¿Qué sucede con el comportamiento de las soluciones $x(t)$ y $y(t)$ a largo plazo?

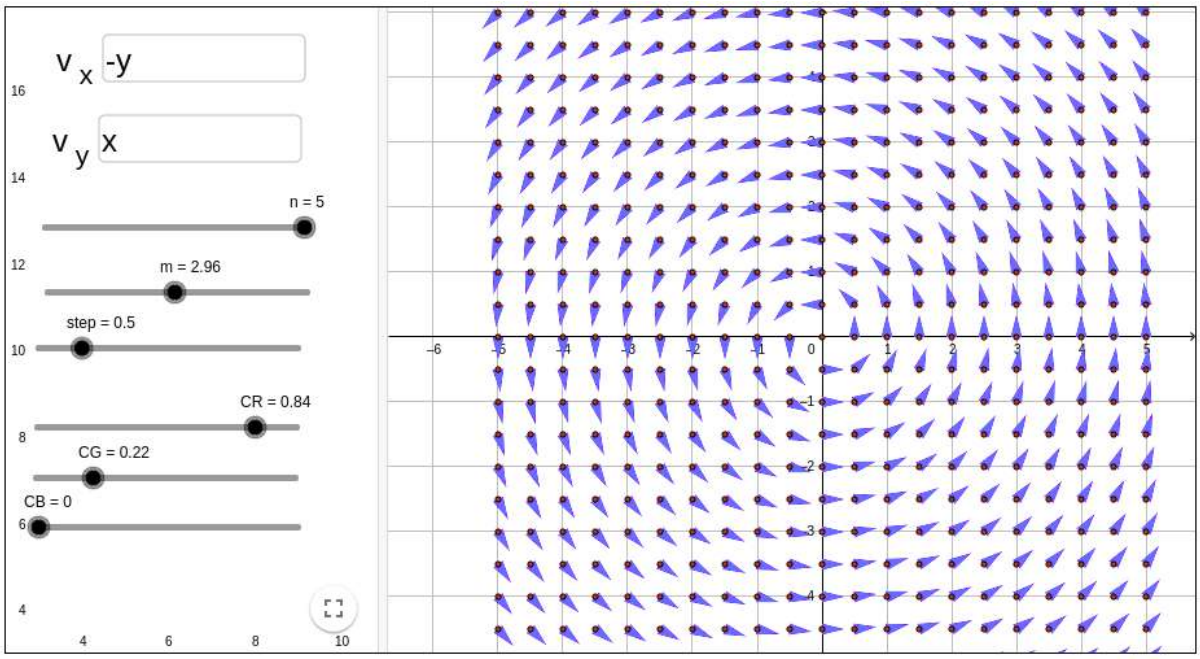


Figura 3: $\boldsymbol{X(x,y) = (-y,x)}$

El gráfico presentado en la figura 3 muestra que las soluciones son circunferencias. Una manera analítica de justificar este hecho es usando coordenadas polares, es decir, mediante el cambio de variable:

$$x = r\ \cos(\theta),$$
$$y = r\ \operatorname{sen}(\theta)\,.$$

Al derivar ambas ecuaciones respecto de t y reemplazar las ecuaciones originales, obtenemos

$$-r\ \operatorname{sen}(\theta) = -y = \frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt}\cos(\theta) - \frac{d\theta}{dt} r \operatorname{sen}(\theta)\,,$$
$$r\ \cos(\theta) = x = \frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt}\operatorname{sen}(\theta) + \frac{d\theta}{dt} r \cos(\theta).$$

Despejamos las derivadas $\frac{dr}{dt}$ y $\frac{d\theta}{dt}$ para obtener

$$\frac{dr}{dt} = 0,$$
$$\frac{d\theta}{dt} = 1,$$

La solución de este sistema es, trivialmente, $r = r_0$ y $\theta = t + \theta_0$.

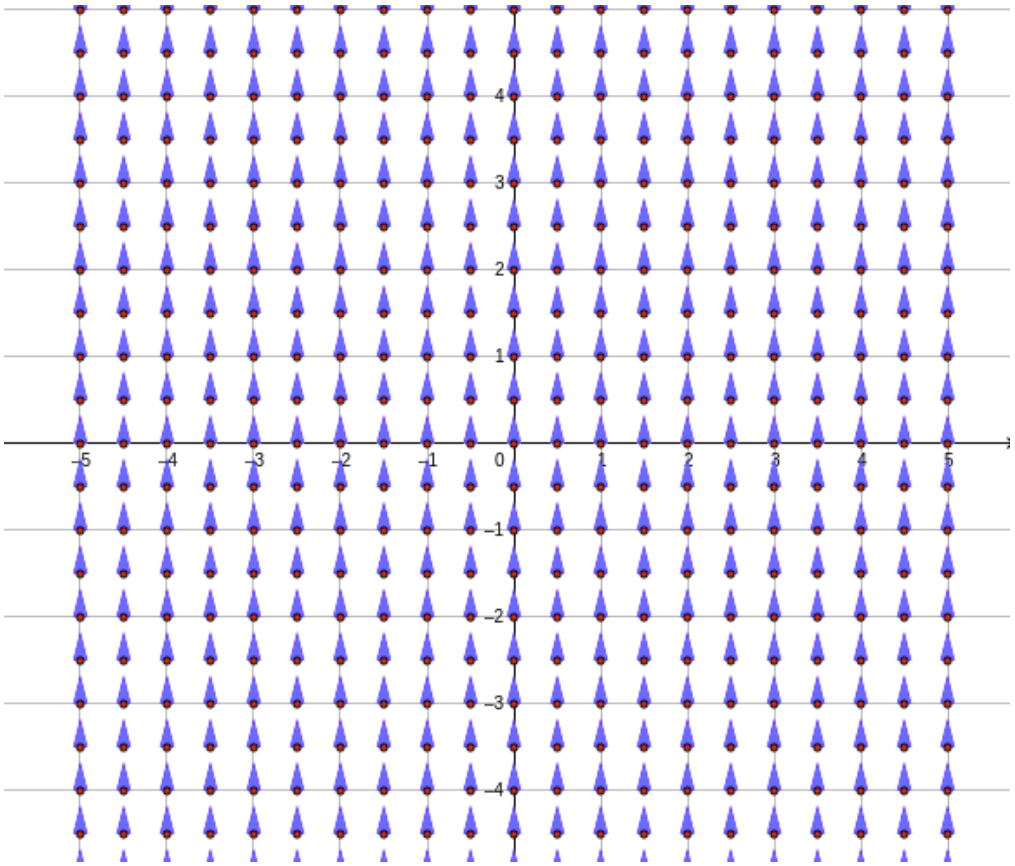


Figura 4: $(\boldsymbol{r'}, \boldsymbol{\theta'}) = (\mathbf{0}, \mathbf{1})$

Luego,

- La figura 4 muestra como son las soluciones en las coordenadas (r, θ).
- La transformación de coordenadas polares envía, por ejemplo, la recta $r = 2$, en la circunferencia $(2\cos(\theta), 2\sin(\theta))$.
- La recta $r = 0$ es enviada en el punto de equilibrio $(0,0)$
- En general, se tiene que las soluciones son circunferencias.

El siguiente ejemplo ayudará a visualizar que, si perturbamos una ecuación diferencial, las soluciones pueden variar razonablemente.

Ejemplo 5. Consideremos la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} x' &= -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ y' &= x + y(1 - x^2 - y^2) \end{aligned} \tag{5}$$

Transformando a coordenadas polares, obtenemos la siguiente gráfica:

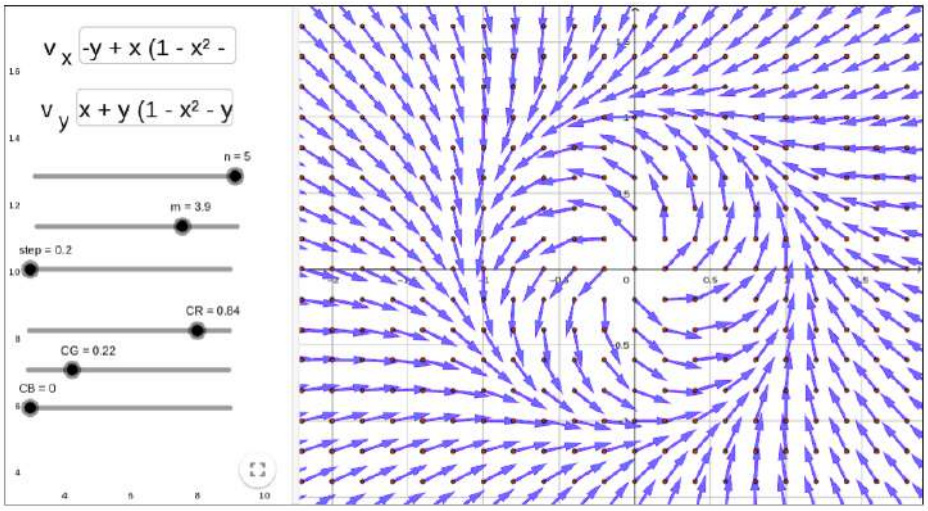


Figura 5: Campo vectorial del ejemplo 5

$$\begin{aligned} r' &= r(1 - r)(1 + r) \\ \theta' &= 1 \end{aligned}$$

Entonces

- La recta $r = 1$ se transforma en la circunferencia $S^1 : (\cos(\theta), \sin(\theta))$, donde $\theta \in [0,2\pi]$.

- La circunferencia S^1 es solución de la ecuación (5).

- En la figura 6, se aprecian las soluciones de la ecuación diferencial. Esto se denomina *diagrama de fase* de la ecuación.

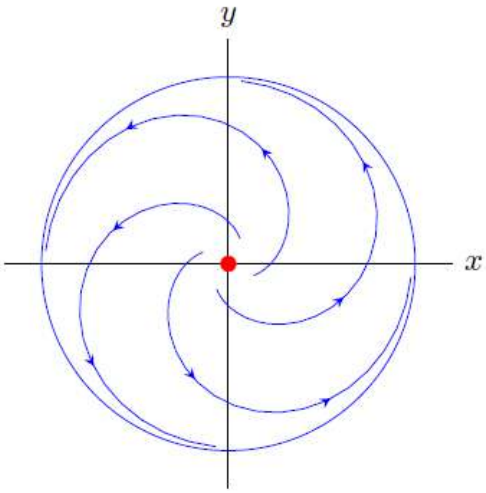


Figura 6: Órbita periódica alrededor del punto de equilibrio

- Observe en la figura 6 que existe una única circunferencia como solución. Tal circunferencia se denomina *ciclo límite*.

La noción de ciclo límite aparece por primera vez en los estudios de las ecuaciones diferenciales en el plano, realizados por Poincaré a finales del siglo XIX.

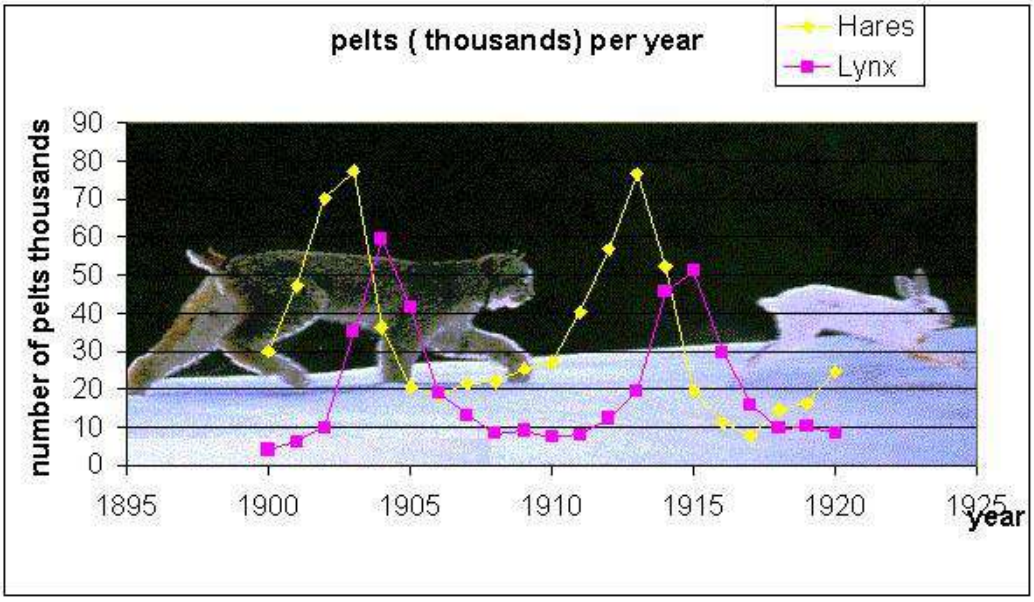


Figura 7: Datos de la compañía Hudson-Bay. Grafico extraído de (Mahaffy, 2000)

4. Análisis del modelo de Lotka-Volterra

En el ejemplo 3, vimos el modelo de depredador-presa de Lotka-Volterra. Una manera natural en el que aparecen este tipo de ecuaciones es por ejemplo en la relación entre linces (depredadores) y conejos (presas). Entre finales del siglo XIX y principios del siglo XX, la compañía Hudson-Bay anotó cuidadosamente el crecimiento y decrecimiento de la población de estas dos especies en un bosque al norte de Canadá (vea la figura 7). Recordemos que el modelo de Lotka-Volterra es dado por

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy$$
$$\frac{dy}{dt} = -dy + cxy$$

donde obtenemos la ecuación (3) del ejemplo 3. Es importante observar que la figura 8 indica que la evolución de la población de depredadores y presas con respecto al tiempo es cíclica.

Ejemplo 6. Consideremos el siguiente modelo de Lotka-Volterra

$$\frac{dx}{dt} = 2x - xy$$
$$\frac{dy}{dt} = -y + xy$$

En este caso, el campo vectorial es dado por la figura 8.

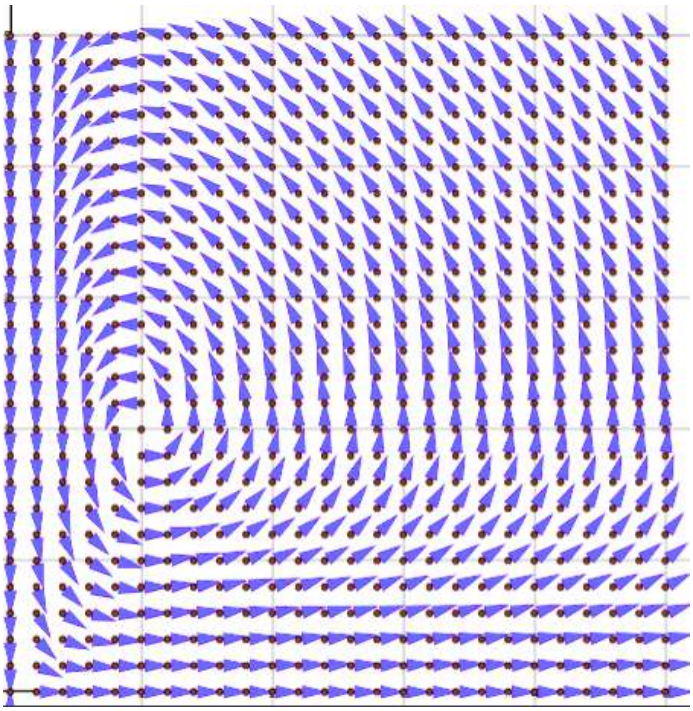


Figura 8: Lotka-Volterra para $a = 2, b = c = d = 1$

- ¿Qué forma tienen las soluciones?

- A partir de las soluciones, ¿qué puede decir sobre la evolución de la población de presas y depredadores a lo largo del tiempo?

5. Ciclos límites en modelos depredador-presa

En la aislada selva amazónica peruana, una anaconda acecha y captura un ratón. Este antiguo drama del cazador y el cazado es repetido en sistemas ecológicos alrededor del mundo. Los depredadores, como el oso de anteojos, el otorongo, las águilas y sus correspondientes presas, exhiben patrones de crecimiento que aparentan repetirse cada cierto tiempo.

Los estudios de los patrones de población animal motivan a los matemáticos a construir modelos de interacción depredador-presa, en los cuales hay una única solución periódica o ciclo, que atrae a todas las demás soluciones. Uno de tales modelos lleva al sistema planar autónomo:

$$x' = x\left(1 - \frac{9}{5}x\right) - y\frac{2x}{1+x}$$
$$y' = -y + y\,\frac{2x}{1+x}$$

donde x denota la población de presas y y denota la población de depredadores. Para más detalles vea (Murray, 2002). Podemos ver una simulación de las soluciones en la figura 9.

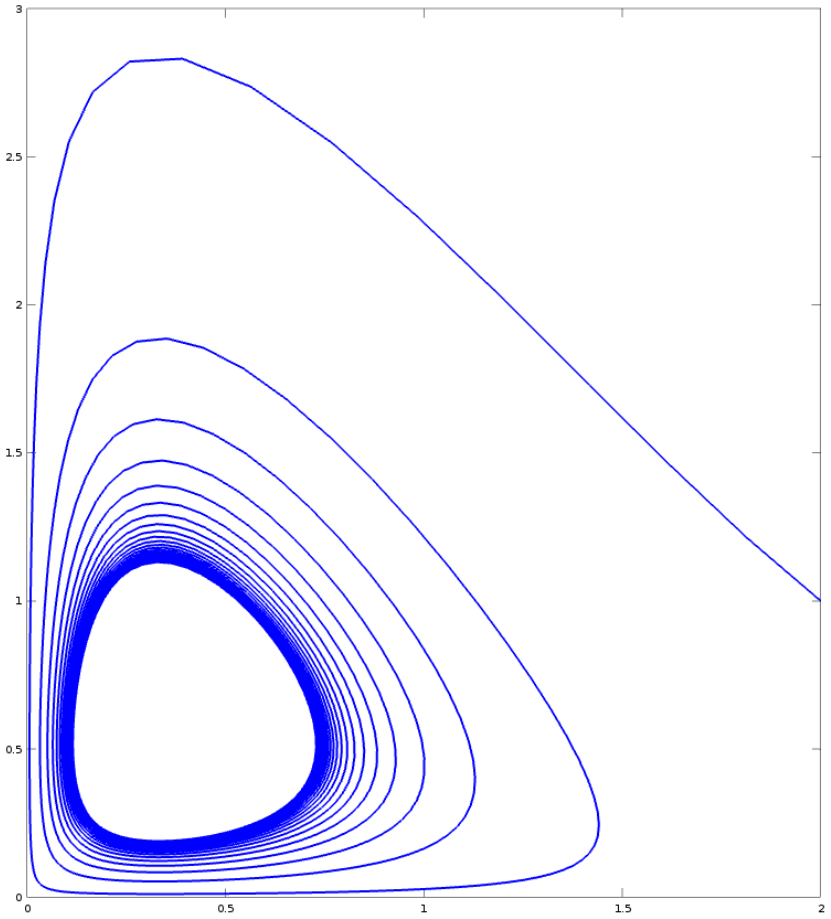


Figura 9: modelo depredador presa con ciclo límite

Podemos interpretar este gráfico como sigue:

- Supongamos que la solución comienza en un punto de la circunferencia, que define un ciclo límite del sistema.

- Ocurre un evento catastrófico, por ejemplo, una severa tormenta, que origina que la población de presas decrezca en un punto en la parte superior de la circunferencia.

- Si las soluciones se aproximan al punto de equilibrio en el primer cuadrante, tenemos que la población de presas y depredadores coexistirán en un tiempo futuro.

6. Conclusión

En los ejemplos 1 y 2, se presentan modelos poblacionales de una sola especie. A través de estos modelos, el asistente al taller será capaz de entender los conceptos de solución de una ecuación diferencial de una incógnita, así como de predecir la evolución a largo plazo de la población. Además, estos modelos permiten extender naturalmente a modelos ecológicos de dos especies, por ejemplo, el modelo de Lotka-Volterra dado en el ejemplo 3.

Paralelamente, haremos uso de Geogebra para representar gráficamente la solución (o soluciones) de una ecuación diferencial. Específicamente, trabajaremos además con los ejemplos 4, 5 y 6.

Finalmente, en la sección 5 se apreciará que pequeñas perturbaciones en un modelo poblacional afecta drásticamente a las soluciones.

Referencias

Chicone, C. (2006). *Ordinary differential equations with applications. Texts in applied mathematics.* New York: Springer.

Coddington, E., & Levinson, N. (1955). *Theory of ordinary differential equations.* New York: McGraw-Hill.

Mahaffy, J. M. (2000). *Lotka-Volterra Models*. Retrieved from https://jmahaffy.sdsu.edu/courses/f09/math636/lectures/lotka/qualde2.html

Murray, J. (2002). *Mathematical Biology I, An Introduction.* New York: Springer.

Puchuri Medina, L. (2017). Ciclos límites en modelos depredador presa. *Selecciones Matemáticas, 4*(1), 70-81.

Samanta, G., & Gómez-Aíza, R. (2014). Modelos dinámicos de poblaciones simples y de sistemas depredador presa. *Miscelánea Matemática*(58), 77-110.

Wang, D. (2006). *Differential equations with symbolic computations.* Berlin: Birkhauser.

Volver al índice de autores

2.4.4. El uso de Forms como instrumento de evaluación

Juan Raúl Egoavil Vera
Colegio María Alvarado, Perú

Resumen

El problema de la Educación en mi país radica principalmente a que la Educación es una profesión en la cual la mayoría de los docentes se ven en la necesidad de realizar otras actividades, ya que los ingresos no justifican el trabajo invertido en impartir las enseñanzas a los estudiantes y si a eso le sumamos la necesidad de invertir en actualizarnos en estrategias metodológicas y estrategias de evaluación, el problema se hace mucho más complejo. Debemos reconocer que el Ministerio de Educación está dando algunos pasos en pro de la mejora, pero ello se verá reflejado en un periodo a mediano plazo. Otro problema que tenemos en educación es que existe la educación pública y la educación privada, todo ello genera un desnivel ya que la diferencia de contenidos es abismal por ende cuando los estudiantes egresan de las aulas se frustran en muchos casos ya que no pueden ingresar a la Universidad a realizar una carrera profesional. Además, este problema de la educación coincide con los problemas sociales que afectan a nuestra juventud; delincuencia, prostitución, pandillaje, embarazos precoces, violencia familiar; si menciono ello es que según los estudios realizados esto se debe a hogares disfuncionales, y en mi país esta tasa crece año a año. Los docentes hacemos el esfuerzo necesario por brindar una educación que permita a nuestros jóvenes tener los conocimientos necesarios para que se enfrenten a nuevas oportunidades que les permita crecer no solo profesionalmente, sino emocionalmente y socialmente

1. Introducción

A la mayoría de los estudiantes la palabra evaluación les causa temor, pánico, frustración, y todo ello por el temor al fracaso, al que dirán.

Pero la evaluación ¿por qué genera ello?, la respuesta es muy simple, mide el nivel de asimilación de un conocimiento, por ello el miedo a qué nos digan te falta esto.

Pero la evaluación es necesaria en el sistema educativo porque permite recoger información sobre los conocimientos logrados por nuestros estudiantes y a la vez nos permite diagnosticar en que aspectos debemos reforzar para que el aprendizaje sea óptimo.

Desde el punto de vista educativo podemos plantear que consideramos a la evaluación como un proceso sistemático que mide y/o aprecia el logro de objetivos de todos los órdenes. La evaluación debe tener en cuenta todos los procesos de aprendizaje del estudiante y debe favorecer su capacidad de seguir aprendiendo. De este planteamiento se desprenden algunas miradas sobre la evaluación.

• La evaluación como JUICIO, que es la determinación de un juicio de valor sobre el proceso educativo.

• La evaluación como MEDICION, que es la asignación de números que permitan expresar en términos cuantitativos el grado en que el alumno posee determinados conocimientos sobre algunos aspectos de un tema.

• La evaluación como LOGRO DE OBJETIVOS, que es la determinación del grado de logro de un objetivo propuesto con anticipación.

• La evaluación como TOMA DE DECISIONES, que es el proceso de determinación del valor y/o mérito de un procedimiento educativo, que incluye la obtención de informaciones y la definición de criterios para tomar una decisión.

• La evaluación como INFORMACIÓN, que es la voluntad de aportar informaciones útiles al estudiante para sus aprendizajes.

Todo lo mencionado anteriormente refuerza la aplicación de una evaluación que permita recoger información, en un tiempo corto, que la retroalimentación sea inmediata y que exista un análisis por pregunta.

Por ello me animo a proponerles el uso del FORMS que es un formulario que permite evaluar, recoger información inmediata, procesar datos, estadísticas por pregunta.

2. Objetivos y propósitos

a) Identificar las características de la evaluación centrada en el estudiante

b) Identificar los instrumentos de evaluación más usados en el modelo centrado en el estudiante.

c) Difundir entre los docentes la evaluación virtual, como una forma de obtener información del avance académico de nuestros estudiantes.

3. La evaluación en un entorno virtual

Los ambientes virtuales de aprendizaje en la educación exigen nuevas alternativas de evaluación. Tradicionalmente podemos afirmar que la evaluación se ha centrado en el recuerdo de información y en la aplicación de conocimientos en contextos limitados, utilizando pruebas de papel y lápiz u otras tareas académicas como el ensayo escrito. Las investigaciones en "evaluación alternativa" refleja la insatisfacción con las formas tradicionales de evaluación y el deseo de evaluar el logro de objetivos de nivel superior que involucren una comprensión profunda y el uso activo de conocimientos en contextos reales y complejos. A medida que los ambientes virtuales ganan espacio en la educación crece la preocupación por las formas de evaluación. Según especialistas en educación como Reeves (2000), los ambientes virtuales de aprendizaje ofrecen un potencial enorme para mejorar la calidad de la evaluación académica tanto en la educación presencial como a distancia. Los docentes necesitan entrenamiento especial y ayuda técnica para desarrollar e implementar métodos de evaluación virtual como FORMS. A medida que la enseñanza de tipo virtual se expande, crece la percepción de la evaluación como un asunto crítico. Cualquier alternativa para mejorar la evaluación en un ambiente virtual debe tratar de alcanzar niveles óptimos de "alineación". Esta se evidencia cuando la articulación entre los objetivos de aprendizaje, el contenido, el diseño instruccional (especialmente las actividades que realizarán los estudiantes), la competencia del docente, las posibilidades tecnológicas, y la estrategia de evaluación sea lo más clara posible. Muchos de los problemas que surgen cuando se introducen nuevas tecnologías en cursos obedecen a esta falta de alineación. Por ejemplo, para un curso determinado se coloca en la plataforma virtual un programa fácilmente actualizable, acceso a recursos en-línea como revistas electrónicas, bases de

datos en tiempo real, páginas de grupo, conversaciones a través de un chat y acceso a foros de discusión. El equipo de docentes que ha desarrollado el curso puede sufrir una gran decepción al evidenciar que los estudiantes no han utilizado los recursos tecnológicos disponibles en la forma esperada. Es posible que los alumnos hayan percibido falta de "alineación", es decir no vieron una relación clara entre el uso de estos recursos y las estrategias de evaluación y calificación del curso. Por lo tanto, canalizaron sus esfuerzos hacia otras actividades de aprendizaje alineadas más claramente con la posibilidad de obtener una buena nota, tales como leer los documentos o el libro del curso, o estudiar las notas de clase. Es frecuente que los estudiantes traten de estudiar con mayor atención aquellos aspectos del curso que consideran más claramente alineados con la posibilidad de obtener una buena nota; por esto suelen hacer ciertas preguntas, que a veces molestan a los profesores, como "¿tenemos que saber esto?", o "¿va a incluir esto en el examen?". Sería recomendable publicar las respuestas a estas inquietudes en la plataforma, haciendo explícita la "alineación" o relación entre los procedimientos de evaluación y los objetivos, métodos y estrategias del curso.

4. Presentación de FORMS

Con Microsoft Forms, se puede crear encuestas, cuestionarios y sondeos y ver fácilmente los resultados a medida que van llegando.

5. Aplicación

a) Se explica cómo realizar la creación de un formulario.

b) Se ingresa un banco de preguntas (preguntas abierta y/o cerradas)

c) Se configura el formulario: fecha de apertura, fecha de cierre, preguntas aleatorias, preguntas obligatorias

d) Se resuelve un formulario (papel de estudiante) luego se observa cómo llegan los resultados (papel de docente)

e) Los profesores elaboran una evaluación en FORMS y comparten sus propuestas.

f) Se realiza una retroalimentación del taller.

Referencias

Carballo, R. (1990). *Evolución del concepto de evaluación: desarrollo de los modelos de evaluación de Programas*. Capítulo 4, (pp.423-431). Bordón,

Cabero, J. (2009). Construcción de un instrumento para la evaluación de las estrategias de enseñanza de cursos telemáticos de formación universitaria. *EDUTEC. Revista Electrónica de Tecnología Educativa*. Núm. 28 / marzo 2009

Volver al índice de autores

2.4.5. Geogebra: Una herramienta para transitar de la exposición a la interacción

Myrian Ricaldi Echevarria, Colegio Peruano Británico, Lima, Perú
Isabel Torres Céspedes, Universidad de Lima, Perú

Resumen

Este taller está dirigido a docentes del nivel secundaria y de los primeros ciclos de la universidad. A lo largo del mismo se irán planteando actividades y tareas relacionadas a los polinomios, fracciones algebraicas, ecuaciones, inecuaciones y funciones con el fin de favorecer la visualización y el aprendizaje de estas nociones. El marco teórico que se empleará será la teoría de situaciones didácticas de Brousseau. El objetivo del taller es ofrecer a los participantes posibilidades didácticas para la utilización del geogebra como recurso didáctico en el área de matemática y generar un espacio de diálogo para la construcción de conocimiento. Se pretende contribuir a la formación de futuros profesores y docentes en actividad en aspectos metodológicos y disciplinares que mejoren su práctica profesional y por ende el aprendizaje de sus estudiantes. Recomendamos el uso del programa geogebra como herramienta de apoyo para el aprendizaje de la matemática y su aplicación en el diseño de actividades didáctic

Introducción

Existen diversas herramientas que pueden ser utilizadas como apoyo para la enseñanza de las matemáticas. GeoGebra es un software gratuito de matemáticas que ofrece la posibilidad de asociar objetos geométricos, algebraicos y de cálculo para resolver problemas complejos, relacionando diversas áreas de conocimiento. También permite abordar diferentes problemas matemáticos de forma creativa y original en los diferentes niveles educativos. En este contexto, los actuales escenarios de aprendizaje deberían aprovechar las ventajas de la aplicación de tecnología en las clases de matemática, con la finalidad de crear ambientes de aprendizaje dinámicos y motivadores donde el centro del aprendizaje sea el estudiante. La tecnología no es un fin en sí mismo es parte de la metodología y debe servir como una herramienta en la construcción del aprendizaje. Creemos que la exposición como metodología es importante, pero dadas las actuales

características de los estudiantes y las demandas que el entorno exige, es necesario considerar el uso de softwares disponibles como geogebra. Diversos estudios como Rubio, L., Prieto, J., y Ortiz, J (2016) concluyen que al fusionar la modelación y las tecnologías digitales a través de la simulación se obtienen entornos de aprendizaje que promueven el desarrollo de conocimiento y habilidades de pensamiento científico en los estudiantes. Nuestra premisa es que el proceso de construcción y análisis con el programa geogebra es una verdadera oportunidad para aprender matemática y otros saberes asociados, de allí que sea importante su incorporación al aula de clase. De ninguna manera creemos que sólo la tecnología favorece el aprendizaje, son las preguntas y el planteamiento de situaciones retadoras las que favorecen estos procesos.

De lo anteriormente mencionado, el taller que proponemos mostrará diversas situaciones que permitirán reflexionar sobre la visualización algebraica y gráfica con diferentes objetos matemáticos.

Geogebra y aprendizaje de la matemática

Hoy en día las nuevas tecnologías van abriendo paso a nuevas formas de aprender y enseñar. Estas nuevas maneras pueden facilitar el aprendizaje del estudiante y, por consiguiente, conllevar mejoras en los resultados académicos. Existe muchos recursos en la red uno de ellos es el programa Geogebra, el cual no es solo un programa de geometría dinámica ya que ofrece una amplia variedad de opciones para desarrollar contenidos. Además, es gratuito y fácil de utilizar, lo que permite realizar construcciones y afrontar la resolución de problemas a través de las herramientas y las diferentes opciones que ofrece.

Este programa está en continuo desarrollo, lo que hace que cada vez que se presenta una nueva versión, aparezcan nuevas herramientas y por tanto su potencia aumenta. Otra de sus ventajas es que se puede adaptar a cualquier nivel educativo; además, el nuevo Diseño Curricular de Perú plantea desarrollar la capacidad de interactuar en entornos virtuales, en ese sentido, la utilización del programa Geogebra se convierte en una opción importante que todo profesor debe considerar.

Marco teórico

La realización del presente taller tiene como marco teórico la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (1999). Esta teoría analiza el sistema didáctico formado por el

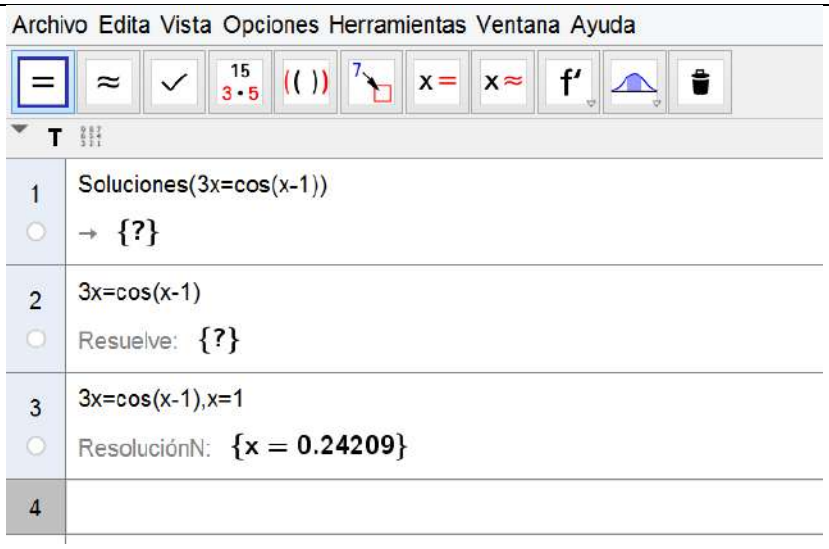
profesor, el saber y el alumno. Las situaciones didácticas son un conjunto de relaciones explícita o implícitamente establecidas entre uno o varios estudiantes, un entorno de aprendizaje (que puede incluir instrumentos de matemática) y un profesor reunidos con la finalidad de construir un conocimiento. Según Brousseau (1999), una situación didáctica es considerada como una situación problema que necesita una adaptación por parte del sujeto, una respuesta del alumno. En consecuencia, cuando se habla de una situación didáctica se refiere al conjunto de interrelaciones entre tres sujetos: profesor, estudiante y medio didáctico, donde se manifiesta directa o indirectamente la voluntad de enseñar. Por otro lado, una situación es a-didáctica cuando el maestro logra que el alumno asuma el problema planteado como propio y empiece un proceso de búsqueda autónomo, es decir, sin la intervención del profesor. Toda situación didáctica debe tener como objetivo generar una situación a- didáctica.

Actividades sugeridas

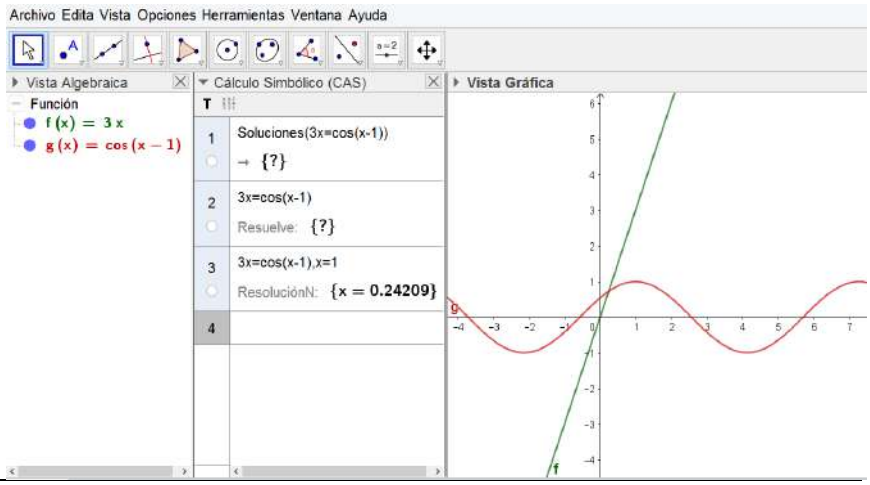
En esta propuesta se plantea actividades y tareas relacionadas a los polinomios, fracciones algebraicas, ecuaciones, inecuaciones y funciones. A continuación, se presentan situaciones relacionada a la resolución de una ecuación y a la solución de un problema que involucra la aplicación de funciones en forma dinámica utilizando diferentes registros de representación, situaciones adaptadas de Chacón, Carrillo, Amaro y Llamas (2018).

Tabla 1. *Secuencia didáctica para resolver una ecuación siguiendo las fases de Brousseau*

Fases de Brousseau	Actividad: Ecuación trigonométrica
Acción	Resuelve la ecuación: 3x= cos (x-1) utilizando las vistas CAS y gráfica.
Formulación	En pares intentan resolver lo planteado.
Validación	Socializan sus resultados. Utilizando la vista CAS:



Utilizando la vista gráfica:
Reprentan las dos funciones que corresponden a los términos de la ecuación. Luego, observan que existe un punto de intersección y, por tanto una solución posible.

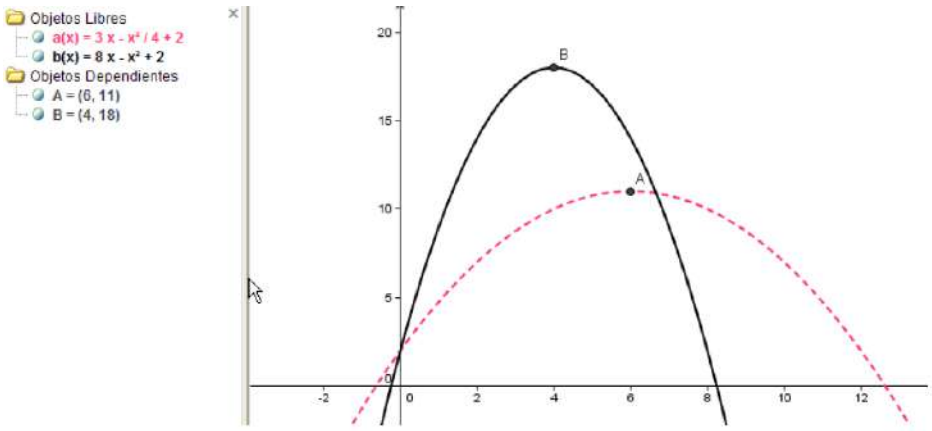


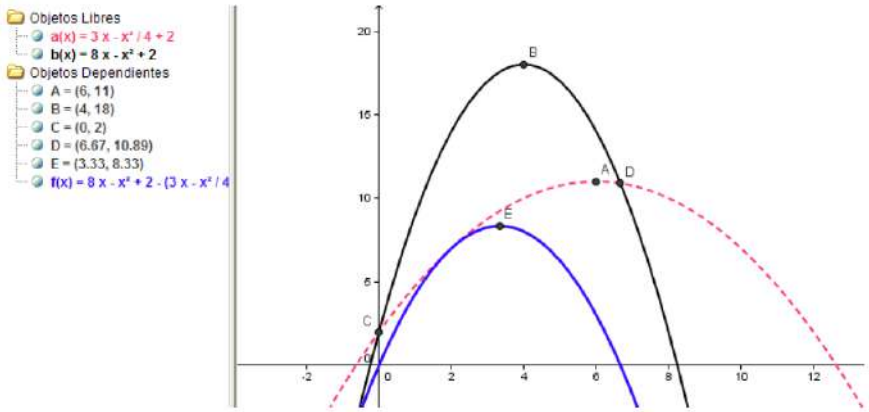
Institucionalización	El profesor interviene para aclarar la pertinencia de la utilización de cada comando.

Como complemento de la actividad anterior planteamos las siguientes preguntas:

- ¿Qué características encuentras en este tipo de funciones?
- ¿Cuáles son las características de esta tarea?
- ¿Qué aspectos de la geometría desarrolla?

Tabla 2. *Secuencia didáctica para resolver un problema de funciones siguiendo las fases de Brousseau*

Fases de Brousseau	Actividad: Ecuación trigonométrica
Acción	Una persona lanza dos bolas simultáneamente. La altura en metros de las bolas viene dada por las expresiones siguientes, en las que el tiempo está expresado en segundos. $a(t) = 3t - \frac{t^2}{4} + 2$ $\quad\quad$ $b(t) = 8t - t^2 + 2$ a. Representa la gráfica de las dos funciones. b. ¿Cuál de las dos bolas alcanza mayor altura. c. ¿En qué instante las dos bolas están a la misma altura? d. Determina, de manera aproximada, la máxima distancia entre las dos bolas y el instante en el que se alcanza.
Formulación	De manera individual intentan representar la parte (a) y de manera grupal (b), (c) y (d).
Validación	Socializan sus resultados. Utilizando la vista gráfica y algebraica:  Por tanto la mayor altura la alcanza la función b, que alcanza 18 metros mientras que a alcanza solo 11. Para determinar el instante en el que las dos bolas tienen la misma altura solo hay que encontrar los puntos de intersección, que corresponden con los puntos cuyas coordenadas son (0,2) y (6.67, 10.89). Por tanto, la misma altura se alcanza en el instante inicial y a aproximadamente a los 6.67 segundos. Para la última pregunta definimos una nueva función que corresponda a la diferencia de alturas b(t)-a(t). De esta función basta calcular el máximo para determinar la mayor distancia y el tiempo en el que produce.

	
Institucionalización	El profesor interviene para aclarar y orientar las acciones a ejecutar para responder las preguntas.

Conclusiones

La utilización del programa geogebra permite al estudiante transitar de manera natural del pensamiento concreto a cierto nivel de abstracción, favorece la comprensión y la visualización; por otro lado, el profesor complementa didácticamente la exposición con la interacción y el dinamismo que ofrece el programa. La interactividad del programa y las vistas que ofrece permiten que el estudiante relacione los diferentes registros representación y vea la matemática de manera integral.

Referencias

Brousseau G. (1999). Educación y Didáctica de las matemáticas. *En Educación Matemática.* México: Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática.

Chacón, J; Carrillo, A; Amaro, E; y Llamas, I. (2018). *Curso cálculo simbólico y gráfico con geogebra.* Thales CICA: España.

Rubio, L., Prieto, J., & Ortiz, J. (2015). La matemática en la simulación con geogebra. Una experiencia con el movimiento en caída libre. *IJERI: International Journal of Educational Research and Innovation,* (5), 90-111.

Volver al índice de autores

2.4.6. Uso de geogebra en la enseñanza y aprendizaje de las cónicas

Emilio Máximo Vera Namay
Carlos Manuel Sabino Escobar
Universidad Nacional de Tumbes; IREM-UNTUMBES, Perú

Resumen

En este taller se promoverá el uso del programa libre GeoGebra como herramienta para mejorar el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática, así como para facilitar la preparación de hojas de trabajo que los profesores utilizan en sus sesiones de enseñanza aprendizaje. Se desarrollarán actividades, con el objetivo de articular los registros de representación algebraico y geométrico de las secciones cónicas. Para ello se desarrolla una secuencia que permita a los participantes, haciendo uso del GeoGebra, resolver tareas relacionadas con la circunferencia, parábola, elipse e hipérbola; contenidos que forman parte del área curricular de matemática establecidos en el Diseño Curricular Nacional (DCN, 2009) de la Educación Básica Regular

Consideraciones iniciales

Artigue (2002) afirma que los ambientes tecnológicos utilizados estratégicamente pueden ser de gran utilidad para que los estudiantes comprueben resultados, refuercen conceptos; o puedan usarlos como herramientas para elaborar conjeturas e inferencias sobre las propiedades de objetos matemáticos representados. En el caso de los profesores, la investigadora afirma que estos ambientes tecnológicos pueden ser utilizados por el profesor como recursos para el desarrollo de su clase.

También, en cuanto al uso de ambientes tecnológicos que tiene como característica fundamental la manipulación directa y el arrastre, Olivero y Robutti (2001) y Grinkraut (2009) coinciden en afirmar que los ambientes de geometría dinámica, como el GeoGebra, poseen ventajas, entre las que señalan, por ejemplo, el lenguaje visual que es un nuevo medio de comunicación de conceptos matemáticos abstractos y la interactividad que estimula a los estudiantes a interesarse en diferentes contenidos matemáticos

GeoGebra

El GeoGebra es un software de geometría dinámica usado en la enseñanza y el aprendizaje de contenidos matemáticos y su uso puede hacerse en los diferentes niveles educativos. Este software, posee ventajas didácticas que y es considerado como un ambiente de geometría dinámica. Además, tiene dos ventanas importantes para el aprendizaje, una ventana geométrica y otra algebraica que posibilita mostrar a los estudiantes dos registros de representación de un determinado objeto matemático., Además de posibilitar el tránsito "natural" de la geometría sintética a la geometría analítica.

El uso del GeoGebra favorece el desarrollo del pensamiento geométrico de los sujetos. Porque las construcciones geométricas, que se pueden trabajar en este ambiente, permiten que los estudiantes conjeturen propiedades de los objetos geométricos representados.

Actividades del taller

Las actividades del taller se desarrollan en dos sesiones de enseñanza aprendizaje. En la primera sesión, se trabajan actividades para que el participante conozca las bondades que ofrece el GeoGebra, además de explorar algunos recursos, funciones y herramientas. En la segunda sesión se trabajarán actividades relacionadas con las cónicas mostrando en todo momento la interacción de las representaciones algebraica y geométrica. Al final se reflexionará sobre el uso correcto de estos ambientes tecnológicos en el proceso de enseñanza y de aprendizaje de la matemática, en particular de la geometría.

SESIÓN 01:

INTRODUCCIÓN AL USO DE GEOGEBRA.

ACTIVIDAD 01:

Usando el software GeoGebra grafique los puntos en la vista grafica con la herramienta  , dados en la tabla de abajo.

x	1	-3	-2	5
y	1	4	-4	3

Haciendo **clic derecho** en el punto de la vista gráfica o vista algebraica, usar la opción **propiedades: Básico, color y estilo** de punto.

También se puede ingresar el punto en la barra de entrada 

, y pulsamos **ENTER**.

ACTIVIDAD 02:

Usando el software GeoGebra grafique los siguientes segmentos en la vista grafica con la herramienta  tocando los dos puntos extremos, de los segmentos dados.

$$\overline{AB}\,;\overline{BC}\,;\overline{CD}\ y\ \overline{DA}$$

Haciendo **clic derecho** en el segmento de la vista gráfica o vista algebraica, usar la opción **propiedades: Básico, color y estilo** del segmento.

También se puede ingresar el segmento en la barra de entrada 

, y pulsamos **ENTER**.

ACTIVIDAD 03:

Usando el software GeoGebra grafique los siguientes rectas perpendiculares en la vista grafica con la herramienta  que pasa por el punto dado y esperpendicular al segmento o recta dada.

Trazar una recta perpendicular que pasa por el punto $A \perp \overline{BC}$

Trazar una recta perpendicular que pasa por el punto $B \perp \overline{CD}$

Trazar una recta perpendicular que pasa por el punto $D \perp \overline{BC}$

Trazar una recta perpendicular que pasa por el punto $A \perp \overline{CD}$

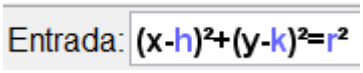
Haciendo **clic derecho** en recta perpendicular de la vista gráfica o vista algebraica, usar la opción **propiedades: Básico, color y estilo** del segmento.

SESIÓN 02:

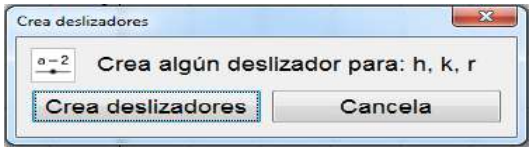
CIRCUNFERENCIA.

ACTIVIDAD 01:

Usando software GeoGebra graficaremos la circunferencia dada en su forma ordinaria.

Primero: En la barra de entrada 

ingresamos la siguiente relación con dos variables y pulsamos **ENTER**.

Segundo: Aparece la ventana 

, damos **clic** en ***crea deslizadores***, y en el registro grafico aparecen los deslizadores que no son más que los parámetros h, k y r.

Tercero: En la barra de entrada 

digitamos centro y elegimos la primera opción y en lugar de la palabra cónica ponemos la letra c, y pulsamos **ENTER,** y aparece el centro de la circunferencia en el registro gráfico.

Cuarto: Con la herramienta 

, colocamos un punto sobre la circunferencia y después trazamos con la barra de herramienta  el segmento del centro de la circunferencia con el punto que esta sobre la circunferencia. Después damos **clic** derecho y **clic** en animación. Así mismo en el segmento (radio), damos **clic** derecho y vamos a **propiedades, básico, Nombre: valor**.

ACTIVIDAD 02:

Usando GeoGebra resolver los siguientes ejercicios relacionados con la circunferencia.

1. Calcula la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el punto de intersección de las rectas $-x+3y-3=0$, $x+y-5=0$, y su radio es igual a 4.

2. Determinar las coordenadas del centro y del radio de la circunferencia: $2x^2+2y^2-4x+12y-30=0$.

3. Hallar la ecuación de la circunferencia concéntrica con la ecuación: $x^2-4x+2y-4=0$ y que pasa por el punto $(-1;3)$.

4. Hallar la ecuación de la circunferencia concéntrica a la circunferencia $x^2+y^2-4x+6y-17=0$ que sea tangente a la recta: $x-4y+12=0$.

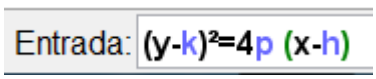
5. Hallar la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo de vértices $A(1;-2)$, $B(4;-1)$, $C(6;5)$.

6. Los extremos del diámetro de una circunferencia son los puntos $A(-3;2)$ y $B(4;-1)$. ¿Cuál es la ecuación de esta circunferencia?

SESIÓN 03:

PARÁBOLA.

Usando software GeoGebra graficaremos la parábola dada en su forma ordinaria.

Primero: En la barra de entrada 

ingresamos la siguiente relación con dos variables y pulsamos **ENTER**.

Segundo: Aparece la ventana 

, damos **clic** en ***crea deslizadores***, y en el registro grafico aparecen los deslizadores que no son más que los parámetros h, k y p.

Tercero: En la barra de entrada 

digitamos foco y elegimos la primera opción y en lugar de la palabra cónica ponemos la letra c, y pulsamos **ENTER,** y aparece el foco de la parábola en el registro gráfico.

Cuatro: En la barra de entrada 

digitamos vértice y elegimos la primera opción y en lugar de la palabra cónica ponemos la letra c, y pulsamos **ENTER,** y aparece el vértice de la parábola en el registro gráfico.

Cinco: En la barra de entrada 

digitamos directriz y elegimos la primera opción y en lugar de la palabra cónica ponemos la letra c, y pulsamos **ENTER,** y aparece la recta directriz de la parábola en el registro gráfico.

Seis: Con la herramienta 

, colocamos un punto sobre la parábola y después trazamos con la barra de herramienta  trazamos el segmento del punto que esta sobre la parábola con el foco de la parábola. Después trazamos con la herramienta  una recta perpendicular a la recta directriz, y que pasa por el punto que esta sobre la parábola; seguido con la herramienta  encontramos el punto de intersección de la recta perpendicular con la recta directriz, ocultamos la recta perpendicular, y con la herramienta  trazamos el segmento desde el punto que esta sobre la parábola y el punto de intersección de la recta perpendicular con la recta directriz. Así mismo en el segmento damos **clic** derecho y vamos a **propiedades, básico, valor**.

ACTIVIDAD 02:

Usando GeoGebra resolver los siguientes sistemas de inecuaciones lineales con dos variables.

1. Una parábola cuyo vértice está en el origen y cuyo eje coincide con el eje de las ordenadas y pasa por el punto $(4;-2)$. Hallar la ecuación de la parábola, las coordenadas de su foco, la ecuación de la directriz, longitud de su lado recto y trazar la gráfica correspondiente.

2. Hallar el vértice, el foco, la ecuación de la directriz y la gráfica de la parábola cuya ecuación es $(y-3)^2=-12(x+5)$.

3. Obtener la ecuación y la gráfica de la parábola cuya directriz es la recta que tiene por ecuación $y+5=0$ y su foco es el punto $(-1;3)$.

4. Obtener la ecuación y la gráfica de la parábola cuyo foco es el punto $(8;-3)$ y su vértice $(8;1)$.

5. Obtener la ecuación y la gráfica de la parábola cuya directriz es la recta que tiene por ecuación $y-3=0$ y su vértice es el punto $(8;10)$.

6. Del ejercicio anterior obtener el lado recto.

SESIÓN 04:

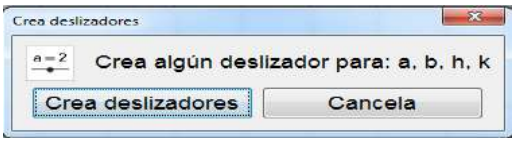
ELIPSE.

ACTIVIDAD 01:

Usando software GeoGebra graficaremos la elipse dada en su forma ordinaria.

Primero: En la barra de entrada 

ingresamos la siguiente relación con dos variables y pulsamos **ENTER**.

Segundo: Aparece la ventana 

, damos **clic** en ***crea deslizadores***, y en el registro grafico aparecen los deslizadores que no son más que los parámetros h, k, a y b.

Tercero: En la barra de entrada 

digitamos vértices y elegimos la primera opción y en lugar de la palabra cónica ponemos la letra c, y pulsamos **ENTER,** y aparece los vértices de la elipse en el registro gráfico.

Cuatro: En la barra de entrada 

digitamos foco y elegimos la primera opción y en lugar de la palabra cónica ponemos la letra c, y pulsamos **ENTER,** y aparece los focos de la elipse en el registro gráfico.

Cinco: En la barra de entrada 

digitamos centro y elegimos la primera opción y en lugar de la palabra cónica ponemos la letra c, y pulsamos **ENTER,** y aparece el centro de la elipse en el registro gráfico.

Seis: Con la herramienta 

, colocamos un punto sobre la elipse y después con la barra de herramienta  trazamos los respectivos segmentos del punto que esta sobre la elipse con cada uno de los focos de dicha elipse, observamos que en el registro algebraico aparece el nombre y valor de cada uno de los segmentos. Si en la barra de entrada ingresamos los nombres como suma y pulsamos **ENTER**, visualizamos la nombre y valor de la suma en el registro algebraico.

ACTIVIDAD 02:

Usando GeoGebra resolver los siguientes sistemas de inecuaciones lineales con dos variables.

1. Obtener el centro, los vértices, los focos y la gráfica de la elipse cuya ecuación es $9x^2+16y^2=144$.

2. Obtener el centro, los vértices, los focos y la gráfica de la elipse cuya ecuación es $\frac{(x-8)^2}{25}+\frac{(y-9)^2}{49}=1$.

3. Obtener la ecuación ordinaria y la gráfica de la elipse cuyos focos son los puntos $(-5;7)\ y\ (5;7)$ y sus vértices $(-10;7)\ y\ (10;7)$.

4. Realizar la gráfica de la siguiente elipse y reconocer los vértices, focos y longitudes del eje mayor y menor. $16x^2+25y^2+32x-100y-284=0$

5. Realizar la gráfica de la siguiente elipse y reconocer los vértices, focos y longitudes del eje mayor y menor. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$.

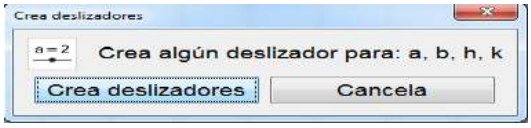
SESIÓN 05:

HIPÉRBOLA

Usando software GeoGebra graficaremos la hipérbola dada en su forma ordinaria.

Primero: En la barra de entrada 

ingresamos la siguiente relación con dos variables y pulsamos **ENTER**.

Segundo: Aparece la ventana 

, damos **clic** en ***crea deslizadores***, y en el registro grafico aparecen los deslizadores que no son más que los parámetros h, k, a y b.

Tercero: En la barra de entrada 

digitamos foco y elegimos la primera opción y en lugar de la palabra cónica ponemos la letra c, y pulsamos **ENTER,** y aparece los focos de la hipérbola en el registro gráfico.

Cuatro: En la barra de entrada 

digitamos vértices y elegimos la primera opción y en lugar de la palabra cónica ponemos la letra c, y pulsamos **ENTER,** y aparece los vértices de la hipérbola en el registro gráfico.

Cinco: En la barra de entrada 

digitamos centro y elegimos la primera opción y en lugar de la palabra cónica ponemos la letra c, y pulsamos **ENTER,** y aparece el centro de la hipérbola en el registro gráfico.

Seis: En la barra de entrada 

digitamos asíntota y elegimos la primera opción y en lugar de la palabra cónica ponemos la letra c, y pulsamos **ENTER,** y aparecen las asíntotas de la hipérbola en el registro gráfico y algebraico.

Siete: Con la herramienta 

, colocamos un punto sobre la hipérbola y después con la barra de herramienta  trazamos los respectivos segmentos del punto que esta sobre la hipérbola con cada uno de los focos de dicha hipérbola, observamos que en el registro algebraico aparece el nombre y valor de cada uno de los segmentos. Si en la barra de entrada ingresamos los nombres como diferencia y pulsamos **ENTER**, visualizamos la nombre y valor de la diferencia en el registro algebraico.

ACTIVIDAD 02:

Usando GeoGebra resolver los siguientes sistemas de inecuaciones lineales con dos variables.

1. Obtener el centro, los vértices, los focos, ecuaciones de las asíntotas y la gráfica de la hipérbola cuya ecuación es $\frac{y^2}{64}-\frac{x^2}{36}=1$.

2. Obtener la ecuación ordinaria y la gráfica de la hipérbola cuyos focos son los puntos $(-5;0)\ y\ (5;0)$ y sus vértices $(-2;0)\ y\ (2;0)$.

3. Obtener el centro, los vértices, los focos, ecuaciones de las asíntotas y la gráfica de la hipérbola cuya ecuación es $\frac{(x+8)^2}{16}-\frac{(y-7)^2}{25}=1$.

4. Obtener el centro, los vértices, los focos, ecuaciones de las asíntotas y la gráfica de la hipérbola cuya ecuación es $16x^2-9y^2=144$.

5. Obtener el centro, los vértices, los focos, ecuaciones de las asíntotas y la gráfica de la hipérbola cuya ecuación es $x^2-y^2=1$.

Referencias

Artigue, M. (2002). Learning Mathematics in a CAS Environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning 7*. Kluwer Academic Publishers, 245-274.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN (2008). *Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular*. Lima, Perú.

Grinkraut, M. L. (2009). *Formação de professores envolvendo a prova matemática: um olhar sobre o desenvolvimento profissional*. Tesis doctoral, Pontifícia Universidad Católica de São Paulo. São Paulo, Brasil.

Malaspina, U. J.; Gaita, C.; Ugarte, F.; Salazar, J. V. F.; Vallejo, E. (2014). *Reflexiones y propuestas en educación matemática*. Ed. Moshera. Lima, Perú

Soo, T. (2010). *Matemática Aplicadas a los Negocios, las Ciencias Sociales y de la Vida*; 5ta. Edición; México.

Volver al índice de autores

2.4.7. Uso de herramientas en geogebra para el diseño de recursos educativos digitales

Diana Marcela Duarte Rojas
Jessica Alejandra Guevara Estupiñan
William Alfredo Jiménez Gómez
Universidad Pedagógica Nacional, Colombia

Resumen

Este taller tiene como objetivo mostrar a docentes de matemáticas (formación y profesionales) a programar recursos digitales en el software GeoGebra con un ambiente llamativo y funcional para enseñar tratamiento de funciones. Para esto, se mostrará el uso de algunas herramientas que GeoGebra nos ofrece mientras se diseña un recurso educativo digital aprovechable dentro del aula, con el fin de evidenciar la importancia de manejar la tecnología en el salón de clases de una manera controlada, como medio para agilizar procedimientos y facilitar los procesos de abstracción en los estudiantes.

Introducción

El Instituto GeoGebra Bogotá trabaja de la mano con la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia) para impulsar el uso de GeoGebra en la ciudad, puesto que al ser una herramienta con potencial pedagógico se hace deber de los docentes difundirlo en la comunidad académica y así enriquecer la educación matemática.

En el qué hacer docente se hace necesario utilizar Recursos Educativos Digitales, entendidos como "todo tipo de material que tiene una intencionalidad y finalidad enmarcada en una acción Educativa, cuya información es Digital" (Tobergte & Curtis, 2013, p. 18), para esto se cuenta con diferentes paquetes digitales, entre estos GeoGebra (Hernández, 2010), el cual *es un software libre de matemática para educación que reúne dinámicamente, aritmética, geometría, álgebra y cálculo,* – además – *ofrece representaciones diversas de los objetos desde cada una de sus posibles perspectivas,* – es de resaltar que – *a recibido numerosas distinciones y ha sido galardonado en Europa y USA en organizaciones y foros de software educativo.*

Es importante destacar que al diseñar un ambiente virtual para estudiantes, se hace necesario que este se vea agradable, para esto el orden y el uso de los colores se hace indispensable: en el primero, saber organizar las diferentes ventanas que este software nos ofrece, le permitimos al estudiante no saturarse de información y comprender el objeto matemático que se desea tratar, el segundo, debido a que los colores pueden llegar a ser facilitadores para el proceso de enseñanza-aprendizaje, puesto que generar un impacto en los estudiantes debe saberse manejar para que sea positivo (Hernández, 1870).

Otro aspecto que es importante tratar en el momento de diseñar un recurso educativo digital es reconocer cuál será el objetivo del mismo, de esta manera garantizaremos que lo que se presente en el mismo no desvíe la atención de los estudiantes a otros temas, esto porque el uso de la tecnología dentro del aula se plantea como una estrategia para agilizar procesos y como un medio para hacer más claros procesos de abstracción. En ese sentido, no marcar un objetivo genera desorden en la presentación del recurso educativo digital y confusión en el discurso del docente que lo utilice.

Un claro ejemplo de lo anterior, es la actividad propuesta por Rey, Serrano, Rojas y Jiménez (2013) en donde el objetivo fue comprobar los conocimientos que los estudiantes habían obtenido acerca de la transformación de funciones, para esto propusieron recrear un paisaje simple (un barco en el mar) haciendo uso del objeto matemático, restringiéndolo tanto en su dominio como en el rango. El éxito de la actividad dependía de qué tan acertados eran los conocimientos que habían adquirido los estudiantes, eso quiere decir que, si el objetivo hubiera sido conceptualizar esta información, no habría tenido un buen resultado.

Según Jiménez (2018), los recursos que se diseñan en el software GeoGebra se pueden clasificar según su objetivo en el proceso de enseñanza en: aplicativos de conjetura, de acompañamiento, calculadoras, aprendizaje autónomo y evaluativos. El recurso que se diseñará en el taller se encasilla en el de acompañamiento, puesto que "su propósito es ser un material de apoyo o soporte a las explicaciones dadas por el docente" (Jiménez, 2018, p. 4).

Desarrollo del taller

En el desarrollo del taller se mostrará a los participantes cómo manipular diferentes herramientas que GeoGebra nos ofrece, tales como: texto, botón, casillas de control, contadores, función "Si", casillas de texto, propiedades de las ventanas y gráficas, para

generar recursos educativos digitales funcionales dentro del aula de clase. Para esto se hace necesario contar con dos sesiones en las cuales se manipularán dichas herramientas diseñando un programa funcional sobre tratamiento de funciones.

ACTIVIDAD 1: se mostrará el funcionamiento de la herramienta texto, cómo insertarlo, modificarlo y programarlo:

Se pedirá a los participantes que ingresen a GeoGebra y activen la herramienta “Texto”.

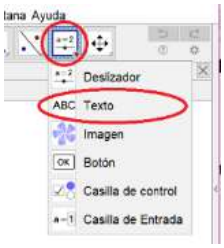


Ilustración 2. Duarte, D. Guevara & A., Jiménez, W. 2018. Indicación. Fuente: Propia.

Al hacer clic en cualquier parte de la Vista Gráfica, aparecerá la siguiente pantalla, en la cual debemos seleccionar la casilla correspondiente a “Texto LaTeX”.

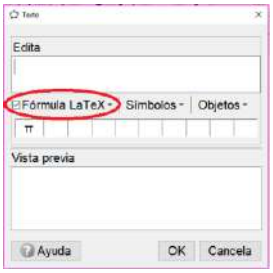


Ilustración 3 Duarte, D. Guevara & A., Jiménez, W. 2018. Indicación. Fuente: Propia.

Después escribirán el texto en la casilla edita y se verificará en Vista Previa, después harán clic en “Ok”.

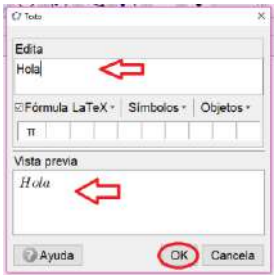


Ilustración 4 Duarte, D. Guevara & A., Jiménez, W. 2018. Indicación. Fuente: Propia.

Finalmente, como resultado se obtendrá la siguiente pantalla, en la cual se podrán modificar elementos como color y tamaño:



Ilustración 5 Duarte, D. Guevara & A., Jiménez, W. 2018. Indicación. Fuente: Propia.

Volverán a activar la casilla “Texto” y escribirán un texto con espacio, con la finalidad de ver el funcionamiento del texto LaTeX:

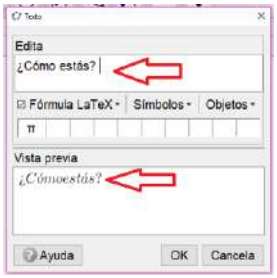


Ilustración 6 Duarte, D. Guevara & A., Jiménez, W. 2018. Indicación. Fuente: Propia.

Al tener la necesidad de hacer visible el espacio entre las dos palabras, se debe ubicar el cursor en dónde se necesita el espacio y elegir en el menú desplegable de LaTeX “espacio”.

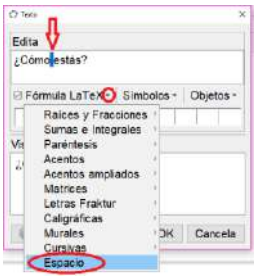


Ilustración 7 Duarte, D. Guevara & A., Jiménez, W. 2018. Indicación. Fuente: Propia.

Aparecerán estos signos, los cuales corresponden a la programación en LaTeX, de esta manera se mostrará que no es necesario saber este lenguaje de programación para lograr mostrar en la ventana un texto con una mejor presentación.

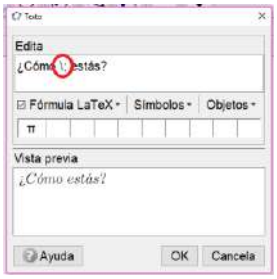


Ilustración 8 Duarte, D. Guevara & A., Jiménez, W. 2018. Indicación. Fuente: Propia.

Ahora, ingresarán la función $f(x) = x$ en la barra de entrada.

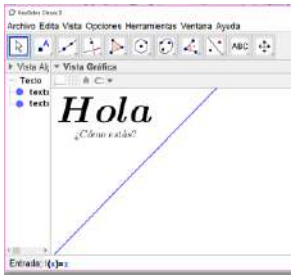
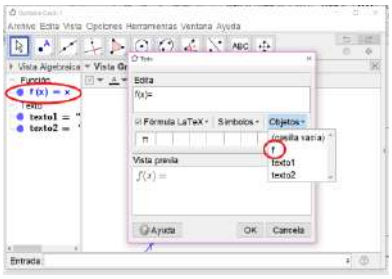
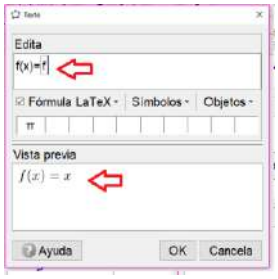


Ilustración 9 Duarte, D. Guevara & A., Jiménez, W. 2018. Indicación. Fuente: Propia.



Volverán a agregar un texto de la misma manera que al inicio, escribiendo "$f(x) =$", desplegarán el menú de "Objetos" y se buscará la función "f".

Ilustración 10 Duarte, D. Guevara & A., Jiménez, W. 2018. Indicación. Fuente: Propia.



Aparecerá en el espacio de edición el objeto y en la Vista Previa la función que habíamos ingresado.

Ilustración 11 Duarte, D. Guevara & A., Jiménez, W. 2018. Indicación. Fuente: Propia.

ACTIVIDAD 2: se mostrará el funcionamiento de los botones, su programación, diseño, cambio ubicación entre pantallas:

Para abrir la Vista Gráfica 2, se desplegará el menú Vista y se hará clic en “Vista Gráfica 2”.

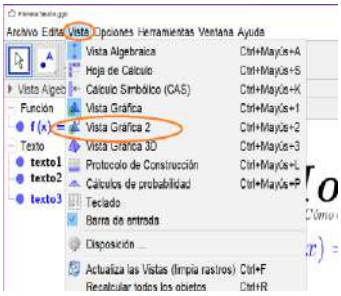
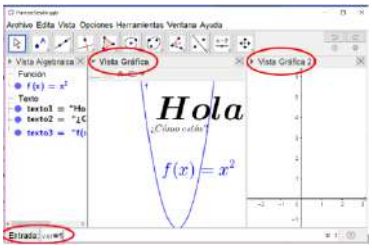


Ilustración 12 Duarte, D. Guevara & A., Jiménez, W. 2018. Indicación. Fuente: Propia.

Se visualizarán las dos ventanas (Gráfica y Gráfica 2), además de la vista algebraica.



Se ingresará un contador **ver** en la barra de entrada.

Ilustración 13 Duarte, D. Guevara & A., Jiménez, W. 2018. Indicación. Fuente: Propia.

Aparecerá **ver=1** en la vista algebraica como número.

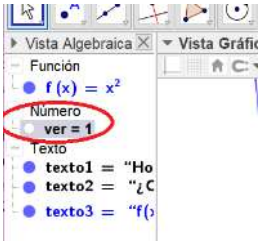


Ilustración 14 Duarte, D. Guevara & A., Jiménez, W. 2018. Indicación. Fuente: Propia.

Ahora activarán la herramienta botón.

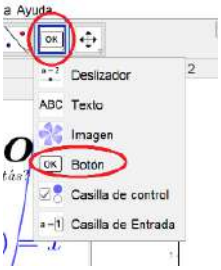


Ilustración 15 Duarte, D. Guevara & A., Jiménez, W. 2018. Indicación. Fuente: Propia.

Al hacer clic en cualquier parte de la pantalla aparecerá el recuadro que se muestra en la imagen. En el espacio "Rótulo" se escribirá el nombre del botón, y en "Guion (script) de GeoGebra" se programará, en este caso se escribirá **ver=1**.

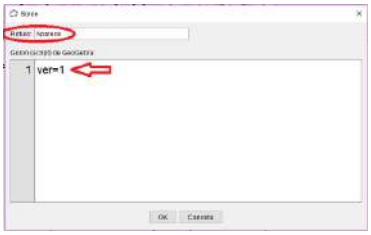


Ilustración 16 Duarte, D. Guevara & A., Jiménez, W. 2018. Indicación. Fuente: Propia.

Al dar clic en "OK" aparecerá el botón en una de las vistas.



Ilustración 17 Duarte, D. Guevara & A., Jiménez, W. 2018. Indicación. Fuente: Propia.

Ahora se condicionará el texto para que aparezca cuando se haga clic en el botón **aparece.** Para esto haremos clic izquierdo, y se seleccionará la opción **propiedades.**



Ilustración 18 Duarte, D. Guevara & A., Jiménez, W. 2018. Indicación. Fuente: Propia.

En la ventana emergente se seleccionará la pestaña "Avanzado". Y en "Condición para mostrar el objeto", se escribirá el número asignado al botón (ver=1).



Ilustración 19 Duarte, D. Guevara & A., Jiménez, W. 2018. Indicación. Fuente: Propia.

Como Ver es 1, se observará que el texto se muestra.

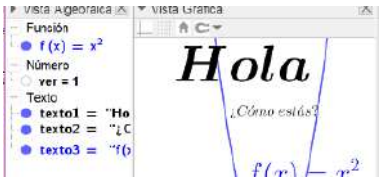


Ilustración 20 Duarte, D. Guevara & A., Jiménez, W. 2018. Indicación. Fuente: Propia.

ACTIVIDAD 3: se mostrará cómo funcionan las casillas de entrada para modificar los objetos matemáticos que están en la pantalla:

Seleccionaremos la herramienta “Casilla de Entrada” en el penúltimo ícono de la barra de herramientas.

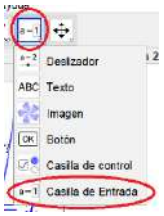


Ilustración 21 Duarte, D. Guevara & A., Jiménez, W. 2018. Indicación. Fuente: Propia.

Se da clic en cualquier parte de las vistas y aparecerá la siguiente ventana, en la cual se escribirá en Rótulo “f(x)” y en “Objeto vinculado” daremos clic en la flecha y elegiremos el objeto que asociaremos.

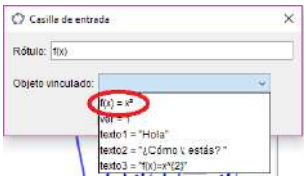


Ilustración 22 Duarte, D. Guevara & A., Jiménez, W. 2018. Indicación. Fuente: Propia.

En la vista veremos lo siguiente:



Ilustración 23 Duarte, D. Guevara & A., Jiménez, W. 2018. Indicación. Fuente: Propia.

Se aclarará que cada vez que se modifique la casilla de entrada la función asociada se cambiará, al igual que el texto escrito.

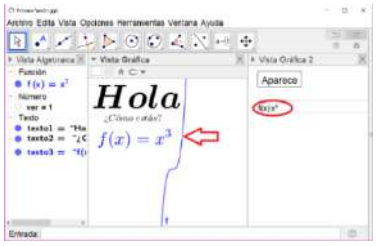


Ilustración 24 Duarte, D. Guevara & A., Jiménez, W. 2018. Indicación. Fuente: Propia.

Ahora se mostrará cómo funcionan las casillas de control sobre los objetos:

Seleccionaremos la herramienta “Casilla de Control” en el penúltimo ícono de la barra de herramientas.



Ilustración 25 Duarte, D. Guevara & A., Jiménez, W. 2018. Indicación. Fuente: Propia.

Daremos clic en cualquier parte de la pantalla y aparecerá la siguiente ventana, en la cual se asignará el nombre en la entrada “Rótulo”, en este caso: “Mostrar”.

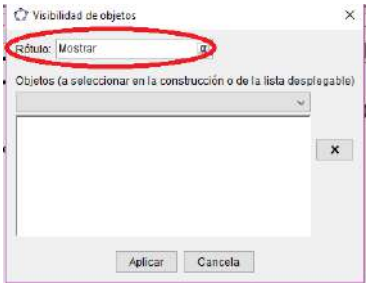


Ilustración 26 Duarte, D. Guevara & A., Jiménez, W. 2018. Indicación. Fuente: Propia.

En la pantalla visualizaremos lo siguiente:



Ilustración 27 Duarte, D. Guevara & A., Jiménez, W. 2018. Indicación. Fuente: Propia.

Harán clic izquierdo en el texto: *¿Cómo estás?* Y en la lista que se desplegará se seleccionará la opción "propiedades".

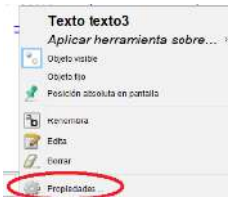


Ilustración 28 Duarte, D. Guevara & A., Jiménez, W. 2018. Indicación. Fuente: Propia.

En la ventana que emerge se hará clic en la pestaña "Avanzado" y se pondrá como condición para mostrar que a sea verdadera.

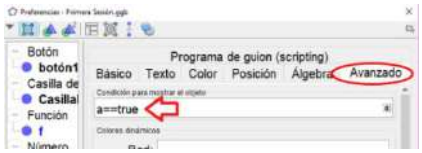


Ilustración 29 Duarte, D. Guevara & A., Jiménez, W. 2018. Indicación. Fuente: Propia.

Ahora cada vez que se seleccione la casilla de control aparecerá ☑, lo que indicará que el texto se debe mostrar. Al deseleccionarla, el texto desaparecerá automáticamente.

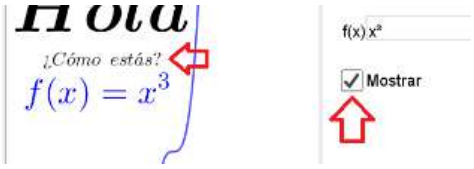


Ilustración 30 Duarte, D. Guevara & A., Jiménez, W. 2018. Indicación. Fuente: Propia.

ACTIVIDAD 4: se mostrará el uso de la función "si" para gráficas:

Se ingresará la función $g(x) = x + 3$



Ilustración 31 Duarte, D. Guevara & A., Jiménez, W. 2018. Indicación. Fuente: Propia.

En la casilla de entrada digitamos el comando *Si*, en la lista que se desplegará elegiremos la siguiente:

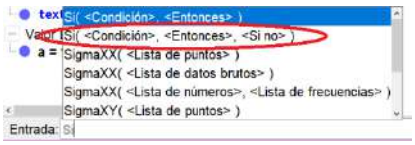
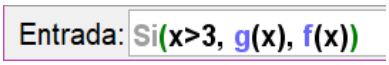


Ilustración 32 Duarte, D. Guevara & A., Jiménez, W. 2018. Indicación. Fuente: Propia.



Y se restringirá con siguientes parámetros:

Ilustración 33 Duarte, D. Guevara & A., Jiménez, W. 2018. Indicación. Fuente: Propia.

Aparecerá la función en la vista gráfica y en la algebraica de la siguiente manera:

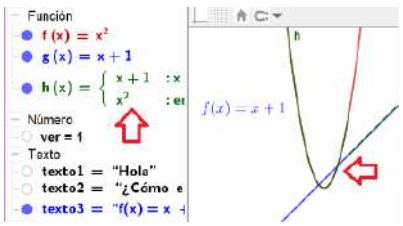


Ilustración 34 Duarte, D. Guevara & A., Jiménez, W. 2018. Indicación. Fuente: Propia.

Se ocultarán las funciones f y g, y se verá así la función que restringimos:

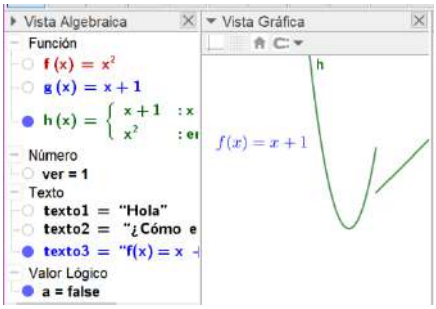


Ilustración 35 Duarte, D. Guevara & A., Jiménez, W. 2018. Indicación. Fuente: Propia.

De esta manera, al finalizar el taller cada participante habrá diseñado un recurso en el cual se tratan funciones haciendo uso de diferentes herramientas de GeoGebra, y estará en la capacidad de diseñar recursos educativos digitales propios sin tener mayores inconvenientes.

Referencias

Hernández. (2010, May). ¿ Qué es GeoGebra ? *Temas Para La Educación*, *8*, 5. Retrieved from https://www.feandalucia.ccoo.es/docu/p5sd7158.pdf

Hernández, G. O. (1870). El Color: Un Facilitador Didáctico, 1–24.

Jiménez, W. (2018). Categorización de aplicaciones para la enseñanza de las matemáticas escolares: el caso de GeoGebra. Bogotá D.C.: Nury Bulla. Retrieved from http://funes.uniandes.edu.co/10090/

Rey, R., Serrano, G., Rojas, S., & Jiménez, W. (2013). Una propuesta de clase con GeoGebra: el dominio, rango y la transformación de funciones construyendo animaciones, 159–162. Retrieved from http://funes.uniandes.edu.co/6618/

Tobergte, D. R., & Curtis, S. (2013). Políticas de Integración de TIC en sistemas Educativos. *Journal of Chemical Information and Modeling*, *53*(9), 1689–1699. https://doi.org/10.1017/CBO9781107415324.004

Volver al índice de autores

2.4.8. Resolución de problemas de ecuaciones diferenciales utilizando geometría dinámica

Maritza Luna Valenzuela
Elton Jhon Barrantes Requejo
Edwin Villogas Hinostroza
Grupo de Investigación TecVEM-IREM PUCP, Perú

Resumen

En este taller se han diseñado actividades teniendo en cuenta la influencia de la tecnología en la educación matemática y la visualización de los contenidos, por tal motivo nos hemos basado en el enfoque instrumental de Rabardel que se ha utilizado en varias investigaciones. Nuestras actividades incluyen ejercicios y problemas de ecuaciones diferenciales lineales. Nuestro objetivo es identificar las acciones que realizan los participantes cuando exploran las propiedades de las ecuaciones diferenciales lineales, con el programa el GeoGebra. Mediante la socialización de experiencias entre los participantes, se espera que adopten una postura reflexiva valorando los aportes de la implementación del Software.

Metodología

El taller está dirigido a profesores de matemática del nivel universitario y en formación con conocimientos de GeoGebra a nivel básico. El desarrollo del taller se divide en dos sesiones (de 90 minutos cada una). En la primera sesión, los participantes explorarán el GeoGebra a partir de la resolución de algunas ecuaciones diferenciales lineales. Incluimos también la realización de gráficas de los campos de direcciones. En la segunda sesión, determinaremos la solución de problemas que requieren el uso herramientas y métodos para resolver ecuaciones diferenciales. Los participantes también realizarán simulaciones haciendo uso del CAS (Cálculo simbólico) del GeoGebra.

Marco teórico

Como nos interesa construir el campo de direcciones de una ecuación diferencial pensamos que las herramientas y recursos que ofrecen los entornos de geometría dinámica como el GeoGebra puede favorecer la visualización y la apropiación de algunas propiedades de

objetos geométricos. Creemos también, que las herramientas y recursos de este ambiente, permiten que las propiedades de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO), nuestro artefacto, pueden transformarse en instrumentos para sus usuarios (estudiantes y profesores) de acuerdo con el abordaje instrumental de Rabardel (1995).

Aspectos del Enfoque Instrumental

Para analizar las actividades descritas en este taller, hemos considerado el enfoque instrumental de Rabardel (1995). En dicho enfoque tomaremos los términos que haremos uso en el presente artículo, y que consideramos pertinentes para su descripción.

El autor considera que todo objeto material fabricado no debiera denominarse objeto tecnológico, debido a que esta denominación está muy centrada en el enfoque tecnocéntrico que sitúa a la tecnología como elemento principal del sistema y no contiene ninguna referencia a lo humano. En este enfoque tecnocéntrico el hombre ocupa una posición residual, el hombre es ineficiente, costoso e inoperante. Su función es atender a aquellas necesidades que no pudieron ser sistematizadas. En contraposición, agrega el autor, los productos que provienen de la tecnología no son puramente técnicos, y deben ser atendidos desde el punto de vista antropotécnico, es decir, los objetos y los sistemas de los que estamos rodeados no deben solo ser aprehendidos a partir de las tecnologías que los han hecho nacer. En ese sentido, estamos de acuerdo con Castro (2012) cuando indica que el hombre es un ser orgánicamente desvalido, es decir, que su constitución biológica no le permite estar dotado con órganos que se adecúen al medio ambiente natural, mantiene una ausencia de especialización orgánica, no puede volar, su pelaje no está revestido para enfrentarse a la intemperie, tampoco posee órganos que le permiten enfrentarse a una pelea o a un ataque. Las circunstancias obligan a que el hombre cree un ambiente independiente de su estatus orgánico. En ese sentido la técnica cumple una labor muy importante en su ciclo biológico que le ha posibilitado sobrevivir en una naturaleza muy hostil. Sin embargo, no es la tecnología lo que ha conservado a la especie humana, no son las herramientas fabricadas por el hombre lo que ha permitido se sostenga durante su evolución, sino un conjunto de acciones y conductas organizadas con un objetivo preciso. Como lo indica el autor:

> *La técnica, en este caso, no son las herramientas que el hombre fabrica, sino el conjunto de acciones coordinadas, estratégicas, reglamentadas y orientadas al logro de una finalidad precisa. Podríamos decir que la técnica es producto de la inteligencia práctica del hombre, aquella que le permite "disponer" del entorno y someterlo a sus necesidades vitales. No es, entonces, que el hombre haga "uso" de la técnica, sino que el hombre es, en sí mismo, un animal técnico. (p.65)*

Rabardel (1995) considera que un objeto tecnológico debiera ser llamado artefacto, por tratarse de un término neutral, el cual se enriquece con las situaciones de acción donde ha sido insertado de manera circunstancial o intencional como medio de su acción. Según el autor, el artefacto, material o simbólico, no tiene ninguna relación con el objeto al que se dirige, pero ha sido elaborado con alguna intención para transformar a un determinado objeto al cual va dirigida la acción por medio del artefacto y concreta una solución a un problema dado o a un problema social. Además, indica que el sujeto lleva consigo ciertos esquemas de uso, destrezas o habilidades que su medio le ha consignado y con los cuales se dirige al artefacto. Entonces, con este conjunto de acciones se inicia el proceso de instrumentalización, en el cual el sujeto se dirige al artefacto al cual quiere conocer, movilizando sus esquemas de uso (EU). Además, el autor, lo describe como un proceso de instrumentalización, referido al surgimiento, evolución y atribución de las propiedades del artefacto. Simultáneamente, mientras va manipulando el objeto, emergen los esquemas de acción instrumentada (EAI) que son aquellas acciones orientadas hacia el objeto de la actividad, hacia la tarea principal del sujeto. En nuestro caso, consideramos que los participantes llevan consigo una serie de recursos o destrezas, como propiedades de la EDO, usos de funciones básicas del GeoGebra, los cuales corresponden a los EU. Dichos esquemas serán coordinados en conjunto para redescubrir las propiedades de las componentes de las EDO en un ambiente de geometría dinámica, que corresponde al EAI. Ambos esquemas de utilización tienen orientaciones específicas, en un caso los EU, orientados a verificar que las propiedades de las EDO pueden ser redescubiertas con el GeoGebra, convirtiendo dichas propiedades en medios como EAI, aplicado en otros objetos sobre los cuales este objeto le permite actuar. Por lo tanto, el instrumento no existe en sí, es el resultado de asociar el artefacto a la acción del sujeto, dirigida por sus esquemas que elabora.

Ecuaciones Diferenciales.

Resolver problemas de EDO a veces no es muy sencillo y en algunas ocasiones, se podría decir, imposible. En la gráfica del campo de direcciones de una ecuación diferencial se pueden apreciar todas las soluciones de la ecuación dada. Por el teorema de existencia y unicidad, cada curva solución se determina, ya sea dándole un valor a la constante c o de forma equivalente, estipulando un punto (x_0, y_0) del plano por donde pasa la solución. Pretendemos a través de este taller el participante tenga una herramienta muy útil para la resolución de los diferentes problemas de EDO.

Hacemos uso del enfoque instrumental, (Rabardel, 1995), ya que nuestro objetivo es enriquecer de manera progresiva el significado de la definiciones y teorema de EDO. Para ello hemos preparado actividades que permitirán la asimilación y acomodación de un nuevo esquema, llamado proceso de instrumentalización. Haremos un ligero intento en orientar la definición, que el participante instrumentalizó en las primeras actividades, para observar su proceso de instrumentación. Sin embargo, la génesis estará básicamente orientada a la instrumentalización de la definición y propiedades.

Definición 1. Una **Ecuación diferencial** es cualquier relación en la que interviene una o más variables dependientes y alguna(s) de sus derivadas con respecto a una o más variables independientes.

Si en una ecuación diferencial intervienen sólo derivadas de funciones de una variable, se dice que la ecuación diferencial es ordinaria **(EDO)**. Caso contrario, decimos que la ecuación diferencial es una ecuación diferencial en derivadas parciales **(EDP)**.

Una EDO se representa de la siguiente manera

$$F\left(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)}\right) = 0.$$

Definición 2. La función $y = \varphi(x)$ con al menos n derivadas definida en un intervalo I es una solución de la ecuación diferencial ordinaria $F\left(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)}\right) = 0$ en I si y solo si $F\left(x, \varphi(x), \varphi^{(1)}(x), \varphi^{(2)}(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)\right) = 0$.

Definición 3. Un problema de valor inicial es la ecuación diferencial acompañada de condiciones iniciales.

En este trabajo estamos interesados en las ecuaciones diferenciales de primer orden, es decir:

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Definición 4. La terna (x, y, y') determina la dirección de una recta que pasa por el punto (x, y). El conjunto de los segmentos de estas rectas es la representación geométrica del campo direccional.

El campo direccional puede observarse si se trazan pequeños segmentos rectilíneos en algún conjunto representativo de puntos en el plano XY. Se elige una rejilla rectangular de puntos. Una vez que se obtiene un esquema del campo direccional, a menudo es posible ver de inmediato el comportamiento cualitativo de las soluciones, o quizá observar regiones que tienen algún interés especial. (Nagle, Saff y Zinder, 2004)

Teorema. Dada la ecuación diferencial

$$y' = f(x, y)$$

donde $f(x, y)$ está definida en una región rectangular R que contiene al punto (x_0, y_0).

Si $f(x, y)$ satisface las condiciones:

a) $f(x, y)$ es continua en la región R

b) $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua en la región R.

Entonces existe un intervalo I con centro x_0 y existe una y solo una función $y = \varphi(x)$ definida en el intervalo I que satisface la condición inicial $y(x_0) = y_0$. (Zill, 2007)

Sesión 1.

Actividad 1. Dadas las ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dy}{dx} = 5x$$

a) Grafique el campo de direcciones.

b) Analice el comportamiento del campo de direcciones.

Solución

Se inicia con el proceso de instrumentalizar el artefacto, que en este caso el análisis del comportamiento del campo de direcciones mediado por el GeoGebra.

Para ello, ubíquese en la barra de entrada, escriba y seleccione Campo Direcciones $(f(x,y),n)$ como veremos en la figura 1.

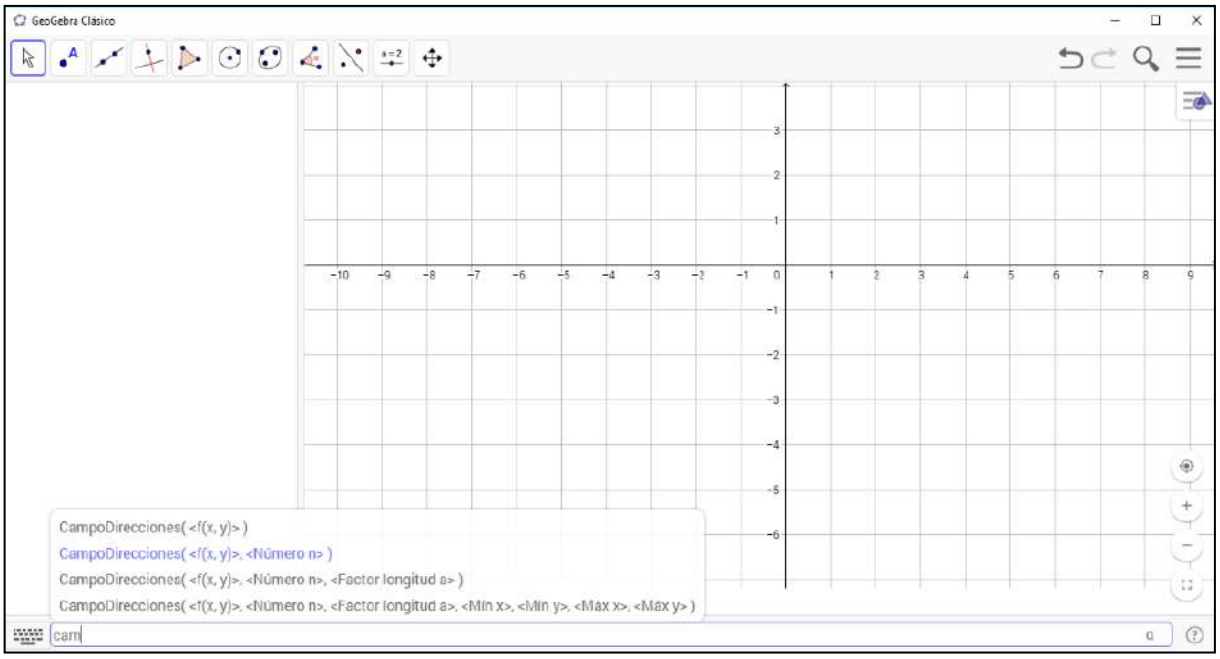


Figura 1. Inicio de construcción de Campo de Direcciones

Ahora digite $f(x,y) = 5x, n = 20$ y conseguirá pequeños segmentos de recta que varían su sentido según el punto donde se está evaluando como se muestra en la figura 2.

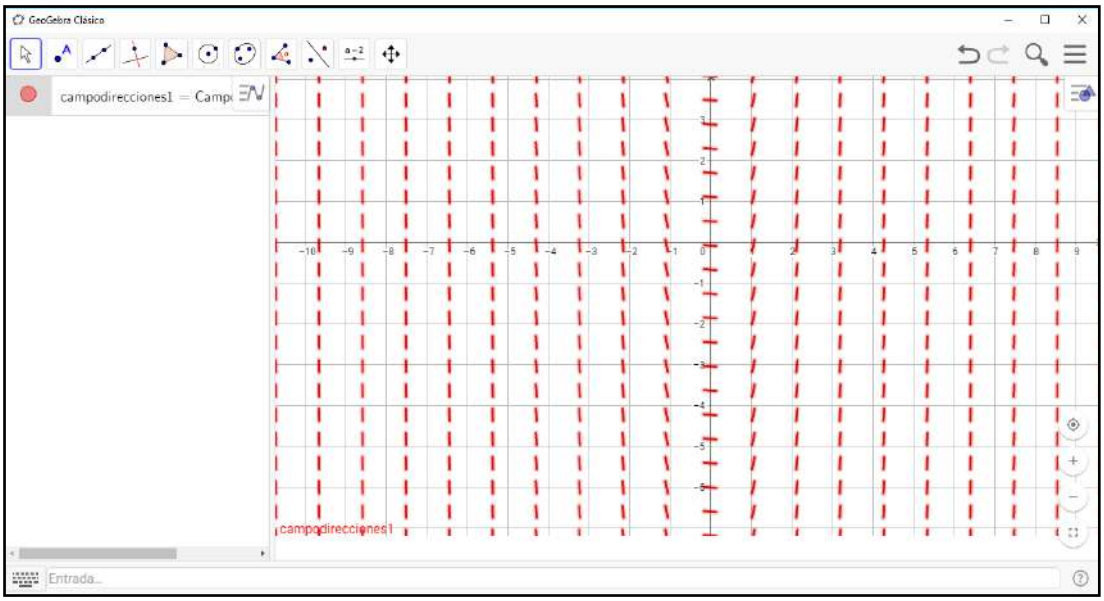


Figura 2. Campo de direcciones de $\frac{dy}{dx} = 5x$.

Actividad 2.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}$$

a) Grafique el campo de direcciones

b) Analice el comportamiento del campo de direcciones

Solución

Ingrese "$CampoDirecciones(\frac{y}{2x}, 20)$" en la barra de entrada.

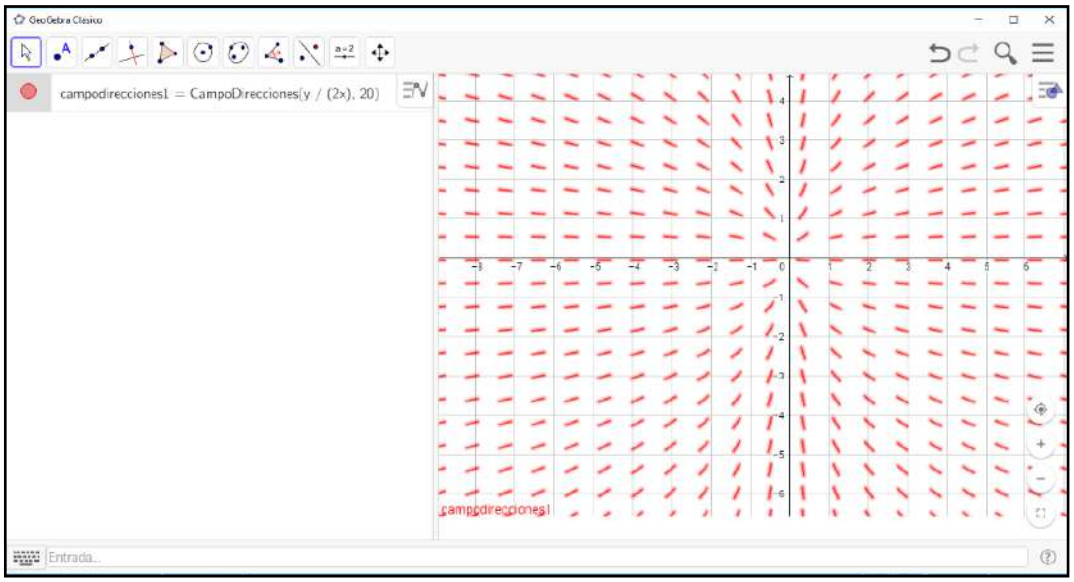


Figura 3. Campo de direcciones de $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}$.

Observando el campo de direcciones notamos que el primer cuadrante las pendientes de los segmentos de recta son positivas, esto nos hace inferir que la gráfica de la solución de la EDO es creciente. De manera similar podemos inferir que la gráfica de la solución de la EDO en el cuarto cuadrante es decreciente.

Actividad 3.

$$\frac{dy}{dx} = 0.03y(1 - \frac{y}{1000})$$

a) Grafique el campo de direcciones.

b) Analice el comportamiento del campo de direcciones. (Stewart, 2010).

Solución

Ingrese "$CampoDirecciones(0.03y(1 - \frac{y}{1000}), 20)$" en la barra de entrada.



Figura 4. Campo de direcciones de $\frac{dy}{dx} = 0.03y(1 - \frac{y}{1000})$

Para notar mejor el comportamiento de la solución es necesario aumentar el valor "*n*" al ingresar el campo de direcciones en GeoGebra.

Sesión 2

Resuelve $\frac{dy}{dx} = 5x$.

Solución. En esta sesión se instrumentalizará la definición de una ecuación diferencial mediado por el CAS del GeoGebra.

- Activar la ventana del CAS

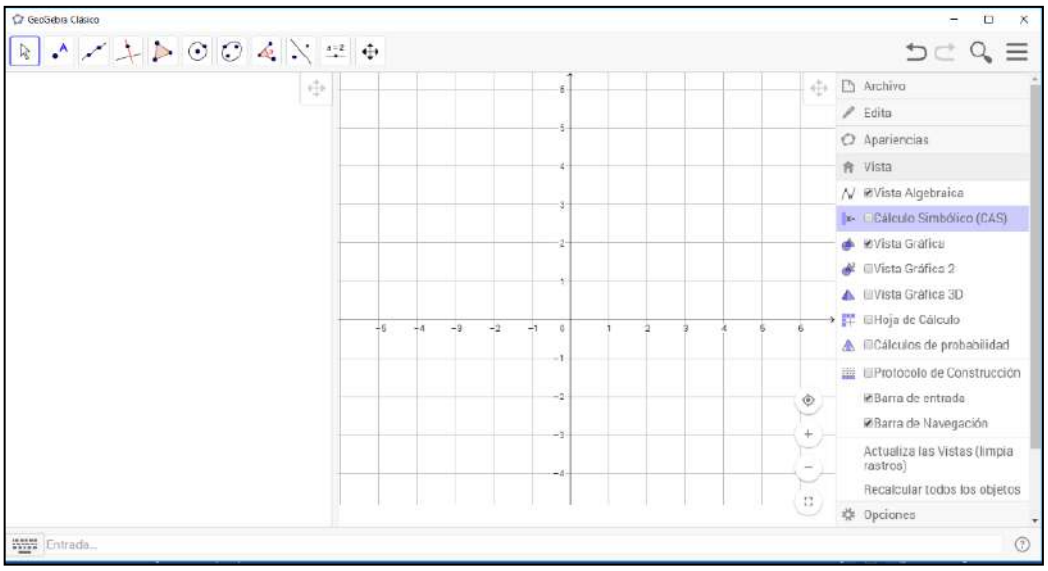


Figura 5. Ingresando al CAS-GeoGebra

- En la barra de entrada digite $CampoDirecciones(5x, 20)$"
- En la ventana del CAS digite y selecciones $ResuelveEDO(Ecuación)$

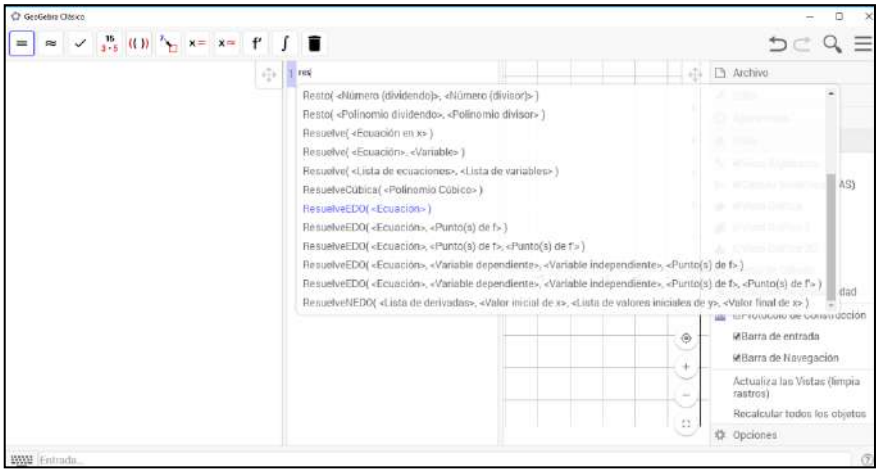


Figura 6. Solución de una EDO mediante CAS-GeoGebra

- Digite $ResuelveEDO(5x)$

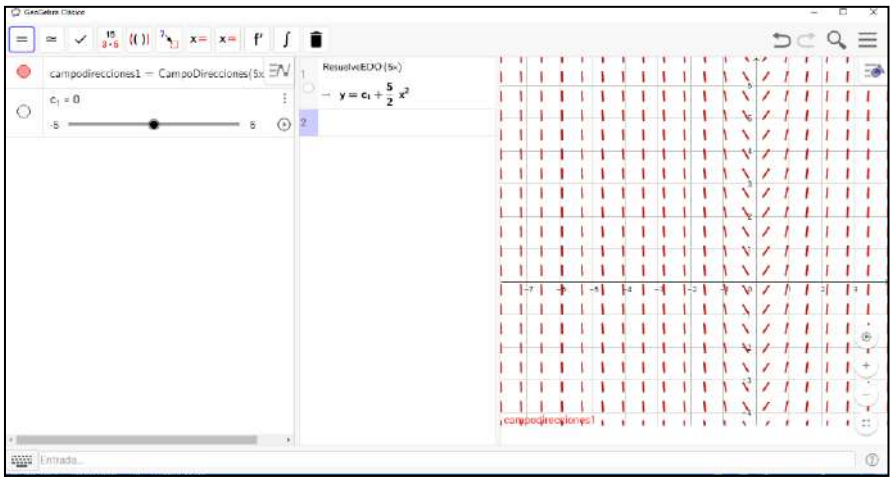


Figura 7. Gráfica del campo de direcciones de $\frac{dy}{dx} = 5x$

- Gráfica del campo de direcciones y la solución de la EDO.

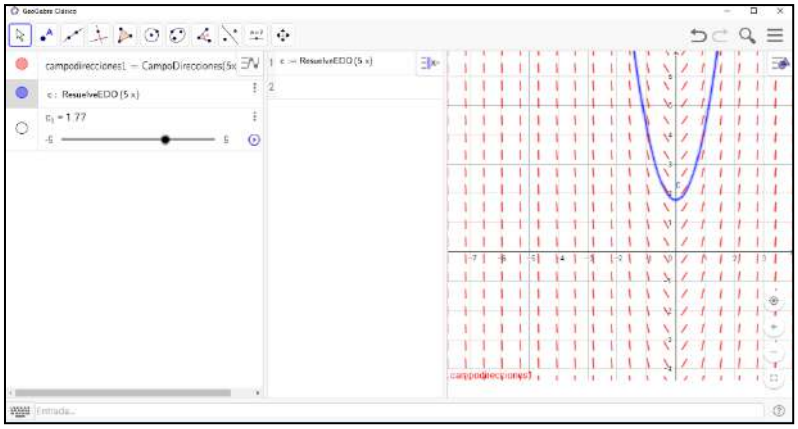


Figura 8. Gráfica del campo de direcciones y solución de $\frac{dy}{dx} = 5x$

Actividad 2. Resuelva $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{2x}$ (Trayectorias ortogonales)

Actividad 3. Resuelva $\begin{cases} \frac{dx}{dy} = 0.03y\left(1 - \frac{y}{1000}\right) \\ y(0) = 100 \end{cases}$

Reflexiones

Se espera tener respuesta a las siguientes preguntas:

1. ¿Una secuencia de actividades mediadas por el GeoGebra permite que los alumnos instrumentalicen las EDO y los campos direcciones?

2. ¿Considera al programa GeoGebra una herramienta complementaria en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las EDO?

3. ¿Qué esquemas de usos o conocimientos previos deberían traer consigo los estudiantes para que en coordinación con uso del GeoGebra puedan incorporar algunas propiedades de la EDO?

Conclusión

Estas actividades, permiten llevar las EDO, a un pensamiento y lenguaje matemático, pero desde un entorno de geometría dinámica. Durante la aplicación de las actividades, se observará que el GeoGebra permite que los estudiantes descubran e identifiquen las propiedades particulares de las EDO, las cuales formaban parte de sus EU. Cuando construyeron los campos direcciones, lo esquematizaron como un EAI, y luego dicho esquema evolucionó a un EU que, en combinación con otros esquemas como el CAS, se movilizaron para un determinado objetivo.

Referencias

Castro, G (2012). *Sobre el concepto de antropotécnica en Peter Sloterdijk*. Revista de Estudios Sociales,(43), pp. 63-73. Universidad de Los Andes Bogotá, Colombia.

Nagle, E. K., Saff, E. y Zinder, A. (2004) Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera Adisson Wesley, Pearson Educativa, (cuarta edición).

Rabardel, P. (1995). *Los hombres y las tecnologías. Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos*. Traducido por M. Acosta. Colombia: Universidad Nacional de Santander. Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas, 2011. Colombia: Ediciones Universidad Industrial de Santander.

Stewart, J (2010). Cálculo una variable Conceptos y contextos, 4ª edición, 2010, Cengage Learning.

Zill, D, (2007). Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado. Novena edición. Thomson. Learning,

Volver al índice de autores

2.4.9. Uso del Geogebra para teléfonos móviles en la enseñanza de la geometría

Daysi García-Cuéllar, Pontificia Universidad Católica de São Paulo, Brasil
Mihály Martínez Miraval, Pontificia Universidad Católica del Perú-IREM, Perú
Horacio Saúl Sostenes-González, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, México
Mónica Parra-Zapata, Universidad de Antioquia, Colombia

Resumen

Este taller, dirigido a profesores de Educación Básica Regular, tiene como propósito presentar por medio de actividades el uso del GeoGebra para teléfonos móviles. En el desarrollo del taller mostraremos actividades de triángulos, cuadriláteros, circunferencias y poliedros donde el docente participará activamente; luego, los docentes participantes, crearán una actividad que pueda ser usada en clase con sus estudiantes. Finalmente, haremos una reflexión de la Génesis Instrumental del artefacto GeoGebra para teléfonos móviles

Introducción

El número de personas que usan teléfonos móviles cada vez va en aumento en diversos países de Latinoamérica. En el caso de Perú, un estudio del Instituto Nacional de Estadística e Informática (INEI, 2017) informó que en el trimestre julio-agosto-setiembre de 2017, en el 90,6% de los hogares del país existe al menos un miembro que tiene teléfono móvil, registrándose un incremento de 1,4 puntos porcentuales, respecto al mismo trimestre del año 2016. Menciona también, que los que accedieron en mayor proporción a Internet desde su teléfono móvil fue la población joven de 19 a 24 años de edad con 79,4% y el grupo de 12 a 18 años de edad con 72,0%.

Dicho estudio nos muestra un panorama del acceso a internet y del uso de los teléfonos móviles por estudiantes de secundaria (11 a 17 años). Estas cifras nos retan, como docentes, a aprovechar dichas herramientas para mejorar los procesos de enseñanza y de aprendizaje en nuestras aulas de matemáticas.

Una de las herramientas usada en la enseñanza y en el aprendizaje de las Matemáticas es el GeoGebra, que es una aplicación matemática de código abierto orientada principalmente

a la educación, dado que reúne en su entorno aritmética, geometría, álgebra, cálculo, probabilidad y estadística. A pesar de que su versión para Android (para teléfonos móviles) es diferente que para Windows (para laptops o computador), tienen algunas características similares, como por ejemplo el ser multiplataforma pues cuenta con calculadora gráfica, CAS (cálculos simbólicos), Geometría, GeoGebra 3D, plantilla de cálculos, calculadora de probabilidad, entre otros; que hace del GeoGebra una herramienta con gran potencial para ser explorada en las clases de matemáticas, y al poder utilizarlo en teléfonos móviles, nos libera de la necesidad de utilizar laboratorios computarizados.

De acuerdo a lo anterior, en este taller proponemos un conjunto de tareas que posibilitan el uso del GeoGebra móvil y a partir de él la reflexión en torno a la geometría escolar, en particular los triángulos, los cuadriláteros, la circunferencia y los poliedros.

Génesis Instrumental

Para nuestro estudio hemos utilizado el Enfoque Instrumental de Rabardel (2011). Para Salazar (2009), las nociones clave de este Enfoque son las siguientes:

Esquema: que según Vergnaud (1996), es una organización invariante de la conducta del sujeto para una clase determinada de situación.

Artefacto: es un objeto material o abstracto, destinado a dar sustento a la actividad del hombre en la ejecución de un cierto tipo de tarea.

Instrumento: es lo que un sujeto construye a partir del artefacto. Es entonces una entidad mixta que contiene a la vez un artefacto, material o no, y esquemas de utilización construidos por el sujeto durante su interacción.



Figura 1. Componentes de un instrumento

De acuerdo a Rabardel (2011), el Enfoque Instrumental estudia la diferencia que existe entre el artefacto, instrumento y los procesos que desenvuelven la transformación progresiva del artefacto en instrumento, transformación que denominó como proceso de Génesis Instrumental. El autor considera tres polos importantes en la Génesis Instrumental; estos son: el sujeto, que puede ser un usuario, operario, trabajador o agente; el instrumento, que se refiere de la herramienta, máquinas, sistemas, utensilios, entre otros; y el objeto, al cual va dirigida la acción con ayuda del instrumento. Este puede ser la materia prima, la realidad y el objeto de la actividad o trabajo.

En cuanto a la Génesis Instrumental, Rabardel (2011) sostiene que ésta consta de dos dimensiones: la instrumentalización y la instrumentación (ver figura 2).

La instrumentalización: está dirigida hacia la parte artefactual del instrumento, consta de enriquecimiento de las propiedades del artefacto por parte del sujeto. Es decir, es el resultante de la atribución de una función al artefacto por parte del sujeto.

La instrumentación: está dirigida hacia el sujeto. Se refiere a la construcción de esquemas de uso por parte del sujeto, relativos a la ejecución de ciertas tareas. En este proceso se lleva a cabo la asimilación de nuevos artefactos a los esquemas y la acomodación de los esquemas para dar nuevos significados a los artefactos.



Figura 2. Proceso de la Génesis Instrumental.

Adaptado de García-Cuéllar y Salazar, JVF (2016)

Metodología del taller

El taller se realizará en dos sesiones de 90 minutos con docentes de Educación Básica Regular (en formación inicial o continua). Los participantes utilizarán los aplicativos Calculadora Gráfica GeoGebra y GeoGebra Calculadora 3D, en sus teléfonos móviles, los cuales se pueden descargar libremente de Play Store.

SESIÓN 1

Tiene como objetivo familiarizar a los docentes participantes con las herramientas del artefacto GeoGebra para teléfonos móviles, es decir, se enfoca al proceso de la instrumentalización cuando resuelven actividades de cuadriláteros y triángulos (actividades 1, 2, 3 y 4).

Para cada una de las siguientes actividades, abra el aplicativo Calculadora Gráfica GeoGebra en su teléfono móvil, y oculte la cuadrícula y los ejes coordenados. Luego, siga los pasos descritos en cada actividad.

ACTIVIDAD 1: CUADRILÁTERO CÓNCAVO Y CONVEXO

Construir un cuadrilátero ABCD cuyos lados miden $\overline{AB} = 6$ u, $\overline{BC} = 10$ u, $\overline{CD} = 7$ u, $\overline{DA} = 4$ u, y una diagonal, $\overline{AC} = 9$ u.

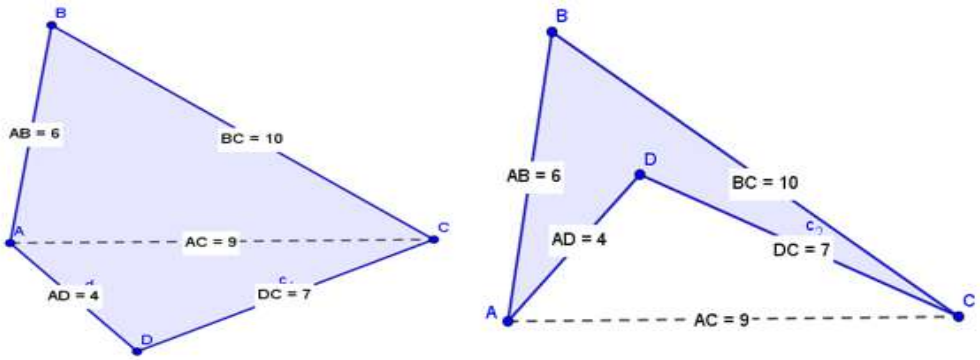


Figura 3. Posibles soluciones de la actividad 1

PASOS:

i. Utilizar la herramienta *Punto* y ubicar un punto A en el área de trabajo de la vista gráfica. Luego, con la herramienta *Circunferencia (centro, radio)*, marcar el punto A

y colocar que el radio es 6 u. A continuación, ubicar un punto B en la circunferencia generada. Ocultar la circunferencia.

ii. Dibujar dos circunferencias: una centrada en el punto A con radio 9 u, y otra centrada en el punto B con radio 10 u. Luego, con la herramienta *Intersección*, marcar ambas circunferencias, y obtener los puntos C y D (elegir uno de ellos). Ocultar ambas circunferencias.

iii. Dibujar dos circunferencias: una centrada en el punto A con radio 4 u, y otra centrada en el punto C con radio 7 u. Luego, con la herramienta *Intersección*, marcar ambas circunferencias, y obtener los puntos E y F. Ocultar ambas circunferencias.

iv. Usar la herramienta *Polígono* para dibujar primero el polígono ABCEA, y luego el polígono ABCFA. Luego, usar la herramienta *Segmento* para dibujar el segmento AC. Para obtener la medida de los lados del polígono y del segmento AC, use la herramienta *Distancia o Longitud*, y marque cada segmento.

Responda:

- ¿Cuál de los polígonos: ABCEA o ABCFA, es cóncavo y cuál convexo?
- ¿Qué diferencias existen entre un polígono convexo y uno cóncavo?

ACTIVIDAD 2: CONSTRUCCIÓN DE UN TRAPECIO

Construir un trapecio cuyos lados paralelos miden 4 u y 8 u. Los otros dos lados miden 3 u y 5 u. ¿Qué tipo de trapecio es?

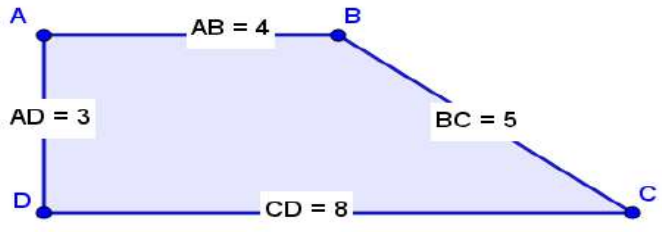


Figura 4. Solución esperada de la actividad 2

PASOS:

i. Ubicar un punto A en el área de trabajo de la vista gráfica. Luego, dibujar una circunferencia centrada en el punto A con radio 4 u. A continuación, ubicar un punto B en la circunferencia generada y trazar el segmento AB. Ocultar la circunferencia.

ii. Dibujar dos circunferencias: una centrada en el punto A con radio 3 u, y otra centrada en el punto B con radio 5 u. Luego, determinar los puntos de intersección C y D (elegir uno de ellos) entre ambas circunferencias. Ocultar la circunferencia de radio igual a 3 u.

iii. Usar la herramienta *Paralela*, y hacer clic en el segmento AB y luego en el punto C. Se va a dibujar una recta paralela al segmento AB. Luego, halle la intersección entre la circunferencia de radio 5 u y la recta, y obtenga los puntos EF. Ocultar la circunferencia y la recta.

iv. Dibujar el polígono ABFEA

Responda:

- ¿Qué tipo de trapecio presenta dichas medidas? Explore las herramientas *Ángulo*, *Perpendicular* y *Relación* (para este último dibuje los segmentos EF y AE)

ACTIVIDAD 3: CIRCUNFERENCIA INSCRITA A UN TRIÁNGULO

Represente gráficamente un triángulo isósceles cuyos lados midan 8 u, 5 u y 5 u. Trace una circunferencia inscrita al triángulo y mida su radio.

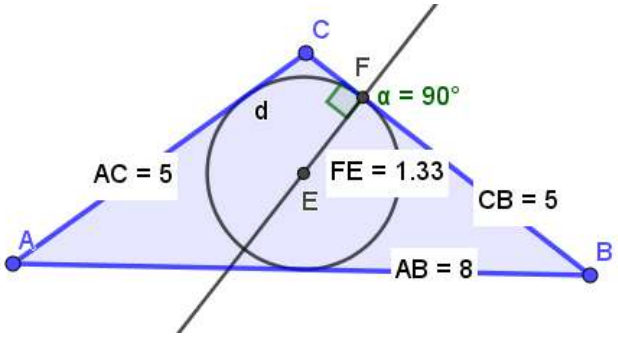


Figura 5. Solución esperada de la actividad 3

PASOS:

i. Ubicar un punto A sobre el área de trabajo de la vista gráfica. Luego, dibujar una circunferencia centrada en el punto A con radio 8 u. A continuación, ubicar un punto B sobre la circunferencia.

ii. Dibujar dos circunferencias de radio 5 u centradas en los puntos A y B. Luego, determinar los puntos de intersección C y D (elegir uno de ellos) entre ambas circunferencias. A continuación, dibuje polígono ABCA. Ocultar ambas circunferencias.

iii. Con la herramienta *Bisectriz* seleccionar los tres vértices que componen cada ángulo, en el siguiente orden sugerido: ABC, BCA, CAB. Obtener la intersección de las bisectrices para generar el punto E, que representa el incentro. Ocultar las rectas trazadas.

iv. A partir del punto E, trazar una perpendicular hacia cualquier lado del triángulo. Luego, determinar la intersección entre la recta perpendicular y el lado elegido para obtener el punto F.

v. Seleccionar la herramienta *Circunferencia (centro, punto)* y dar clic en los puntos E y F.

vi. Determinar la medida del segmento EF, que viene a ser el radio de la circunferencia inscrita al triángulo. Debe ser 1,33 u.

Responda:

- ¿Qué criterios debe tener una circunferencia inscrita?

- Si el triángulo no es isósceles, ¿cumpliría también los criterios descritos en la pregunta anterior? Utilice el siguiente código QR para verificar su respuesta.

ACTIVIDAD 4: EXPLORACIONES TRIANGULARES DE LA ALTURA DE UN TRIÁNGULO

Halle el punto de intersección de las alturas de un triángulo.

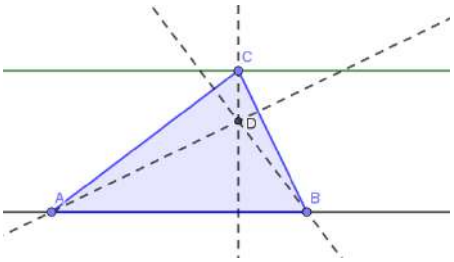


Figura 5. Solución esperada de la actividad 4

PASOS:

i. Con la herramienta *Recta* dibujar una recta sobre el área de trabajo de la vista gráfica, se generan los puntos A y B sobre la recta. Luego, trazar una recta paralela a la recta anterior, se genera el punto C sobre dicha recta.

ii. Dibuje el polígono ABCA. Luego, trazar las tres alturas del triángulo, y determinar la intersección de dichas alturas, para generar el punto D (ortocentro).

iii. Seleccionar el punto D, y dar clic sobre los tres puntos del menú emergente. Luego, en la ventana de ajustes que se despliega, activar la opción de rastro.

iv. Arrastrar el vértice A o B del triángulo sobre la recta que los contiene y observar la trayectoria que sigue el Ortocentro.

v. Arrastrar el vértice C del triángulo sobre la recta que lo contiene y observar la trayectoria que sigue el Ortocentro.

Responda:

- ¿Qué objetos matemáticos se muestran? Utilice el siguiente código QR para verificar su respuesta.

SESIÓN 2

Tiene como objetivo instrumentalizar e instrumentar a los docentes con el artefacto GeoGebra para teléfonos móviles cuando resuelven actividades de circunferencia y poliedros (actividad 5, 6 y 7).

Así mismo, para identificar que la Génesis Instrumental del artefacto GeoGebra para teléfonos móviles surgió en los docentes participantes, se les pedirá que creen una actividad que pueda ser usada con sus estudiantes en aula, donde utilizarán las herramientas instrumentalizadas del GeoGebra.

Para las actividades 5 y 6, abra el aplicativo Calculadora Gráfica GeoGebra en su teléfono móvil, y para la actividad 7, abra el aplicativo GeoGebra Calculadora 3D, en ambos casos oculte la cuadrícula y los ejes coordenados. Luego, siga los pasos descritos.

Las actividades para esta sesión son las siguientes:

ACTIVIDAD 5: ÁNGULO INSCRITO Y ÁNGULO CENTRAL

¿Qué relación existe entre un ángulo inscrito y un ángulo central de una circunferencia?

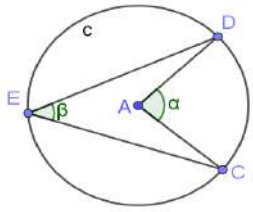


Figura 6. Solución esperada de la actividad 5

PASOS:

i. Activar la herramienta *Circunferencia (centro, punto)* y ubicar el punto A sobre el área de trabajo de la vista gráfica (este será el centro de la circunferencia), y luego el punto B (este será un punto de la circunferencia). Luego, ocultar el punto B.

ii. Activar la herramienta *Punto* y ubicar tres puntos C, D y E sobre la circunferencia. Luego, con la herramienta *Segmento*, crear los segmentos AC, AD, EC y ED (ver figura).

iii. Activar la herramienta *Ángulo*, y marcar primero los puntos C, A y D en ese orden, y luego los puntos C, E y D, en ese orden también.

Responda:

- ¿Qué relación existe entre los ángulos α y β?
- ¿Si arrastramos cualquiera de los puntos la relación anterior se mantiene? ¿Qué se puede concluir?
- ¿Qué se puede concluir sobre la naturaleza de un triángulo inscrito en una semicircunferencia, será equilátero, isósceles, escaleno, o rectángulo?

ACTIVIDAD 6: RELACIONES MÉTRICAS EN UNA CIRCUNFERENCIA

¿Qué relaciones métricas se pueden dar en una circunferencia?

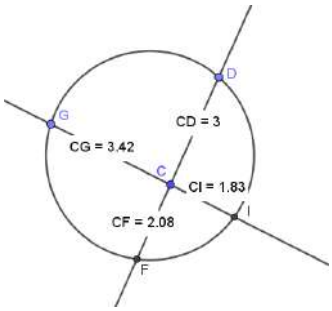


Figura 7. Solución esperada de la actividad 6

PASOS:

i. Dibujar una circunferencia sobre el área de trabajo de la vista gráfica. Oculte los puntos generados.

ii. Ubicar un punto C en el interior de la circunferencia, y otro punto D sobre la circunferencia. Luego, con la herramienta *Recta*, trazar una recta que pase por los

puntos C y D. A continuación, con la herramienta *Intersección*, marcar la circunferencia y la recta, y crear los puntos E y F. Ocultar el punto E.

iii. Ubicar un punto G sobre la circunferencia. Luego, trazar una recta que pase por los puntos C y G. A continuación, hallar los puntos de intersección H e I, entre la recta y la circunferencia. Ocultar el punto H.

iv. Activar la herramienta *Distancia o Longitud* y marcar los puntos C y D; C e F; C y G; C e I, para hallar la longitud de los cuatro segmentos.

Responda:

- Encuentre los siguientes resultados: $\overline{\mathrm{CD}} \times \overline{\mathrm{CF}}$ y $\overline{\mathrm{CG}} \times \overline{\mathrm{CI}}$. ¿Qué relación existe entre esos dos resultados?

- ¿Si arrastramos cualquiera de los puntos D o G, la relación anterior se mantiene? ¿Qué se puede concluir?

- Lea el código QR mostrado en la figura. Mueva el punto C en el interior de la circunferencia, ¿qué ocurre con los productos: $\overline{\mathrm{CD}} \times \overline{\mathrm{CF}}$ y $\overline{\mathrm{CG}} \times \overline{\mathrm{CI}}$? ¿Y qué pasaría si el punto C se ubica fuera de la circunferencia?

ACTIVIDAD 7: POLIEDROS

1. Represente un cubo y realice su desarrollo. ¿Cuál es la medida de su arista, la medida del área de su superficie y la medida de su volumen?

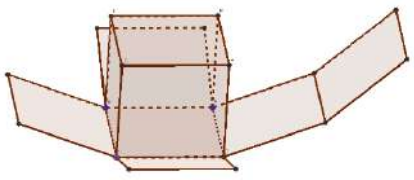


Figura 8. Desarrollo del cubo de la actividad 7

PASOS:

i. Activar la herramienta *Cubo* y ubicar sobre el área de trabajo de la vista gráfica dos puntos A y B.

ii. Activar la herramienta *Desarrollo* y marcar el cubo.

iii. Activar la herramienta *Elige y mueve* y manipule el cubo desarrollado

Responda:

- ¿Cuál es la medida de la arista del cubo, la medida del área de su superficie y su volumen? Explore las herramientas *Distancia o Longitud*, *Área* y *Volumen*; y dé respuesta a lo solicitado.

2. Represente un tetraedro regular y realice su desarrollo. ¿Cuál es la medida de su arista, la medida del área de su superficie y la medida de su volumen?

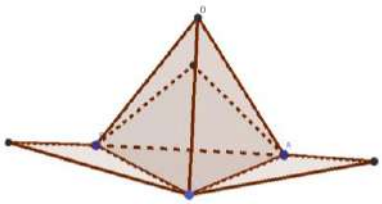


Figura 9. Desarrollo del tetraedro regular de la actividad 7

PASOS:

i. Activar la herramienta *Tetraedro* y ubicar sobre el área de trabajo de la vista gráfica dos puntos A y B.

ii. Activar la herramienta *Desarrollo* y marcar el tetraedro.

iii. Activar la herramienta *Elige y mueve* y manipule el tetraedro desarrollado.

Responda:

- ¿Cuál es la medida de la arista del tetraedro, la medida de su altura, la medida del área de su superficie y su volumen? Explore las herramientas *Distancia o Longitud*, *Área* y *Volumen*; y dé respuesta a lo solicitado.

Al finalizar las actividades se realizará una reflexión teórica sobre el Enfoque Instrumental y se identificará cómo se dieron los procesos de la Génesis Instrumental (instrumentalización e instrumentación) en el desarrollo de las actividades del taller.

Conclusiones

Consideramos que al concluir el taller los docentes participantes habrán instrumentalizado e instrumentado algunas herramientas del GeoGebra para teléfonos móviles. Podrán contar con esta herramienta que les permitirá introducir actividades en sus aulas de matemáticas.

Referencias

García-Cuéllar, D. y Salazar, J.V.F. (2016). *Instrumentation of axial symmetry in high school students*. International Congress on Mathematical Education (ICME). Recuperado de: Doi:10.13140/RG.2.2.36781.28641

INEI (2017), *Nota de Prensa Nº 273.* Disponible en:

http://m.inei.gob.pe/media/MenuRecursivo/noticias/nota-de-prensa-n-273-2017-inei_-2.pdf

Rabardel, P. (2011). *Los hombres y las tecnologías: Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos*. (Trad. por M. Acosta) Colombia: Universidad Industrial de Santander.

Salazar, J. V. F. (2009). *Gênese instrumental na interação com Cabri 3D: um estudo de transformações geométricas no espaço*. (Tesis doctoral). Pontificia Universidade Católica de São Paulo, Brasil.

Vergnaud, G. (1996*). A teoria dos campos conceptuais*. En J. Brun (Ed.), *Didáctica das* matemáticas (págs. 155-189). Lisboa: Horizontes pedagógicos.

Volver al índice de autores

Eje temático 3

Desarrollo de la competencia didáctico matemático en profesores de matemática

3. EJE TEMÁTICO: DESARROLLO DE LA COMPETENCIA DIDÁCTICO MATEMÁTICO EN PROFESORES DE MATEMÁTICA

3.1. Conferencias

3.1.1. El Modelo del Conocimiento y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM) del profesor (Conferencia plenaria)

Dr. Luis Pino-Fan
Universidad de los Lagos, Chile

Resumen

Uno de los problemas de investigación que cada vez cobra más interés en el campo de la Didáctica de las Matemáticas, es el de determinar y desarrollar cuáles son los conocimientos y las competencias clave para que los profesores de matemáticas se desempeñen idóneamente en su práctica profesional. A propósito, diversos autores han desarrollado estudios que han derivado en el planteamiento de modelos que tratan de describir los componentes del conocimiento del profesor de matemáticas. En esta Conferencia se presentan los recientes avances de la propuesta de un modelo del conocimiento y competencias didáctico-matemáticas (CCDM) del profesor, que se basa en supuestos teóricos del Enfoque Onto-Semiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos, y el cual viene desarrollándose desde el 2009 en diversos trabajos (Godino, 2009; Pino-Fan & Godino, 2015; Pino-Fan, Assis & Castro, 2015). Así mismo, se discutirán algunas aplicaciones del modelo en la formación inicial y continua de profesores

Introducción

El estudio sobre los conocimientos y competencias didácticas y matemáticas que debe tener un profesor de matemáticas es un tema que ha sido ampliamente investigado, generándose así, diversas propuestas de modelos para caracterizarlos (por ejemplo, Shulman, 1987;

Rowland, Huckstep y Thwaites, 2005, Hill, Ball y Schilling, 2008; Schoenfeld y Kilpatrick, 2008). Atendiendo a esta agenda de investigación, y con base en las nociones teóricas del Enfoque Onto-Semiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino, Batanero y Font, 2007) y sus diversos aportes al campo de la formación de profesores, se desarrolló un modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM). Este modelo, posteriormente dio lugar al modelo de Competencias y conocimientos Didáctico-Matemáticos (CCDM) del profesor, toda vez que el modelo CDM, y sus respectivas herramientas teórico-metodológicas han sido utilizados en diversos estudios con el objetivo de caracterizar y desarrollar competencias clave en el profesor de matemáticas para que sus procesos de enseñanza sean los más idoneos posible.

En esta conferencia se presenta las características del modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM), y sus recientes desarrollos, así como algunos ejemplos de su aplicación.

Del modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) al modelo del Competencias y Conocimientos Didáctico-Matemáticos (CCDM)

En el marco del EOS (Godino, Batanero y Font, 2007) se ha desarrollado un modelo teórico de conocimientos del profesor de matemáticas denominado modelo CDM, el cual fue inicialmente introducido como un sistema de categorías de análisis (Godino, 2009), refinado y aplicado en diversas investigaciones (e.g., Pino-Fan, Assis y Castro, 2015; Pino-Fan y Godino, 2015; Pino-Fan, Godino y Font, 2016).

El modelo CDM (Figura 1) propone que los conocimientos didáctico-matemáticos de los profesores pueden organizarse o desarrollarse de acuerdo a tres grandes dimensiones: matemática, didáctica y meta didáctico-matemática. La dimensión matemática alude a los conocimientos que debe tener un profesor de las matemáticas escolares que enseña; la segunda dimensión alude a los conocimientos sobre aspectos involucrados en los procesos de enseñanza y aprendizaje de matemáticas (conocimiento profundo de las matemáticas escolares y su interacción con aspectos cognitivos y afectivos de los estudiantes, recursos y medios, interacciones en el aula y aspectos ecológicos). La tercera dimensión, dimensión meta didáctico-matemática, alude a los conocimientos que debe tener un profesor para poder sistematizar la reflexión sobre su práctica y así emitir juicios valorativos sobre su práctica o la de otros (Pino-Fan, Godino y Font, 2016; Breda, Pino-Fan y Font, 2017).

Al mismo tiempo, la *dimensión matemática* del CDM incluye dos subcategorías de conocimientos: *conocimiento común del contenido* y *conocimiento ampliado del contenido*. El conocimiento común del contenido es entendido como aquel conocimiento, sobre un objeto matemático concreto (por ejemplo, la derivada), que se considera suficiente para resolver los problemas o tareas propuestas en el currículo de matemáticas (o planes de estudio) y en los libros de texto, de un nivel educativo determinado. Mientras que el conocimiento ampliado del contenido refiere a los conocimientos que debe tener el profesor sobre las nociones matemáticas que, tomando como referencia la noción matemática que se está estudiando en un momento puntual (por ejemplo, la derivada), están más adelante en el currículo del nivel educativo en cuestión, o en un nivel siguiente (por ejemplo, la integral en bachillerato, o el teorema fundamental del cálculo y ecuaciones diferenciales en universidad).

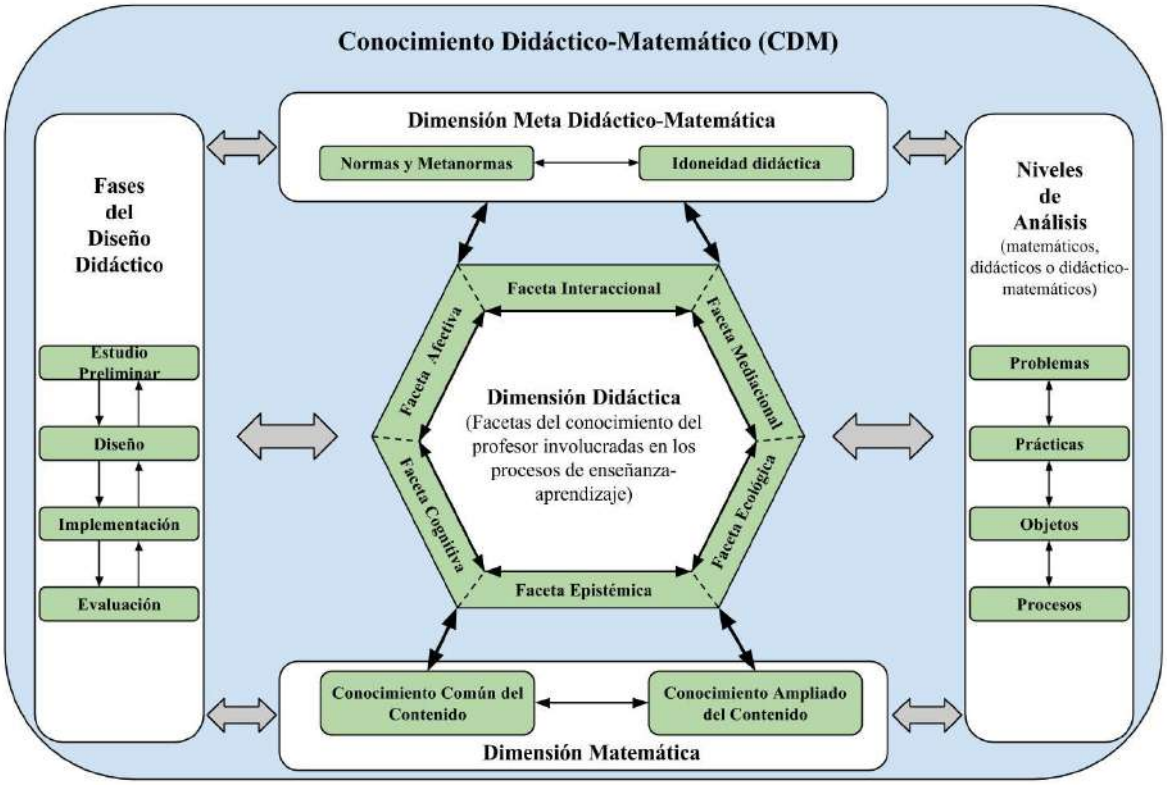


Figura 1. Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (Pino-Fan y Godino, 2015, p. 103)

Es claro que la dimensión matemática del CDM, que posibilita al profesor resolver problemas y tareas matemáticas, no es suficiente para la práctica de enseñanza. Los autores

de los diversos modelos descritos en la segunda sección, coinciden en que además del contenido matemático, el profesor debe tener conocimiento sobre los diversos factores que influyen cuando se planifica e implementa la enseñanza de dicho contenido matemático. En este sentido, la dimensión didáctica del CDM incluye las siguientes subcategorías (o facetas) del conocimiento:

a) *Faceta epistémica* (conocimiento especializado de la dimensión matemática), la cual incluye conocimientos que permite al profesor movilizar diversas representaciones de un objeto matemático, resolver la tarea mediante distintos procedimientos, vincular el objeto matemático con otros objetos matemáticos del nivel educativo en el que se enseña o de niveles anteriores y posteriores, comprender y movilizar la diversidad de significados parciales para un mismo objeto matemático (que integran el significado holístico para dicho objeto), proporcionar diversas justificaciones y argumentaciones, e identificar los conocimientos puestos en juego durante la resolución de una tarea matemática.

b) *Faceta cognitiva* (conocimiento sobre los aspectos cognitivos de los estudiantes), la cual refiere al conocimiento necesario para "reflexionar y evaluar" la proximidad o grado de ajuste de los significados personales (conocimientos de los estudiantes) respecto de los significados institucionales (conocimiento desde el punto de vista del centro educativo).

c) *Faceta afectiva,* la cual versa sobre los conocimientos que son necesarios para comprender y tratar los estados de ánimo de los estudiantes, los aspectos que los motivan o no a resolver un problema determinado, etc. Se trata de conocimientos que ayudan a describir las experiencias y sensaciones de los estudiantes dentro de una clase concreta o con un problema matemático determinado, en un nivel educativo específico

d) *Faceta interaccional,* la cual involucra los conocimientos necesarios para prever, implementar y evaluar secuencias de interacciones, entre los agentes que participan en el proceso de enseñanza y aprendizaje, orientadas a la fijación y negociación de significados (aprendizajes) de los estudiantes.

e) *Faceta mediacional,* refiere a los conocimientos que debería tener un profesor para usar y evaluar la pertinencia del uso de materiales y recursos tecnológicos para

potenciar el aprendizaje de un objeto matemático específico, así como la asignación del tiempo a las distintas acciones y procesos de aprendizaje.

f) *Faceta ecológica,* que refiere a conocimientos sobre el currículo de matemáticas del nivel educativo en el que se contempla el estudio del objeto matemático, sus relaciones con otros currículos, y las relaciones que dicho currículo tiene con los aspectos sociales, políticos y económicos, que soportan y condicionan el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Un aspecto que hay que destacar aquí, es que los componentes de esta dimensión didáctica son de una naturaleza didáctico-matemática, puesto que los conocimientos de los profesores sobre aspectos cognitivos y afectivos de los estudiantes, las interacciones y los recursos, etc., siempre van estrechamente vinculados a las matemáticas que son objeto de enseñanza-aprendizaje.

Por otra parte, es importante señalar que, para cada una de las dimensiones y subdimensiones (o facetas) del CDM, el modelo también propone "herramientas analíticas" que permiten operativizar cada una de tales categorías (tanto para la caracterización como para el desarrollo de las mismas). Tales "herramientas" teorico-metodológicas son tomadas de los aportes del Enfoque Onto-Semiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción Matemáticos.

Una de las perspectivas de desarrollo del modelo CDM, es el encaje de la noción de conocimiento con la noción de competencia del profesor. Esto en tanto que en diversos estudios se dejó de manifiesto que las tres dimensiones (con las seis facetas que componen la dimensión didáctica del conocimiento didáctico-matemático), pueden contemplarse para analizar, describir y desarrollar el conocimiento de los profesores –o futuros profesores– involucrado en las diversas fases de los procesos de enseñanza y aprendizaje de tópicos concretos de matemáticas: estudio preliminar, planificación o diseño, implementación y evaluación. Además, como parte de sus conocimientos didáctico-matemáticos, los profesores deben conocer y comprender los aspectos involucrados en cada una de dichas fases del diseño didáctico. Por otra parte, en el marco del EOS también se han realizado diversas investigaciones sobre las competencias del profesor de matemáticas (e.g., Rubio, 2012; Font, Breda & Sala, 2015), las cuales han puesto de manifiesto la necesidad de contar con un modelo de conocimientos del profesor para poder evaluar y desarrollar competencias clave para su actividad docente.

Estas dos agendas de investigación han confluido en diversos estudios, en los cuales se ha presentado el CDM como una 'herramienta teórico-metodológica' que permite caracterizar, y posteriormente desarrollar, competencias claves para la práctica del profesor de matemáticas. Por tanto, fue natural pensar en la ampliación del modelo CDM sobre conocimientos del profesor, a un modelo sobre *conocimientos y competencias didáctico-matemáticas* del profesorado (modelo CCDM).

Se espera que el profesor de matemáticas esté capacitado para abordar problemas didácticos básicos en la enseñanza de esta materia mediante la aplicación de unas herramientas teóricas y metodológicas, dando lugar, por tanto, a una serie de competencias específicas. Aparecen así dos cuestiones clave para desarrollar el modelo CCDM: 1) ¿cómo se entiende la noción de competencia? y ¿cuáles son las competencias clave que debe tener el profesor de matemáticas? Según Weinert (2001), los enfoques por competencias pueden clasificarse en tres grupos: a) Enfoque cognitivo, b) Enfoque motivacional y c) Enfoque integral o de acción competente. De acuerdo a esta clasificación, la competencia en el modelo CCDM se entiende desde la perspectiva de la acción competente, considerándola como el conjunto de conocimientos, disposiciones, etc., que permite el desempeño eficaz en los contextos propios de la profesión de las acciones citadas en su formulación. Dicho en términos aristotélicos, se trata de una potencialidad que se actualiza en el desempeño de acciones eficaces (competentes).

Esta formulación del término de competencia se debe desarrollar para ser operativa, y para ello hay que realizar una caracterización (definición, niveles de desarrollo y descriptores) que permita su desarrollo y evaluación. De acuerdo con Seckel y Font (2015), consideramos que el punto de partida para el desarrollo y evaluación de una competencia profesional debe ser una tarea que produce la percepción de un problema profesional que se quiere resolver, para lo cual el futuro profesor o el profesor en servicio debe movilizar habilidades, conocimientos y actitudes, para realizar una práctica que intente dar solución al problema. Además, podemos esperar que dicha práctica se realice con más o menos éxito (logro) y, a su vez, dicho logro se puede considerar una evidencia de que la persona puede realizar prácticas similares a las que están descritas por alguno de los descriptores de la competencia, el cual se suele asociar a un determinado nivel de competencia.

Así, en el modelo CCDM se considera que las dos competencias clave del profesor de matemáticas son la *competencia matemática* y la *competencia de análisis e intervención*

didáctica, cuyo núcleo consiste en: "Diseñar, aplicar y valorar secuencias de aprendizaje propias, y de otros, mediante técnicas de análisis didáctico y criterios de calidad, para establecer ciclos de planificación, implementación, valoración y plantear propuestas de mejora" (Breda, Pino-Fan y Font, 2017, p. 1897). Para desarrollar esta competencia el profesor necesita, por una parte, conocimientos que le permitan describir y explicar lo que ha sucedido en el proceso de enseñanza y aprendizaje y, por otra, necesita conocimientos para valorar lo que ha sucedido y hacer propuestas de mejora para futuras implementaciones. Esta competencia general de análisis e intervención didáctica del profesor de matemáticas, está formada por diferentes subcompetencias (Breda, Pino-Fan & Font, 2017; Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017): 1) subcompetencia de análisis de la actividad matemática; 2) subcompetencia de análisis y gestión de la interacción y de su efecto sobre el aprendizaje de los estudiantes; 3) subcompetencia de análisis de normas y metanormas; y 4) subcompetencia de valoración de la idoneidad didáctica de procesos de instrucción.

Aplicaciones y desarrollos del modelo CCDM

El modelo CCDM se ha generado como una propuesta teórica que se ha ido confrontando con la práctica para su desarrollo y refinamiento. En Breda, Pino-Fan y Font (2017) se explican una serie de experimentos de diseño, estudio de caso y cursos de formación, que han permitido, por una parte, el desarrollo del modelo Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (modelo CCDM) del profesor de matemáticas y, por otra parte, ponerlo a prueba para su refinamiento y mejora. También se observaron las siguientes regularidades:

1. Los profesores o futuros profesores, cuando han de opinar (sin una pauta previamente dada) sobre un episodio de aula implementado por otro profesor, expresan comentarios en los que se pueden hallar aspectos de descripción y/o explicación y/o valoración.

2. Las opiniones de estos profesores se pueden considerar evidencias de algunas de las seis facetas (epistémica, cognitiva, ecológica, interaccional, mediacional y emocional) del modelo del conocimiento didáctico-matemático (CMD) del profesor de matemáticas (una parte del CCDM).

3. Cuando las opiniones son claramente valorativas, se organizan de manera implícita o explícita mediante algunos indicadores de los componentes de los criterios de

idoneidad didáctica (otro componente del modelo CCDM) propuestos por el EOS (idoneidad epistémica, mediacional, ecológica, emocional, interaccional y cognitiva).

4. La valoración positiva de estos indicadores se basa en la suposición implícita o explícita de que hay determinadas tendencias sobre la enseñanza de las matemáticas que nos indican cómo debe ser una enseñanza de las matemáticas de calidad (Breda, Font y Pino-Fan, 2018). Estas tendencias se relacionan con el modelo CCDM ya que algunas de ellas son la base para proponer algunos de los criterios de idoneidad didáctica.

5. Los niveles de profundidad del análisis realizado por los profesores varían desde análisis superficiales a expertos, en función de las herramientas teóricas usadas para realizarlos.

Las regularidades que se acaban de describir, sirven para determinar una gradación en las categorías de conocimientos y competencias del modelo CCDM, distinguiendo diferentes niveles e incluyendo en el primer nivel cinco supra categorías: 1) tipo de análisis; 2) fase del proceso de estudio; 3) dimensión del conocimiento; 4) profundidad del análisis; y 5) competencias. Estas cinco supra categorías, se descomponen a su vez en sub-categorías de distintos niveles, las cuales a su vez si es necesario se descomponen en otras sub-categorías. Por ejemplo, la primera supra categoría, *tipo de análisis*, con tres valores o categorías de segundo nivel (descriptivo, explicativo y valorativo), ha sido sugerida por las regularidades observadas en los estudios empíricos comentados anteriormente.

Dichas regularidades también han sugerido la supra categoría *profundidad del análisis*, con cuatro valores o categorías de segundo nivel:

- N0: Narrativa superficial. Por ejemplo, si se trata de describir un episodio de aula, el lector no se hace una idea de lo que pasó en el episodio.

- N1: Narrativa que capta los elementos esenciales. El lector se hace una idea de lo que pasó en el episodio.

- N2: Análisis detallado de aspectos de la narrativa siguiendo un modelo de análisis. Por ejemplo, si se hace una descripción de la actividad matemática, se identifican algunas prácticas, objetos primarios y procesos.

- N3: Análisis experto de la narrativa de acuerdo con un modelo. Por ejemplo, se hace una descripción pormenorizada de la actividad matemática, se identifican exhaustivamente las prácticas, los objetos primarios y los procesos matemáticos.

Es preciso señalar que el tema de los niveles de competencias que acabos de comentar, es uno de los refinamientos en curso en el grupo de investigación sobre el EOS y CCDM.

Otros desarrollos recientes están relacionados con la tercera dimensión del CDM, la dimensión meta didáctico-matemática, pues se han realizado estudios que han derivado en una propuesta de desarrollo del *teacher noticing* (Castro, Pino-Fan y Velásquez-Echavarría, 2018), a partir de las herramientas teórico metodológicas que operativizan la dimesión "meta" del CDM, y que ha permitido configurar una Guía de Reflexión Didáctica. Los resultados del estudio de Castro et al. (2017) indican que la Guía de Reflexión Didáctica puede ayudar a desarrollar sensibilidad del profesor para identificar y cuestionar diversos elementos didácticos involucrados en la tarea de la enseñanza de las matemáticas.

Reflexiones Finales

En este trabajo se ha presentado un modelo teórico, el modelo Competencias y Conocimientos Didáctico – Matemáticos (modelo CCDM) del profesor de matemáticas, el cual está basado en una serie de investigaciones empíricas que, por una parte, han permitido su desarrollo y refinamiento y, por otra parte, han puesto a prueba sus constructos teóricos. Aunque el planteamiento que se ha hecho aquí es básicamente teórico, hay que resaltar que se vienen realizando numerosas investigaciones empíricas sobre los diversos componentes del modelo, como se puede ver en el apartado de "formación de profesores" de la web http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/ o en la web http://www.lrpino-fan.com/p/produccion.html.

El modelo CCDM abre, en consecuencia, un potente programa de investigación y desarrollo, focalizado en el diseño, experimentación y evaluación de intervenciones formativas que promuevan el desarrollo profesional del profesor de matemáticas, teniendo en cuenta las distintas categorías de conocimientos y competencias didácticas descritas en este trabajo.

Agradecimientos

Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación FONDECYT Nº11150014 (CONICYT-Chile) y EDU2015-64646-P (MINECO/FEDER, UE).

Referencias

Breda, A., Font, V., & Pino-Fan, L. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema, 32*(60), 255-278. doi: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13

Breda, A., Pino-Fan, L., & Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 13(6), 1893-1918. doi: 10.12973/eurasia.2017.01207a

Castro, W. F., Pino-Fan, L., & Velásquez-Echavarría, H. (2018). A proposal to enhance preservice teacher's noticing. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 14(9). doi: https://doi.org/10.29333/ejmste/92017

Font, V., Breda, A., & Sala, G. (2015). Competências profissionais na formação inicial de professores de matemática. *Praxis Educacional*, *11*(19), 17-34.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13 – 31.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM Mathematics Education, 39*(1), 127 – 135. doi: 10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., & Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema, 31*(57), 90-113.

Hill, H. C., Ball, D. L., & Schlling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 372–400.

Pino-Fan, L., Assis, A., & Castro, W. F. (2015). Towards a methodology for the characterization of teachers' didactic-mathematical knowledge. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 11*(6), 1429-1456. doi: 10.12973/eurasia.2015.1403a

Pino-Fan, L., & Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *PARADIGMA, 36*(1), 87-109.

Pino-Fan, L., Godino, J. D., & Font, V. (2016). Assessing key epistemic features of didactic-mathematical knowledge of prospective teachers: the case of the derivative. *Journal of Mathematics Teacher Education*. doi:10.1007/s10857-016-9349-8

Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*(3), 255-281.

Rubio, N. (2012). *Competencia del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemáticos*. (Doctoral dissertation). Retrieved from http://www.tdx.cat/handle/10803/294031

Seckel. M. J., & Font, V. (2015). Competencia de reflexión en la formación inicial de profesores de matemática en Chile. *Praxis Educacional, 11*(19), 55-75.

Schoenfeld, A., & Kilpatrick, J. (2008). Towards a theory of profiency in teaching mathematics. En D. Tirosh, & T. L. Wood (Eds.), *Tools and processes in mathematics teacher education* (pp. 321-354) Rotterdam: Sense Publishers.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-22.

Weinert, F. (2001). Concept of competence: A conceptual clarification. In D. Rychen & L. Salganik (Eds.), *Definition and selection key competencies* (pp. 45–65). Gottingen: Hogrefe & Huber.

Volver al índice de autores

3.1.2. Saber o no saber, esa no es la cuestión (Conferencia plenaria)

Dr. Miguel R. Wilhelmi
Universidad Pública de Navarra, España

Resumen

En la docencia se utilizan expresiones del tipo: "hemos trabajado las ecuaciones", "ya hemos visto las ecuaciones", "hay examen de ecuaciones", "después de las ecuaciones viene…". El contenido matemático es entonces percibido como una unidad de término. Se traslada al aprendizaje la lógica de la evolución de las matemáticas, según la cual el conocimiento es lineal, en un proceso de acumulación paulatina, sin retrocesos ni revisión por quien aprende del significado atribuido a los objetos involucrados. Sin embargo, alguien conoce un contenido matemático "de una determinada forma", que le permite "realizar ciertas tareas" y progresar en el aprendizaje de otros contenidos "con una determinada profundidad". El Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y de la instrucción matemáticos (EOS) aporta unas herramientas teóricas y metodológicas para el análisis del significado atribuido por un sujeto o una institución a unos objetos matemáticos. Asimismo, permite la valoración de procesos de estudio de las matemáticas de manera contextualizada, identificando aspectos idóneos y de evolución de dichos procesos. En este trabajo se analiza el desempeño de futuros docentes en una tarea de cálculo de fechas en el calendario

1. Conocimiento, saber y significado

Desde el punto de vista estrictamente matemático, la definición de una noción matemática es su medida. La noción es la definición; no hay ambigüedad o graduación posible en esto. Si la hubiera, la definición debería ser revisada y corregida, para la "expulsión" de un *contraejemplo* o, en la terminología de Lakatos (1976), de un "monstruo".

La construcción del conocimiento sigue otra lógica, no axiomática, no lineal, no acumulativa. Trasladar la "lógica matemática" a los procesos de enseñanza y aprendizaje resulta inadecuado, porque no permite comprender los retos que estos procesos comportan. Sin embargo, en la docencia se utilizan expresiones del tipo: "hemos trabajado las ecuaciones", "ya hemos visto las ecuaciones", "hay examen de ecuaciones", "después de

las ecuaciones viene…". Así, el contenido matemático es entonces percibido como una unidad de término. No lo es.

> "El sentido de un conocimiento matemático se define no solamente por la colección de situaciones en las que este conocimiento se desarrolla en tanto teoría matemática […], no solamente por la colección de situaciones en las que el sujeto la ha encontrado como medio de resolución, sino también por el conjunto de concepciones, de elecciones anteriores que el rechaza, los errores que evita; añadiría: las economías que procura, las formulaciones que retoma, así como otras cosas forman también parte de su significado." (Brousseau, 1976, 103).

De esta forma, el desarrollo de la competencia matemática por estudiantes requiere no solo un proceso una *transposición didáctica* (Chevallard, 1985) sino de un *proceso transpositivo en constante vigilancia.* De la misma forma que no existe un *contrato didáctico* (Brousseau, 2008) "óptimo", tampoco existe una transposición didáctica "óptima". Así, en todo proceso transpositivo se debe tener en cuenta los distintos significados (figura 1) atribuidos a los objetos y procesos matemáticos y a su evolución.



Figura 1. Significados personales e institucionales (Godino, Batanero y Font, 2008)

2. El día de la semana

Hoy es viernes 20 de julio de 2018, ¿qué día de la semana será el 9 de agosto de 2018? Responder esta pregunta es sencillo, aun cuándo no se disponga de ningún instrumento

(calendario en papel, móvil, ordenador, calculadora, etc.) ni de conocimientos sobre el calendario, salvo que julio tiene 31 días. Así, basta, por ejemplo, disponer los días de forma ordenada y ver qué día de la semana le corresponde al 9 de agosto (tabla 1).

Tabla 1. Determinación del día de la semana por extensión

L	M	X	J	V	S	D
				20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31	1	2	3	4	5
6	7	8	**9**			

Hoy es viernes 20 de julio de 2018, ¿qué día de la semana será el 9 de agosto de 2087? Primera cuestión: ¿es sencillo responder a esta pregunta?; segunda cuestión o metacuestión: ¿es sencillo responder a la primera cuestión? Vayamos por partes:

- La cuestión "¿es sencillo responder a esta pregunta?" se refiere al contenido matemático descontextualizado y desproblematizado. En cierto sentido se atribuye a los objetos matemáticos una escala de dificultad *intrínseca*, según la cual, por ejemplo, "*dividir* es fácil" y "*resolver ecuaciones* es difícil". ¿Qué significa "fácil" y "difícil"? ¿Tiene sentido preguntárselo?

- La metacuestión "¿es sencillo responder 'si es sencillo responder a esta pregunta'?" se refiere al contenido didáctico, es decir, al contenido matemático contextualizado, personal e institucionalmente, y problemático, más allá de lo meramente epistemológico. La diferencia entre conocimiento, saber y significado es aquí clave porque el dato "año" ("2018 por 2087") representa una *variable didáctica*.

3. Experimentación

3.1. Población y muestra

Se propone la tarea a docentes de matemáticas en formación inicial, que cursan el Máster en Profesorado de Educación Secundaria, titulo obligatorio en España para el ejercicio de

la función docente. El perfil de acceso al Máster exige una formación científico-técnica previa (Matemáticas, Física, Ingeniería); asimismo, pueden cursar el Máster estudiantes con otra formación universitaria, siempre y cuando superen una prueba específica de contenidos matemáticos (en la muestra, pertenecen a este grupo estudiantes con un título en Arquitectura o en Economía).

La muestra está compuesta por 41 estudiantes distribuidos como se señala en la tabla 2.

Tabla 2. Muestra

Formación	MAT	FIS	ING	ARQ	ECO	Total
Hombres	3	2	7	1	5	18
Mujeres	3	0	12	4	4	23
Total	6	2	19	5	9	41

3.2. Tarea

Se propone una tarea con una componente matemática y otra didáctica. La primera parte está constituida por dos problemas relativos a la fecha del calendario; la segunda parte, por cuestiones didácticas. Los problemas matemáticos difieren según los cursos académicos en el "hoy", que es el día en que se realiza la tarea. Dado que las tareas se propusieron en diferentes años, se preserva aquí una única versión de las tareas con el "hoy" utilizado en este trabajo, a saber, "*hoy viernes 20 de julio de 2018*". En la figura 2 se da la tarea.

Resuelve los dos siguientes problemas:

- *Hoy es viernes 20 de julio de 2018, ¿qué día de la semana será el 9 de agosto de 2018?*
- *Hoy es viernes 20 de julio de 2018, ¿qué día de la semana será el 9 de agosto de 2087?*

Responde a las siguientes cuestiones:

a) Identifica los conocimientos matemáticos para realizar los problemas anteriores.

b) Identifica una variable didáctica y los valores que el docente deba dar a la misma para que el alumnado tenga que modificar su método de resolución.

c) Enuncia al menos dos problemas cuya dificultad esté entre los dos dados, teniendo en cuenta la variable didáctica identificada y que se disponga o no de un calendario, una calculadora o un teléfono celular.

d) ¿Cómo plantearías la enseñanza correspondiente a este problema en una clase de secundaria?

Figura 2. Tarea matemático-didáctica

La resolución del segundo problema ("*¿qué día de la semana será el 9 de agosto de 2087?*") si bien, técnicamente, se puede hacer completando una macrotabla similar a la tabla 1, lo usual no es proceder por extensión, sino mediante operaciones elementales y el conocimiento de las características del calendario (días de la semana, días por mes, número de días de los años ordinarios y bisiestos, qué años son bisiestos). A continuación, se dan dos resoluciones prototípicas, que comparten cálculos intermedios que son dados en primer lugar.

Aspectos comunes

- ¿Cuántos años transcurren entre 2018 y 2087? 69 años (= 2087 – 2018).
- ¿Cuántos años son bisiestos? 17, ya que hay un año bisiesto cada 4 años y entre 2018 y 2087 no hay un múltiplo de 100 y ni 2018 ni 2087 son múltiplos de 4. Por lo tanto, basta calcular el cociente de dividir 69 por 4 (69÷4 tiene por cociente 17 y por resto 1).
- ¿Qué día de la semana es el 9 de agosto de 2018? Jueves. De esta forma, la cuestión inicial se transforma en: "sabiendo que el 9 de agosto de 2018 es jueves, ¿qué día de la semana será el 9 de agosto de 2087?".
- Dado que una semana tiene 7 días, el día de la semana coincide cada siete días o, dicho de otra forma, si transcurre un número de días múltiplo de 7, el día de la semana es el mismo.

Resolución 1

Esta resolución consiste en responder a la pregunta: *¿cuántas semanas completas han transcurrido del 9 de agosto de 2018 al 9 de agosto de 2087?* Para ello se calcula el número de días, se divide entre 7 y se determina el día de la semana en función del resto.

- Días transcurridos: $365 \times 69 + 17 = 25\,202$.
- Semanas transcurridas: 3 600 ("25 202 ÷ 7" tiene por cociente 3 600).
- Días adicionales: 2 ("25 202 ÷ 7" tiene por resto 2).

De esta forma, dado que el 9 de agosto de 2018 es jueves, se concluye que el 9 de agosto de 2087 será sábado.

Resolución 2

Esta resolución consiste en responder a la pregunta: *¿cuántos días de la semana deben "desplazarse" sabiendo que el 9 de agosto de 2018 es jueves?*

- Días que deben desplazarse en un año ordinario: 1, ya que $365 = 52 \times 7 + 1$.
- Días que deben desplazarse en un año bisiesto: 2, ya que $366 = 52 \times 7 + 2$.
- Días desplazados por años ordinarios: 52 (= 69 – 17).
- Días desplazados por años bisiestos: 34 (= 17 × 2).
- Días desplazados totales: 86 (= 52 + 34).
- Días adicionales: 2, ya que "86 ÷ 7" tiene por cociente 14 y por resto 2.

De esta forma, se concluye también que el 9 de agosto de 2087 será sábado.

3.3. Resultados y su discusión

Los resultados en la resolución de la tarea primera "hoy es *viernes 20* de julio de 2018, ¿qué día de la semana será el 9 de agosto de 2018?" son los esperados, salvo un *error anecdótico* (Wilhelmi, 2009), todos los estudiantes responden correctamente. Los

resultados de la tarea equivalente a la segunda "*hoy es viernes 20 de julio de 2018, ¿qué día de la semana será el 9 de agosto de 2087?*" se recogen en la tabla 3.

Tabla 3. Resultados

Año	2011	2013	2014	2015	2018	Total
Bien	4	2	3	4	4	17
Mal	5	3	3	2	6	19
No contesta	2	2	0	0	1	5
Total	11	7	6	6	11	41

No hay diferencias significativas entre las respuestas según la variable sexo (mujer, hombre) ni por la variable estudios de origen (matemáticas, física, ingeniería, arquitectura o económicas). Las respuestas de las distintas cohortes son similares; este hecho, sumado a que la edad de los sujetos no está correlacionada con el año en el que cursan el Máster, permiten afirmar que la tasa de respuestas correctas es estable en el tiempo y la procedencia y edad de los estudiantes: aproximadamente el 50%.

En diferentes años algunos estudiantes no responden a la tarea ("no contesta" en la tabla 3), limitándose a "describir el procedimiento". Consultados, la justificación que dan a esta decisión es que "había que hacer unas operaciones elementales y pensé que lo principal era el análisis didáctico [preguntas a)-d)]". Esta respuesta contrasta con la tasa de éxito en la muestra (50% aprox.) y es indicador de la *epistemología espontánea del profesor* novel, que atribuye "mayor valor" a actividades "no rutinarias o algorítmicas", desconociendo la importancia del *trabajo de la técnica* y de su *rutinización* (Chevallard, Bosch y Gascón, 2004).

Por último, aproximadamente 3 de cada 4 estudiantes que responden a la tarea con una resolución tipo 1, que precisa el cálculo de los días transcurridos y la determinación de las semanas completas y "días sueltos". El resto de estudiantes resuelve el problema segundo mediante la resolución 2. Este hecho supone que, en la muestra, si los sujetos disponen de un método de resolución "relativamente sencillo" no toman conciencia de que las

"variables matemáticas" condicionan la eficacia de los procedimientos. Por ejemplo, no es lo mismo realizar una operación elemental con números de una cifra, que con números de varias cifras; no tiene la misma tasa de éxito una ecuación de primer grado ($ax + b = c$) cuya solución sea un número natural que otra "del mismo tipo" cuya solución sea un número entero negativo o una fracción; etc. Así, no es lo mismo tener que realizar operaciones elementales de forma aislada que, como aquí, realizarlas en "cadena", donde el resultado de una operación condiciona la resolución e interpretación de la siguiente.

4. Implicaciones para la enseñanza

La adquisición del conocimiento matemático no sigue una lógica axiomática y acumulativa. Tareas supuestamente sencillas, como la realización de operaciones elementales, pueden arrojar resultados efectivos no previstos. En la formación del profesorado es pues necesario utilizar este fenómeno para motivar la necesidad de:

- Modificar la epistemología espontánea del profesor novel, según la cual, la transposición didáctica es una mera adaptación de los contenidos matemáticos a la etapa educativa, pero que no incluye las condiciones de la actividad propiamente dicha ni su evolución.

- Establecer una ontología matemática que supere la identificación del objeto matemático con su definición, que no es la "medida" de la noción. Una propuesta es la desarrollada en el EOS.

- Incorporar en la enseñanza medios de control de la actividad, que permita garantizar una tasa de éxito en procedimientos rutinarios o algorítmicos. De otra forma, las técnicas de control.

Referencias

Brousseau G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. En W. Vanhamme et J. Vanhamme, *La problématique et l'enseignement de la mathématique*. XXVIIIe rencontre de la CIEAEM (Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques), Louvain-la-neuve, pp. 101-117.

Broussea G. (2008). *Iniciación a la Teoría de Situaciones Didácticas en Matemáticas*. Buenos Aires: El Zorzal.

Chevallard Y. (1985). *La transposición didáctica: del saber científico al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.

Chevallard Y., Bosch M., & Gascón J. (2004). *Estudiar matemáticas: el eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. ICE-Horsori: Barcelona.

Godino J. D., Batanero C., Font V. (2008). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 10, 7-37.

Lakatos I. (1976). *Pruebas y refutaciones*. Madrid: Alianza.

Wilhelmi M. R. (2009). Didáctica de las Matemáticas para profesores. Las fracciones: un caso práctico. En C. Gaita, *Enseñanza de las matemáticas IV*. Pontificia Universidad Católica del Perú: Lima. Disponible en (04/07/2018): http://irem.pucp.edu.pe/wp-content/uploads/2011/10/actas_2009_iv_coloquio.pdf

Volver al índice de autores

3.2. Reportes de investigación

3.2.1. Estilos de aprendizaje en las estrategias didácticas grupales para el aprendizaje de la geometría en las instituciones educativas de la provincia de Huancayo

Rafael Marcelino Cantorin Curty
Universidad Nacional del Centro, Huancayo, Perú

Resumen

La investigación que se realizó, tuvo como propósito, determinar la influencia de los estilos de aprendizaje en las estrategias didácticas grupales para el aprendizaje de la Geometría, en las instituciones educativas de la provincia de Huancayo. Utilizando como método específico el experimental con un diseño cuasi experimental; investigación de tipo y nivel experimental. Muestreo no probabilístico y muestra conformada por tres secciones de la Institución Educativa "Politécnico Regional del Centro", divididos en dos grupos experimentales y uno de control, a los que se les suministro una prueba de entrada. Utilizando, luego el cuestionario CHAEA, para la identificación de los estilos y la formación de los grupos de trabajo, uno de ellos trabajó con la estrategia del aprendizaje cooperativo y el otro realizó el trabajo grupal, para el aprendizaje de la geometría en el tema de triángulos. Concluyendo que, existe diferencia significativa de la influencia de los estilos de aprendizaje en las estrategias didácticas grupales en el aprendizaje de la Geometría, en las instituciones educativas de la provincia de Huancayo; observándose una ligera ventaja a favor de la estrategia del aprendizaje cooperativo frente al aprendizaje grupal

INTRODUCCIÓN

El estudio es la aplicación de las estrategias grupales: trabajo en grupo y trabajo cooperativo, teniendo en cuenta en la formación de los grupos sus estilos de aprendizaje, para el aprendizaje de la geometría. Se reflexiona sobre la importancia de estudiar geometría y lo que esto significa para la sociedad moderna, explicando la evolución del razonamiento geométrico a través de cinco niveles consecutivos y del apoyo que brindan sus fases a la organización del currículo. La evidencia de que existe una relación entre los estilos de aprendizaje con el trabajo grupal y el logro académico, ha fundamentado la idea de que cada estudiante aprende de una forma diferente, el logro del estudiante está unido a

su forma específica de aprender, cuando los estudiantes aprenden teniendo en cuenta su propio estilo de aprendizaje, su rendimiento es más eficaz. *Un estilo de aprendizaje es una tendencia o disposición del sujeto a utilizar determinadas estrategias (Puente; 1994: 43).*

El profesorado que enseña matemáticas transmite valores, hábitos y costumbres, así como conocimientos y habilidades. *Todo esto supone introducir a los estudiantes en la "cultura de las matemáticas"* Bishop & Goffree (1986). En todos los sistemas educativos las matemáticas han ocupado un lugar importante en el currículo. Actualmente se desea que esta área sea accesible y útil a todos los estudiantes, pero no todos manifiestan la misma capacidad intelectual para la misma; se conoce la existencia de factores afectivos, culturales y metodológicos que influyen en el rendimiento académico de las matemáticas. Uno de los fines de la matemática en la escuela primaria es crear en el alumnado una actitud positiva hacia ella, y uno de los medios para conseguirlo es ayudar a los niños a experimentar placer intelectual a través de ellas. *Las matemáticas mantienen una posición central en la educación, porque contribuyen a la formación integral del niño desde diferentes perspectivas: instrumental, intelectual, comunicativa, cultural, lúdica, estática, creativa e histórica.* Hernández y Soriano (1999)

Si el aprendizaje es un proceso personal, que implica cambio y dura toda la vida, merece la pena contar con una serie de sugerencias para aprovechar las oportunidades de aprendizaje, tratándolas desde la perspectiva de nuestros estilos de aprendizaje. El estudio sobre los estilos de aprendizaje se enmarca dentro de los enfoques pedagógicos contemporáneos que insisten en la creatividad, en el aprender a aprender, en ser constructores de conocimientos, etc. Rogers (1975) afirma que: "el único hombre educado es el hombre que ha aprendido cómo aprender, cómo adaptarse y cambiar", citado en Capella y Otros (2003; 27).

El trabajo en grupo de los estudiantes, no es una cuestión novedosa dentro de la planificación y desarrollo de la enseñanza; *los grupos o equipos de aprendizaje tradicional, en los cuales se pide a los alumnos que trabajen juntos y ellos están dispuestos a hacerlo, e intercambian o se reparten la información, pero la disposición real por compartir y ayudar al otro a aprender es mínima.* El concepto clave del aprendizaje cooperativo, es por tanto, *la reflexión grupal, la participación en equipos de trabajo cooperativos requiere ser consciente, reflexivo y crítico respecto al proceso grupal en sí mismo. Los miembros del grupo necesitan reflexionar y discutir entre sí el hecho de si se están alcanzando las metas*

trazadas y manteniendo relaciones interpersonales y de trabajo efectivas y apropiadas (Díaz Barriga y Hernández; 2002: 109-114)

Partimos con la siguiente pregunta, ¿Cómo influye los estilos de aprendizaje en las estrategias didácticas grupales en el aprendizaje de la Geometría?; siendo nuestra hipótesis, influye los estilos de aprendizaje en las estrategias didácticas grupales en el aprendizaje de la Geometría y como objetivo, determinar la influencia de los estilos de aprendizaje en las estrategias didácticas grupales en el aprendizaje de la Geometría, en las instituciones educativas de la provincia de Huancayo.

METODOLOGÍA

Población.- Población objetivo, estudiantes del 4º grado de las instituciones educativas de la provincia de Huancayo y la población accesible, estudiantes del 4º grado de la Institución Educativa "Politécnico Regional del Centro".

Muestra y muestreo.- 105 estudiantes del 4º de la Institución Educativa "Politécnico Regional del Centro". El muestreo utilizado fue el no probabilístico.

Método general y específico.- Método científico como método general y como métodos específicos se empleó: el experimental y descriptivo.

Tipo y nivel de investigación.- El tipo y nivel de investigación fue el experimental.

Diseño de investigación.- Fue el cuasi experimental, su representación gráfica es:

GE_1: O_1 X O_4

GE_2: O_2 X O_5 .

GC: O_3 O_6

Donde:

GE_1 : Grupo experimental de trabajo grupal

GE_2 : Grupo experimental de trabajo cooperativo

GC : Grupo control

O_1, O_2 y O_3 : Prueba de entrada.

O_4, O_5 y O_6 : Prueba de salida.

X : Variable de investigación (estilos de aprendizaje como estrategia).

RESULTADOS

Resultados comparativos del pre test

Tabla Nº 01

RESULTADOS DE LOS ESTADÍGRAFOS EN LA PRUEBA DE ENTRADA

PRE TEST

	4º "C"	**4º "E"**	**4º "H"**
$\bar{X}$	09,42	10,91	09,17
Me	10	11	09
Mo	10	10	09
S^2	2,99	2,57	2,03
S	1,73	1,60	1,42
CV.	18,37%	14,69%	15,53%
As	-0,31	0,20	-0,19
K	-0,62	-0,61	0,38

Fuente: Datos de la prueba pedagógica.

INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS DE LA PRUEBA DE ENTRADA

- El 4to. "E" tiene un promedio de 10,91; siendo superior en 1,49 y 1,74 puntos con respecto a las secciones "C" y "H" (10,91 > 09,42 > 09,17). La mediana, estadístico que divide en dos partes iguales al conjunto de datos; luego el valor de la mediana es: 11, 10 y 09, perteneciendo a las secciones: "E", "C" y "H", respectivamente. La moda, estadístico que nos muestra la repitencia mayor de los datos; luego el valor de la moda es: 10 y 09, perteneciendo a las secciones del 4º "C", "E" y "H", respectivamente

- Los datos del 4º "C" están más dispersos con respecto a la media aritmética, porque tiene una desviación estándar de 1,73 frente a las secciones del "E" y "H" (1,73 > 1,60 > 1,44). El coeficiente de variación del 4º "C" es 18,37%, del 4º "H" es 15,53% y del 4º "E" es 14,69%; luego, todos los grupos son homogéneos.

- La asimetría del 4º "C" y del 4º "H" tienen sesgo negativo (-0,31 y -0,19), respectivamente; mientras que el 4º "E" tiene un sesgo positivo (0,20). Con respecto a la prueba pedagógica del pre test, para las secciones "C" y "H" fue fácil y para la sección "E" fue difícil. La curtosis del 4º "C" y del 4º "E" tiene la forma en la curva normal de platicúrtica; mientras que el 4to. "H" tiene la forma de leptocúrtica (K = 0,38).

- Para determinar cuáles de las secciones fueron el grupo experimental y el grupo control observamos las diferencias entre los promedios del pre test de las secciones del 4º "C", 4º "E" y 4º "H". Las secciones de ***4to. "C" y 4to. "H" fueron nuestro grupo experimental*** y el ***4to. "E" fue nuestro grupo control***.

ESTILOS DE APRENDIZAJE EN LA FORMACIÓN DE LOS GRUPOS

4to. "C" (Grupo experimental 1)

Tabla Nº 02

DISTRIBUCIÓN PORCENTUAL DE LOS ESTILOS DE APRENDIZAJE DEL GE_1

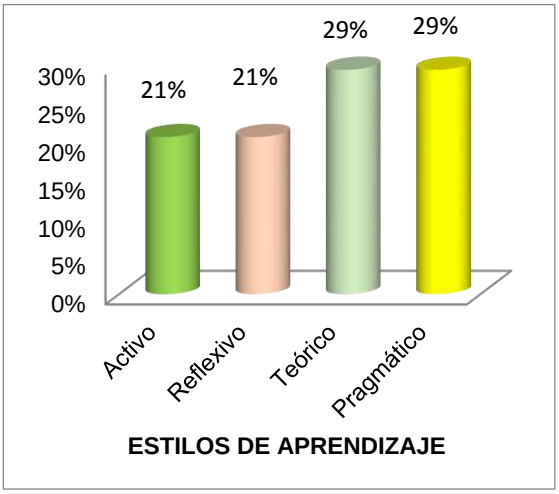
Estilos	No.	Porcentaje
Activo	7	21%

Reflexivo	7	21%
Teórico	10	29%
Pragmático	10	29%
TOTAL	**34**	**100%**

Interpretación- Cabe destacar que de los cuatro estilos analizados los *estilos teórico y pragmático*, son los que más predominan en los estudiantes del grupo experimental 1 (4to. "E"), los cuales presentan porcentajes de 29% que equivale a 10 estudiantes; mientras que los *estilos reflexivo y activo* tienen el 21%, que equivale a 7 estudiantes. Observemos este resultado en el siguiente gráfico.

Gráfico Nº 01

PORCENTAJES DE LOS ESTILOS DE APRENDIZAJE DEL GE_1



4to. "H" (Grupo experimental 2)

Tabla Nº 03

DISTRIBUCIÓN PORCENTUAL DE LOS ESTILOS DE APRENDIZAJE DEL GE_2

Estilos	No.	Porcentaje
Activo	7	19%

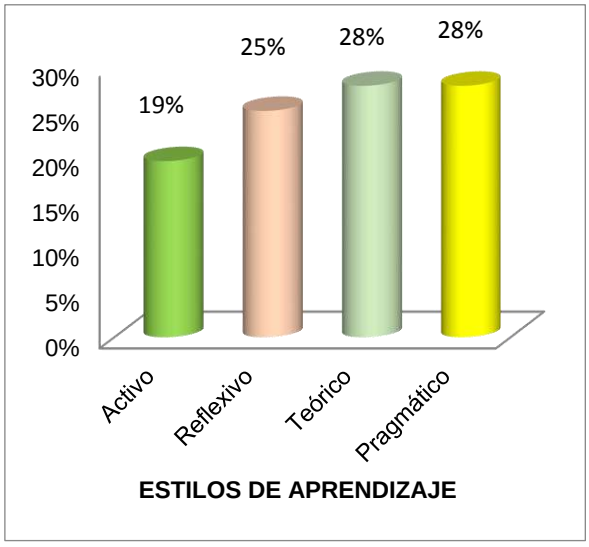
Reflexivo	9	25%
Teórico	10	28%
Pragmático	10	28%
TOTAL	**36**	**100%**

Fuente: datos del investigador.

Interpretación- Cabe destacar que de los cuatro estilos analizados los *estilos teórico y pragmático*, son los que más predominan en los estudiantes del grupo experimental 2 (4to. "J"), los cuales presentan porcentajes de 28% que equivale a 10 estudiantes; mientras que el *estilo reflexivo* tiene el 25%, que equivale a 9 estudiantes y el *estilo activo* tiene el 19%, que equivale a 7 estudiantes. Observemos este resultado en el siguiente gráfico.

Gráfico Nº 02

PORCENTAJES DE LOS ESTILOS DE APRENDIZAJE DEL GE_2



Fuente: Datos de la Tabla 03.

4to. "E" (Grupo control)

Tabla Nº 04

DISTRIBUCIÓN PORCENTUAL DE LOS ESTILOS DE APRENDIZAJE DEL GC

Estilos	No.	Porcentaje
Activo	8	24%
Reflexivo	10	29%
Teórico	7	21%
Pragmático	9	26%
TOTAL	**34**	**100%**

Interpretación- Cabe destacar que de los cuatro estilos analizados el *estilo reflexivo*, es el que más predomina en los estudiantes del grupo control (4to. "G"), tiene 29% que equivale a 10 estudiantes; mientras que el *estilo pragmático*, tiene 26% que equivale a 9 estudiantes; el *estilo activo* tiene el 24%, que equivale a 8 estudiantes y el *estilo teórico* tiene el 21%, que equivale a 7 estudiantes.

DISCUSIÓN

"Los estilos, en consecuencia, para Honey y Munford son también cuatro, que a su vez son las cuatro fases de un proceso cíclico de aprendizaje: ***activo, reflexivo, teórico y pragmático****"*. (Capella y Otros; 2003; 24)

Actualmente las investigaciones sobre los problemas que surgen de la enseñanza-aprendizaje de la Geometría por parte de los estudiantes, constituye uno de los campos de investigación más importante de la Educación Matemática, y creemos que una gran parte de estos problemas aparecen como consecuencia de las concepciones, creencias y de la propia formación que tienen los profesores, que llevan a cabo su enseñanza. Gómez, (2002), *"La eficacia de la matemática y su presencia constante en la sociedad moderna llevan a sugerir la utilización del pensamiento matemático para modelar situaciones*

prácticas. La capacidad de usar un concepto matemático engloba algo más que conocimientos simples de este concepto". (p. 132). El binomio didáctica-epistemología nos proporciona una visión distinta de las matemáticas y de su papel en la sociedad actual y nos permite mostrarse como algo cercano y como una de las herramientas más útiles que poseemos, como algo interesante y necesario.

Rodríguez (2013), en su trabajo de investigación, *Fortalecer estilos de aprendizaje para aprender a aprender*, trabajo con 51 estudiantes, (22 del sexo masculino y 29 del sexo femenino), de la secundaria básica de un instituto privado del partido bonaerense de Merlo, del 2do. Año, de los talleres de formación docente y técnica. El estudio consistió en el diseño, implementación y evaluación de un entorno virtual de formación para la enseñanza de la Matemática en la escuela secundaria teniendo en cuenta el estilo de aprendizaje del estudiante, determinado por el cuestionario CHAEA. Concluyendo, que los análisis correlacionales muestran para cada uno de los estilos un índice de correlación negativo con los puntajes del rendimiento académico del primer trimestre y correlación moderada con el rendimiento académico del segundo trimestre en que se implementó el curso; en síntesis, el análisis realizado comprobó un mayor rendimiento académico con la aplicación del entorno virtual de formación. En nuestro caso trabajamos con 56 estudiantes, que conformaron los grupos experimentales, todos del sexo masculino, de formación técnica, cuyas especialidades son: diseño arquitectónico, ebanistería, construcciones metálicas, y modelación y fundición. Diagnosticamos el estilo de aprendizaje, con el cuestionario CHAEA, formando los grupos de trabajo con las estrategias del aprendizaje cooperativo y aprendizaje grupal para el aprendizaje de la Geometría en el tema de triángulos. Díaz-Barriga y Hernández, (2002), *"se ha demostrado que los estudiantes aprenden más, les agrada más la escuela, establecen mejores relaciones con los demás, aumenta su autoestima y aprenden tanto valores como habilidades sociales más efectivas cuando trabajan en grupos cooperativos"*. (p. 101). En el post test (prueba de salida), tenemos como promedio 14,17 del grupo que trabajo con la estrategia del aprendizaje cooperativo; 13,40 el grupo que trabajo con la estrategia del aprendizaje grupal y 11,44 el grupo control.

CONCLUSIONES

Influye el cuestionario de estilos de aprendizaje "CHAEA", en la identificación del estilo predominante para la conformación de los grupos y desarrollar la estrategia didáctica del

aprendizaje grupal, notándose una diferencia significativa en el post y pre test, en el aprendizaje de la Geometría, en las instituciones educativas de la provincia de Huancayo.

Influye el cuestionario de estilos de aprendizaje "CHAEA", en la identificación del estilo predominante para la conformación de los grupos y desarrollar la estrategia didáctica del aprendizaje cooperativo, notándose una diferencia significativa en el post y pre test, en el aprendizaje de la Geometría, en las instituciones educativas de la provincia de Huancayo.

Influye el cuestionario de estilos de aprendizaje "CHAEA", en la identificación del estilo de aprendizaje activo para la conformación de los grupos y desarrollar las estrategias didácticas grupales, notándose un incremento en la relación de "CHAEA" con el pre y post test, en el aprendizaje de la Geometría, en las instituciones educativas de la provincia de Huancayo.

Influye el cuestionario de estilos de aprendizaje "CHAEA", en la identificación del estilo de aprendizaje reflexivo para la conformación de los grupos y desarrollar las estrategias didácticas grupales, notándose un incremento en la relación de "CHAEA" con el pre y post test, en el aprendizaje de la Geometría, en las instituciones educativas de la provincia de Huancayo.

Influye el cuestionario de estilos de aprendizaje "CHAEA", en la identificación del estilo de aprendizaje teórico para la conformación de los grupos y desarrollar las estrategias didácticas grupales, notándose un incremento en la relación de "CHAEA" con el pre y post test, en el aprendizaje de la Geometría, en las instituciones educativas de la provincia de Huancayo.

Influye el cuestionario de estilos de aprendizaje "CHAEA", en la identificación del estilo de aprendizaje pragmático para la conformación de los grupos y desarrollar las estrategias didácticas grupales, notándose un incremento en la relación de "CHAEA" con el pre y post test, en el aprendizaje de la Geometría, en las instituciones educativas de la provincia de Huancayo.

REFERENCIAS

Alonso, Gallego y Honey. (1999). *Los estilos de aprendizaje*. 4ta. Edición. Bilbao-España: Ediciones Mensajero.

Alsina, Burgés y Fortuny. (1987). *Invitación a la didáctica de la geometría*. Madrid. Síntesis.

Bishop, A. & Goffree, F. (1986). *Perspectives on mathematics education*, Dordrecht, Holanda, D. Reidel.

Capella, J. y Otros. (2003). *Estilos de aprendizaje*. Lima: Fondo Editorial. Centro de Investigaciones y Servicios Educativos-CISE. PUCP.

Díaz-Barriga, F. y Hernández, G. (2002). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista*. 2da. Edición. México D. F: McGraw-Hill.

Gómez, J. (2002). *De la enseñanza al aprendizaje de las matemáticas.* Buenos Aires: Paidós Ibérica S. A

Hernández, F. y Soriano, E. (1999). Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación. Madrid: La Muralla.

Puente, A (1994). *Estilos de aprendizaje y enseñanza*. Madrid: Colección Programas de Intervención Educativa. Ciencias de la Educación Preescolar.

Rodríguez, M. (2013). Fortalecer estilos de aprendizaje para aprender a aprender. Trabajo de investigación en la Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED). *Revista Estilos de Aprendizaje, VI*(11), 19-37

Volver al índice de autores

3.2.2. Propuesta de nueva metodología cualitativa para el estudio de las teorías implícitas docentes

Rodri Demus De La Cruz Rodríguez
Ricardo Francisco Luengo González
Luis Manuel Casas García
Universidad de Extremadura, España

Resumen

En este reporte se presentan los resultados de una investigación que exploró las teorías implícitas docentes sobre la evaluación en matemáticas. Para ello, se empleó una metodología cualitativa en la que se combinó el análisis de contingencias para el análisis de contenido de textos y la representación gráfica de forma automatizada mediante Redes Asociativas Pathfinder para destacar las principales categorías de análisis obtenidas y su relación. Los participantes fueron 87 maestros en formación inicial, para la exploración de las teorías implícitas se tomó como marco teórico el de las teorías implícitas. La recogida de datos se realizó mediante la técnica de relatos en la cual se solicitó a los participantes que redacten sus percepciones sobre la evaluación en matemáticas.

Los resultados indican que el uso de esta metodología es apropiada para el estudio de las teorías implícitas docentes, ayuda la obtención de datos con una mínima intervención del investigador y puede ser aplicada a múltiples temas de investigación, además se evidencia que las teorías implícitas que poseen los docentes de la universidad peruana participante están mejor relacionadas con la pedagogía tradicional y las teorías implícitas que tienen los maestros de la universidad española están más próximas a la pedagogía contemporánea

Introducción

En los últimos años los reportes de investigaciones realizadas tanto en el contexto nacional como internacional dan cuenta que la formación inicial del profesorado es fundamental como para aspirar a una educación diferente por lo que conocer las teorías implícitas que poseen los maestros resultan de gran importancia ya que mediante estas se pueden promover diferentes perspectivas para luego ser llevadas al aula (Thompson, 1992; Ponte, 1992; Blanco, Mellado y Ruiz, 1995;Mellado, Ruiz y Blanco, 1997; Camacho, Hernández y Socas, 1995; Blanco, 1998; Carrillo, 1998; Flores, 1998; Contreras, 1999). Por ello, en este trabajo hemos explorado cuáles son las opiniones, concepciones y creencias en

términos de teorías implícitas que tiene el profesorado en formación inicial respecto a la evaluación en matemáticas ya que nos parece sumamente importante porque permite conocer cómo estos piensan y actuarían cuando se enfrenten al aula de clase y al verse en la necesidad de evaluar a sus alumnos como lo realizarían.

De Vries (2015) al referirse a la evaluación señala que debe ser abordada con mucho cuidado por el hecho de que aún existe una escasa formación en evaluación durante la formación del profesorado por lo que resulta necesario mejorar el proceso de formación del profesorado frente a ello Mellado, Blanco y Ruiz (1999) indican que entender el papel que desempeñan las teorías implícitas ayudaría a mejorar los procesos de formación.

A nivel Español estudios de investigadores como Buendía, Carmona, Gonzales y López (1999) señalan que las concepciones sobre la evaluación de los maestros se encuentran ubicadas en el enfoque tradicional, por su parte Gil, Rico y Fernández (2002) indican que las concepciones del profesorado sobre la evaluación no son individuales es decir se tratarían de una tendencia de sus pensamientos; en tanto en el contexto peruano los autores Zapata, Blanco y Contreras (2008) mencionan que los maestros de matemáticas en formación ven la evaluación como un proceso de recogida de información que permite tomar decisiones para reorientar el proceso de enseñanza, mientras que Moreno, Asmad, Cruz y Cuglievan (2008) afirman que los maestros tienen un fuerte arraigo por las concepciones pedagógicas tradicionales y que se reflejan en sus prácticas pedagógicas.

Es asi que este campo de estudio es aún una temática de actualidad al existir investigaciones recientes realizadas en diferentes países por ejemplo una de ellas es la de Pontes, Poyato, López y Oliva (2016) quienes señalan que las concepciones respecto a la evaluación de los maestros de secundaria en formación inicial de diversas especialidades están relacionadas con el enfoque innovador más próximo al constructivista. Otra investigación es la de Azis Azis (2015) quien revela que las concepciones de los maestros respecto a la evaluación es un conflicto y considera que las políticas del estado limitan sus esfuerzos. También existe el estudio de los investigadores Monteagudo, Molina y Miralles (2015) cuyos resultados indican que los docentes en ejercicio muestran escasa formación, y evalúan a sus alumnos con procedimientos tradicionales. Por su parte Gil (2014) revela que las concepciones de los maestros en formación están situadas en la teoría implícita constructiva.

En la revisión de los estudios que hemos citado hasta este punto nos hemos dado cuenta que en su mayoría se abordan tomando como marco teórico diversos enfoques y usando

diversos instrumentos para explorar las teorías implícitas por lo que para este estudio hemos adoptado como marco teórico el enfoque de las teorías implícitas Pozo, Scheuer, Perez, Mateos, Martín y De la Cruz (2006) quienes nos muestran una clasificación de cuatro teorías: la teoría implícita directa, la interpretativa, la constructiva y la posmoderna de las que para este trabajo consideramos útiles las tres primeras ya que la cuarta teoría según nuestra opinión aún no se ajusta a las leyes educativas de los países involucrados en esta investigación. Para la teoría directa la evaluación se centraría en los resultados, mientras que en la teoría interpretativa la evaluación vendría hacer la apropiación de los contenidos y para la teoría constructiva la evaluación es vista como la construcción de capacidades para gestionar los contenidos.

Asi mismo, se consideró esencial para nuestro trabajo considerar en el marco teórico las dimensiones básicas de la evaluación (Tejada, 1997, De la Torre, 1994) ¿para qué? que viene a ser la finalidad de la evaluación, ¿qué? que es el objeto de evaluación, ¿cómo? relacionado con los modelos de evaluar, ¿quién? que vienen hacer los agentes que realizan la evaluación, ¿con qué? que son los instrumentos de evaluación, y ¿cuándo? que son los momentos de efectuar la evaluación.

Po otro lado en este estudio se usaron las Redes Asociativas Pathfinder (Godinho, Luengo y Casas, 2007) las mismas que son una especie de organizadores visuales las que muestran el nivel de relación y asociación de ideas que tiene un sujeto respecto a una temática de estudio. Esta herramienta trabaja conjuntamente con el software informático para análisis cualitativo WebQDA (Neri de Souza, Costa y Moreira, 2011) en el cual se ingresa la información obtenida, se codifica, se generan las categorías de investigación y luego se exportan matrices en formato Excel para generar gráficos descriptivos, asi como matrices triangulares en formato webqda para que luego usando la aplicación Goluca realizar las Redes Asociativas Pathfinder usando Goluca (Godinho, Luengo y Casas, 2007).

Metodología

Para este estudio se adoptó un enfoque mixto, basado en un análisis cualitativo, seguido de una fase cuantitativa (Creswell y Plano, 2007). La fase cualitativa consistió en realizar la reducción y categorización de la información, mientras que en la fase cuantitativa se realizó representaciones graficas usando Microsoft Excel y Goluca correspondiente a las categorías de investigación. Luego se hizo un análisis e interpretación conjunta de resultados por lo que el estudio trató de describir el fenómeno basado en un diseño no

experimental exploratorio (Creswell y Plano, 2007). Para identificar las teorías implícitas sobre evaluación en matemáticas en maestros en formación inicial han participado 87 futuros maestros hombres y mujeres 42 de la Universidad de Trujillo (Perú) que cursaban su último año de formación y los otros 45 maestros de la Universidad de Extremadura (España) que se encontraban en su penúltimo año de estudios.

La recogida de datos se hizo mediante la técnica de relatos (Alzás y Casas, 2015) en la cual se planteaban cuestiones referidas a las dimensiones básicas de la evaluación como la finalidad, el objeto, el modelo, los evaluadores, los instrumentos y el momento de evaluación (Tejada, 1997, De la Torre, 1994) y que los participantes deberían tan solo escribir sus opiniones o reflexiones de manera libre.

El tratamiento de datos se realizó con el software informático para análisis cualitativo WebQDA (Neri de Souza, Costa y Moreira, 2011) en el cual se tuvo que ingresar como fuentes internas todos los relatos de los participantes para luego codificarlos, generar las respectivas categorías de investigación, las clasificaciones necesarias, exportar las matrices en formato Excel para generar gráficos descriptivos y exportar matrices triangulares en formato webqda para realizar las Redes Asociativas Pathfinder usando Goluca (Godinho, Luengo y Casas, 2007).

Luego se hizo un análisis conjunto de datos (cualitativos y cuantitativos) considerando las categorías de investigación, los gráficos generados con Excel y las figuras realizadas con Goluca.

Resultados y discusión

Del análisis de los relatos de los participantes se logró establecer tres dimensiones (teoría directa, teoría interpretativa y teoría constructiva) cada una agrupada en seis categorías (finalidad, objeto, modelo, evaluador, instrumento y momento) y con ayuda del software WebQDA fue posible cuantificar las teorías de los sujetos por dimensiones con la finalidad de tener cantidades porcentuales que permitan ver la inclinación entre una teoría u otra. La figura que presentamos a continuación muestra la información cuantitativa respecto a cada teoría:

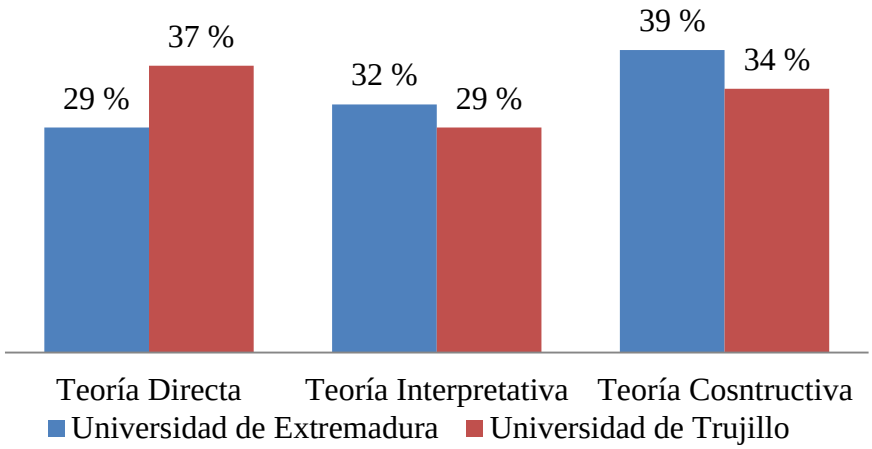


Figura 1. Teorías implícitas sobre la evaluación en matemáticas

Interesaba ver que tan relacionadas o asociadas se encontraban estas teorías por lo que en las figuras que presentamos a continuación muestran su nivel de asociación asi como la exclusión de algunas categorías:

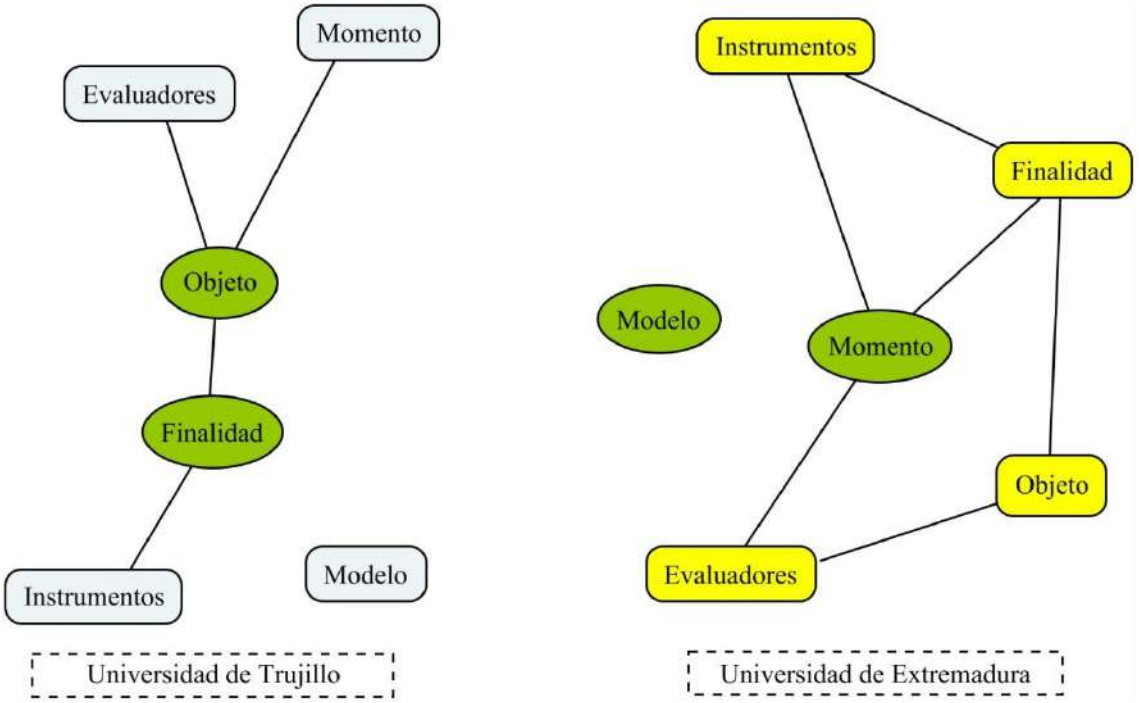


Figura 2. Red Asociativa Pathfinder de las categorías de investigación. Teoría directa

Para la teoría implícita directa, según la Figura 1 las teorías de los sujetos de la Universidad de Trujillo representan el 37 % y de acuerdo a la Figura 2 las categorías que relacionan a las demás son el objeto y finalidad de la evaluación.

En tanto, las teorías de los participantes de la Universidad de Extremadura son el 29% y de la Figura 2 la categoría que relaciona a las demás es el momento de evaluación.

Estos resultados se relacionan con los obtenidos por (Moreano, Asmad, Gruz y Cuglievan, 2008; Gil, 2014; Remesal, 2011; Wang, Kao y Lin, 2010; Coll y Remesal, 2009; Moreno y Ortiz, 2008) por lo que mediante este análisis damos cuenta que los futuros maestros en formación inicial al evaluar los aprendizajes en matemáticas lo harían para ver cuánto se adquirido los conocimientos y que pondrían especial interés en realizar la evaluación al final del proceso.

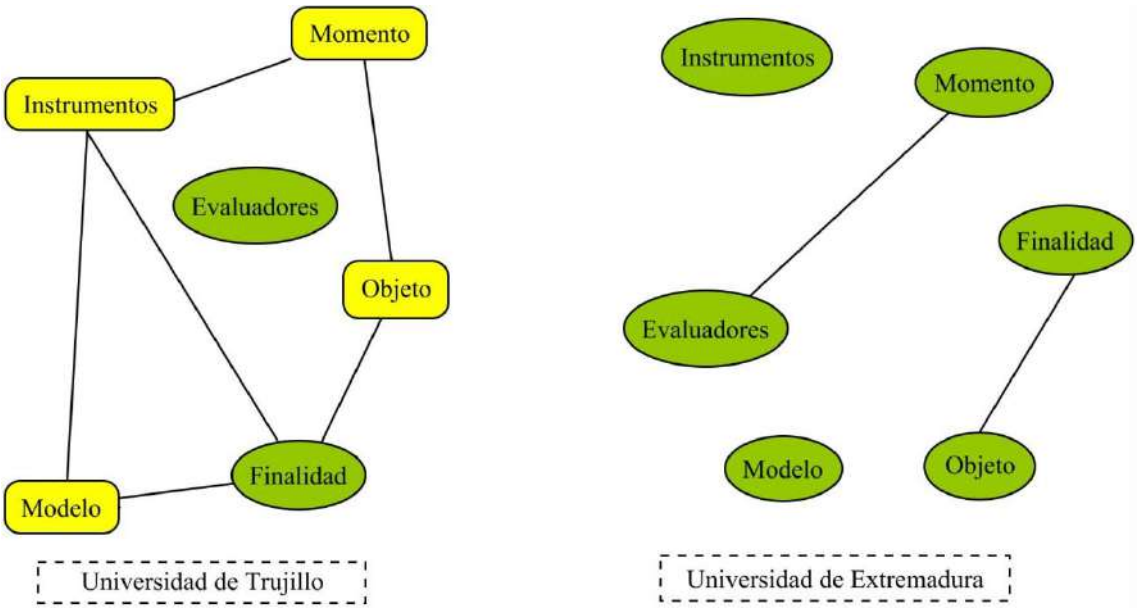


Figura 3. Red Asociativa Pathfinder de las categorías de investigación. Teoría interpretativa

Para los sujetos de la Universidad de Trujillo en la teoría interpretativa estas teorías representan el 29 % (Figura 1) y de la Figura 3 la categoría que relaciona a las demás categorías es la finalidad de la evaluación y que la categoría evaluadores se encuentra totalmente aislada.

Por otro lado vemos que las teorías implícitas de los futuros maestros de la Universidad de Extremadura en la dimensión teoría interpretativa según la Figura 1 representan el 32 % y que de la Figura 3 existen cuatro categorías que se relacionan dos a dos por una parte los evaluadores con el momento y también la finalidad con el objeto.

Estos resultados coinciden con el aporte de Benítez (2013) por lo que para estos futuros maestros las matemáticas se caracteriza por el seguimiento de reglas, procedimientos, practica rutinaria de ejercicios, uso de palabras clave y la falta de un contexto significativos para su aprendizaje, en general podemos decir que las teorías implícitas de los futuros maestros resultan ser un conflicto ya que confunden la finalidad con el objeto de evaluación, el modelo con los instrumentos de evaluación lo que nos permite confirmar los resultados de Azis (2015).

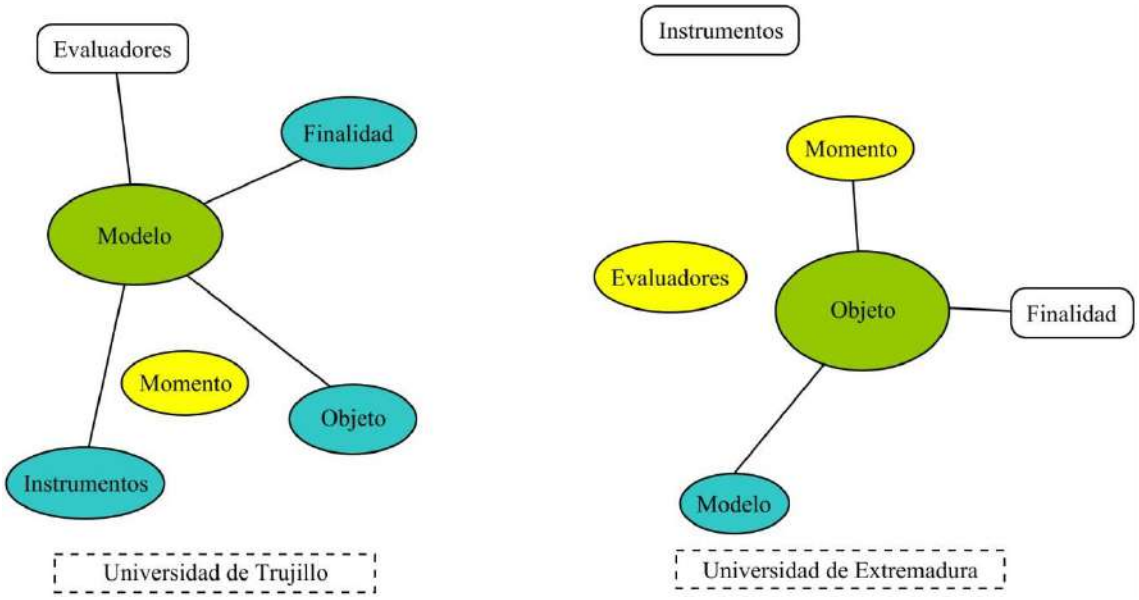


Figura 4. Red Asociativa Pathfinder de las categorías de investigación. Teoría constructiva

Por último, las concepciones sobre la evaluación en matemáticas en la dimensión teoría constructiva en los sujetos de la Universidad de Trujillo representan el 34 % (Figura 1) y de la Figura 4 la categoría que mejor asociada se encuentra es el modelo de evaluación. Por su parte, los participantes de la Universidad de Extremadura que se identifican por la dimensión teoría constructiva son el 39% (Figura 1) y que de acuerdo a la Figura 4 estas teorías giran en función al objeto de evaluación.

Estos resultados se encuentran en la tendencia con los obtenidos por los investigadores (Moreano, Asmad, Cruz y Cuglievan, 2008; Gil, 2014) por lo que estos futuros maestros al evaluar las matemáticas a sus alumnos tendrían en cuenta los procedimientos y estrategias que usa el alumno para abordar situaciones cotidianas.

Conclusiones

Nuestros resultados evidencian que el uso de esta metodología es apropiada para el estudio de las teorías implícitas docentes, ayuda la obtención de datos con una mínima intervención del investigador y puede ser aplicada a múltiples temas de investigación sobre todo en educación y ciencias sociales, además el estudio evidencia que las teorías implícitas que poseen los docentes de la universidad peruana participante están mejor relacionadas con las teorías pedagógicas tradicionales y las teorías implícitas que tienen los maestros de la universidad extranjera están más próximas a las teorías pedagógicas contemporáneas.

Como futuras líneas de trabajo consideramos necesario para este tipo de estudios que además de aplicar esta técnica, complementarlo con grupos de discusión o entrevistas a profundidad con el objetivo de aclarar algunas dudas respecto a algunas categorías en donde la información es escasa y en aquellas donde hay confusión respecto a algunas categorías; también se podría hacer un seguimiento a este grupo de estudio como para ver si estas teorías que presentan como estudiantes serían las mismas al enfrentarse al aula de clase.

Referencias

Alzás, T. & Casas, L. (2015). Relato autobiográfico del abandono educativo: Una visión integrada desde metodologías mixtas. *Atas CIAIQ2015, 4*(3), 108-113.

Azis, A. (2015). Conceptions and practices of assessment: A case of teachers representing improvement conception. *TEFLIN Journal, 26*(2), 129-154.

Benitez, W. (2013). Concepciones sobre las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje de docentes en formación. *Educación científica y tecnológica*, 176-180.

Blanco, L. (1998). Otro nivel de aprendizaje: perspectivas y dificultades de aprender a enseñar Matemáticas. *Cultura y Educación, 9*, 77-96.

Blanco, L. Mellado, V. & Ruiz, C. (1995). Conocimiento Didáctico del Contenido en Ciencias Experimentales y Matemáticas y Formación de Profesores. *Revista de Educación*, 307, 427 – 446.

Buendía, L., Carmona, M., González, D., & López, R. (1999). Concepciones de los profesores de educación secundaria sobre evaluación. *Educación XX1, 2*(1), 125-154.

Camacho, M., Hernández, J. & Socas, M. (1995). Concepciones y actitudes de Futuros profesores de secundaria hacia la matemática y su enseñanza: un estudio descriptivo. En Blanco, L. y Mellado, V. (1995). *La formación del profesorado de ciencias y matemáticas en España y Portugal*. Badajoz. Imprenta de la Excma. Diputación de Badajoz. 81 – 97.

Carrillo, J. (1998). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la Matemática y su enseñanza: metodología de la investigación y relaciones*. Huelva. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Huelva.

Coll, C., & Remesal, A. (2009). Concepciones del profesorado de matemáticas acerca de las funciones de la evaluación del aprendizaje en la educación obligatoria. *Infancia y aprendizaje*, *32*(3), 391-404.

Contreras, L. (1999). *Concepciones de los profesores sobre la resolución de problemas*. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Huelva.

Creswell, J., & Plano, V. (2007). *Designing and conducting mixed methods research*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

De La Torre, S. (1994). *Innovación curricular. Proceso, estrategias y evaluación.* Madrid: DyKinson, S.L.

De Vries, W. (2015). Las múltiples facetas de la evaluación educativa. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, *20*(66), 679-683.

Flores, P. (1998). *Concepciones y creencias de los futuros profesores sobre las Matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. Granada*. Comares.

Gil, F. , Rico, L. & Fernández, A. (2002). Concepciones y creencias del profesorado de secundaria sobre evaluación en matemáticas. *Revista de investigación educativa, 20*(1), 47-75.

Gil, P. (2014). Concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje del alumnado del Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria de la Universidad del País Vasco. *Magister, 26*, 67-74.

Godinho, V., Luengo, R., & Casas, L. (2007). *Implementación del software GOLUCA y aplicación al cambio de redes conceptuales.* Informe para la obtención del "Diploma de Estudios Avanzadaos", Universidad de Extremadura, España.

Mellado, V., Blanco, L. y Ruiz, C. (1999). *Aprender a enseñar ciencias experimentales en la formación inicial de profesorado.* Badajoz: ICE de la Universidad de Extremadura.

Mellado, V., Ruiz, C. & Blanco, L. (1997). Aprender a enseñar ciencias experimentales en la formación inicial de maestros. *Bordon, 49* (3), 275-288.

Monteagudo, J., Molina, S., & Miralles, P. (2015). Opiniones sobre evaluación de los profesores de segundo ciclo de ESO de geografía e historia en España: El caso de la Región de Murcia. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 20*(66), 737-761.

Moreano, G., Asmad, U., Cruz, G., & Cuglievan, G. (2008). Concepciones sobre la enseñanza de matemática en docentes de primaria de escuelas estatales. *Revista de Psicología, 26*(2), 299-336.

Moreno, I., & Ortiz, J. (2008). Docentes de educación básica y sus concepciones acerca de la evaluación en matemática. *Revista Iberoamericana de Evaluación Educativa, 1*(1), 140-154.

Neri de Souza, F., Costa, A., & Moreira, A. (2011). Questionamento no processo de análise de datos qualitativos com apoio de software WebQDA. *EduSEr-Revista de Educacao, 3*(1), 19-30.

Ponte, J. (1992). Concepções dos Profesores de Matemática e Processos de Formação. En Brow,M.; Fernandes,D.; Matos J,. y Ponte,J..: *Educação Matemática*. Instituto de Inovação Educacional. Lisboa.185-239.

Pontes, A., Poyato, F., López, L., & Oliva, J. (2016). Concepciones sobre evaluación en la formacion inicial del profesorado de ciencias, tecnología y matemáticas. *Revista Iberoamericana de Evaluación Educativa*, *9*(1), 91-107.

Pozo, J., Scheuer, N., Perez, M., Mateos, M., Martín, E., & De la Cruz, M. (2006). *Nuevas formas de pensar la enseñanza y el aprendizaje: las concepciones de profesores y alumnos*. Barcelona: Grao.

Remesal, A. (2011). Primary and secondary teacher's conceptions of assessment: A qualitative study. *Teaching and Teacher Education, 27*(2), 472-482.

Tejada, J. (1997). *La evaluación de programas.* Barcelona: Ed. Departament de Pedagogia i Didáctica UAB.

Thompson, A. (1992): Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. En Grouws, D. (ed.): *Handbook of research on Mathematics teaching and learning*, Nueva York. MacMillan, 127-146.

Wang, J., Kao, H., & Lin, S. (2010). Preservice teacher's initial conceptions about assessment of science learning: The coherence with their views of learning science. *Teaching and Teacher Education, 26*(3), 522-529.

Zapata, M., Blanco, L. & Contreras, L. (2008). Los estudiantes para profesores y sus concepciones sobre las matemáticas y su enseñanza-aprendizaje. *REIFOP*, *12*(4), 109-122.

Volver al índice de autores

3.2.3. Recursos Lúdicos para comprensión de patrones matemáticos

Luz Marlene Mendoza Torren
I.E. Simón Bolívar, Cusco, Perú
Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco, Cusco, Perú

Resumen

La presente comunicación breve, describe una propuesta estratégica para intervenir en los procesos de comprensión de reglas matemáticas. Para ello se aplicó una prueba de diagnóstico de conocimientos que fue el punto de partida para realizar la selección de un conjunto de recursos lúdicos y situaciones del contexto que pueden ayudar a iniciar en el proceso de generalización de reglas de patrones matemáticos en los estudiantes del Segundo Grado de Educación Secundaria de VI ciclo de la Educación Básica Regular, de la institución educativa pública "Simón Bolívar" de Cusco – Perú.

INTRODUCCIÓN

La experiencia que se presenta es una propuesta de estrategia dedicada al estudio y análisis del papel que cumplen los recursos lúdicos en el proceso de la comprensión de patrones matemáticos, con el objeto de superar las dificultades que los estudiantes presentan al realizar las representaciones de secuencias y patrones. Los proyectos que se proponen tienen un propósito único en la educación mejorar el aprendizaje de la matemática; una de entre tantas propuestas es identificar diferentes situaciones de la vida diaria, recursos, actividades relacionados a patrones; esto porque la experiencia nos ha permitido reconocer que muchos de los contenidos matemáticos están relacionados con los patrones matemáticos, además hoy por hoy los conocimientos se construyen en base a la formación de regularidades; por ello nuestro interés y producto de la experiencia diaria en el aula hemos identificado situaciones, como: los fenómenos naturales, actividades que realizamos desde que nos levantamos hasta que llegamos a dormir, actividades productivas o laborales, etc. que muestran el concepto de regularidades, secuencias y patrones, los mismos que se pueden llevar o utilizar en las sesiones de aprendizaje. Además, estamos convencidos que relacionar o acercar más al estudiante a la realidad le encontrará más sentido y utilidad a los conceptos matemáticos.

Objetivos de la investigación

El objetivo general de la investigación se centró en identificar los recursos que se pueden utilizar para mejorar la Representación y Comprensión de los patrones matemáticos en los

estudiantes del VI ciclo de la Educación Básica Regular (EBR), primer y segundo grado de educación secundaria.

De manera simultánea, se propuso identificar y codificar los errores que los estudiantes cometen al realizar tareas referidas a patrones matemáticos.

Metodología

El investigador es el que propone la manera de intervención, es decir determina el estilo de la investigación como señalan Rodríguez, Gil y García (1996), en esta línea se utilizó criterios que ayudan a describir y explicar un acontecimiento o fenómeno con el objeto de identificar la realidad y buscar alternativas de solución, como: el paradigma naturalista interpretativo, enfoque cualitativo y tipo de investigación aplicada proyectiva. Los conceptos y aportes teóricos se centraron en recursos didácticos (Paredes, 1998; Corbalán, 1986), la representación y comprensión de patrones matemáticos (Duval, 199; Hiebert y Carpenter 1992) y el modelo de Pieri y Kieren son el sustento científico de la propuesta. Se inició con las teorías y el modelo de la investigación; luego se explica los constructos que se originaron producto del análisis, reflexión y síntesis de la revisión bibliográfica, desde un contexto general para centrarnos en la disciplina de la educación matemática.

El trabajo de campo se desarrolló en la institución educativa Simón Bolívar de Cusco, con una muestra intencionada de 113 estudiantes y 04 docentes del área de matemática, los instrumentos que se utilizaron para el diagnóstico fueron una guía de entrevista semi estructurada para docentes y para estudiantes un cuestionario de opinión y prueba de conocimientos. La prueba de conocimientos constó de 18 ítems, con el objetivo de identificar en los estudiantes las capacidades desarrolladas en el manejo de conceptos básicos referidas a secuencias (figura 1), regularidades y patrones matemáticos, considerándose las diferentes representaciones (verbal o escrita, simbólica, tabular, grafica) dentro de la aritmética, algebra y geometría, que se resume en la figura 2, considerando las diferentes traducciones o conversiones de las representaciones de patrones matemáticos. Para su elaboración se adaptó tomando como referencias algunas publicaciones de textos escolares del Ministerio de Educación de Perú - MINEDU, cuadernos de trabajo de Santillana publicados electrónicamente, e investigaciones realizadas por diferentes autores.

Observa la secuencia. Representa la figura 4

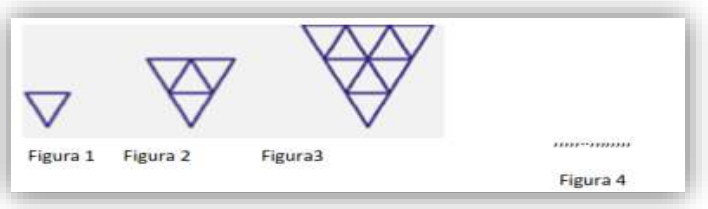
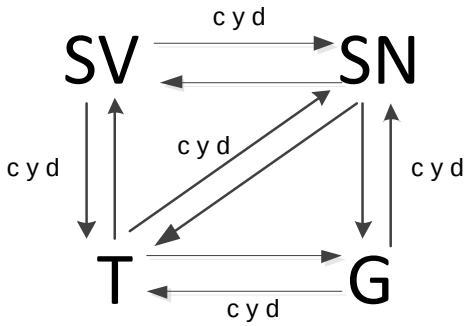


Figura 1. Ítem 7 del cuestionario a estudiantes. Tomado de Cuadernos de trabajo 6° Santillana

La siguiente figura 2 resume las diferentes representaciones que se han utilizado para la elaboración de los ítems de la prueba de conocimientos.



Dónde:

SV : Simbólico verbal

G : Gráfico

SN : Simbólico numérico

T : Tabular

c : Contexto continuo

Figura 2. Esquema de la conversión de una representación a otra

La metodología empleada para la recolección, análisis y procesamiento de datos denominada trabajo de campo según Rodríguez, Gil y García (1996), fue: coordinación, intervención, organización de información, procesamiento y reducción de datos, interpretación y obtención de resultados. Para el procesamiento y reducción de datos se realizó según el tipo de datos: Para los cuantitativos, la prueba de conocimientos se organizó y se aplicó utilizando las escalas según el nivel de aciertos logrados: **inicio, proceso, logrado y logro destacado**.

Como se muestra en la tabla 1.

Tabla 1

Resultados de la prueba de conocimie

	Niveles de logro	Frecuencia	Porcer
Valido	Inicio	20	17,
	Proceso	41	36,
	Logrado	34	30,1
	Logro destacado	18	15,9
	Total	113	100,0

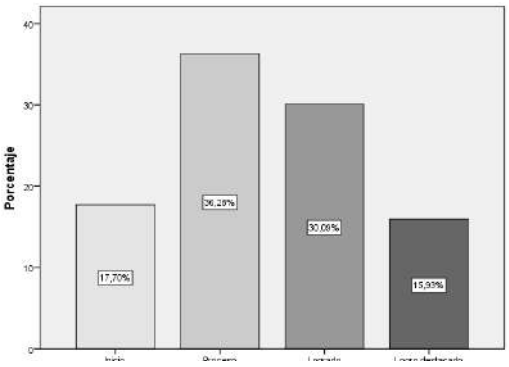


Figura 3. Grafica de resultados de la prueba de conocimientos

Fuente: *Base de datos*

El procesó de la prueba de conocimiento se hizo ítem por ítem con el objeto de reconocer los logros y las dificultades en las traducciones o conversiones de las diferentes representaciones que los estudiantes cometen. Se procesó utilizando la herramienta Excel con una escala de calificación, de si es correcta igual a 1 y errada o falla igual a 0.

Para el caso de los datos Cualitativos; la guía de entrevista semiestructurada, se aplicó a cuatro docentes, las mismas que se transcribieron en un archivo de Word, y con las interpretaciones de los resultados de la prueba de conocimientos y el cuestionario de opinión. Se hizo el procesamiento en la herramienta informática de análisis Atlas.Ti. A partir de estas tres informaciones; se asignó o creo códigos abiertos de la información relevante relacionada a los objetivos y problemática de la investigación. Este procesamiento permitió la triangulación a nivel de datos, métodos, participantes y de instrumentos con el objeto de buscar patrones de congruencia en una investigación de un mismo fenómeno humano a través de diversas aproximaciones.

Breve descripción de la propuesta

La prueba de diagnóstico y análisis teórico fueron el punto de partida para realizar la propuesta metodológica, que se resume en el esquema de modelación figura 8, que consta de tres momentos: diagnóstico, estrategia de la propuesta y aplicación, sustentados en fundamentos teóricos científicos. Esta propuesta denominada **"Recursos para la formalización matemática", se describe brevemente los hallazgos en** la etapa de diagnóstico, como: estudiantes que presentan dificultades ante conceptos básicos para la construcción de una secuencia con gráficos, esto permitió pasar a un segundo momento el modelado "*Estrategia de la Propuesta*", que consta de cinco sub etapas (selección de recursos, elaboración, diseño, aplicación y evaluación). Para esta etapa de la elaboración de recursos se recurrió a la publicación de *Juegos matemáticos para secundaria* por Corbalán (1994) seleccionándose varias actividades y también de varias páginas electrónicas que se mencionan.

El proceso de la selección de recursos y de situaciones del contexto; se realizó una revisión de actividades del contexto y de la bibliografía, con el objeto de tomar decisiones adecuadas para implementar alternativas de solución, para ello, se propone tres tipos de recursos (situaciones del contexto, juegos matemáticos y manipulativos e impresos). el **segundo** paso corresponde a la etapa de elaboración de prototipos de recursos didácticos, considerando las exigencias mínimas que debe tener el material, como: motivador y mediador del trabajo de los estudiantes, abarcando los contenidos y la guía de sugerencias metodológicas; se transita a una **tercera** etapa de diseño de recursos didácticos que se utilizan en las sesiones de aprendizajes, considerando la calidad de material, su presentación y su durabilidad; los pasos seguidos fueron: **a) selección, b) elaboración de prototipos, c) diseño de los recursos, d) aplicación y e) evaluación de los recursos**. Algunos de los diseños, como: el salto del caballo, torre de dados, el gusanito de 30, el salto de la rana, etc. Se describe brevemente a continuación:

1. **La torre de dados a partir** de una pregunta de la olimpiada matemática del VII concurso canguro matemático 2000 nivel 1: de 1º de E.S.O. Se adaptó a la siguiente actividad: Una torre de dos dados idénticos como muestra la figura, colocados una encima de otra en una mesa:

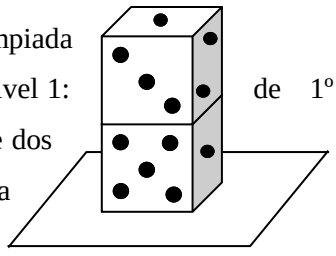


Figura 4. Torre de dados

a) **¿Cuánto suman los puntos de las caras ocultas**? (las que no se ven por ningún lado, es decir las bases)

b) Si tenemos una torre de 10 dados **¿Cuánto suman los puntos de las caras ocultas**? y

c) **Elabora una regla que generalice para n número de dados**. También propuesto esta propuesto en el libro electrónico de Matemática para todos. https://issuu.com/espegesteira/docs/fasc_culo113unidos

De igual forma se puede realizar las con dados de 12 (dodecaedro) y 20 (icosaedro) caras, solicitando que formen torres con los dados y determinar la suma de los puntos de las caras de las bases (caras que no se observan) como la figura 5.

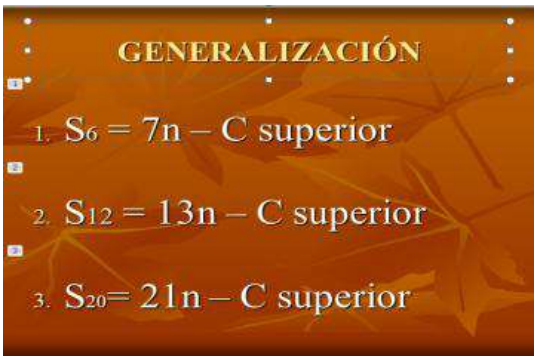


Figura 5. Generalización de torre de dados

2. **El gusanito de 30 casillas** juego propuesto en los talleres de implementación por los especialistas de MINEDU – 2014, implementación del nuevo currículo escolar.

   Jaime y Joaquín juegan "El Gusanito". Luego de varias jugadas, Jaime no comprende porque Joaquín siempre le gana. Luis que está observando el juego, ha descubierto una estrategia con la que Jaime puede ganar. **¡Descúbrela tú también!**

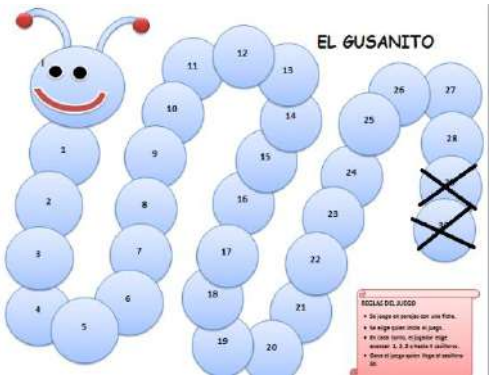
   - Lee las reglas del juego:

   a) Se juega en parejas con una sola ficha o moneda.

b) Eligen quien inicia el juego.

c) En cada turno el jugador elige avanzar 1, 2 o hasta 3 casilleros.

d) Gana el juego quien llega al casillero 30.



- Realiza un ensayo para comprender las reglas del juego.
- Registra en una tabla cada una de tus jugadas
- Juega varias partidas hasta que descubras cómo ganar.
- Determina una **regla general que permita ganar siempre**

Figura 5. Generalización de torre de dados

3. **El doblado de papel** propuesto en http://historiaybiografias.com/ciencia4/ "Doblar un papel por la mitad… tres veces". Existen varias propuestas planteadas como curiosidades.

A partir de las actividades propuestas se adaptó las siguientes tareas:

a) Una hoja de papel doblar una vez, luego abrir y observar como quedo la hoja.

b) Doblar por segunda vez, luego abrir y observar como quedo la hoja.

c) Doblar por tercera vez, luego abrir y observar como quedo la hoja.

d) …..

e) Doblar 10 veces e indicar cuantos dobleces y líneas se producen. **Se puede doblar 10 veces**. **¿Qué tendrías que hacer para encontrar 10 el número de dobleces y líneas?**

f) Determinar una regla general para realizar **n doblada y n líneas**

4. **El salto del caballo de ajedrez** figura 6. una propuesta adapta a modo interactivo. Comenzando por la casilla del número menor y siguiendo el salto del caballo del ajedrez descubrir la secuencia y **la regla general para pasar de un número al siguiente**.

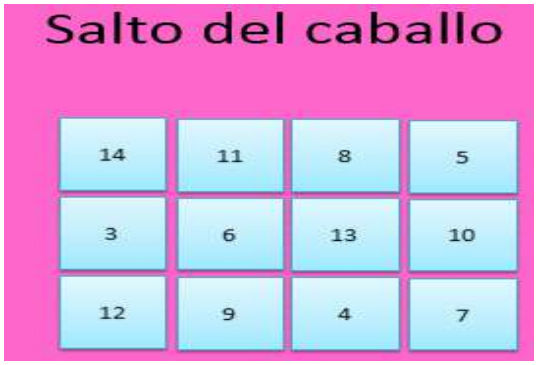


Figura 6. Grafica de resultados de la prueba de conocimientos

Finalmente el tercer momento la aplicación de la propuesta que se plasma en el desarrollo de las sesiones de aprendizaje, las cuales **se ha propuesto de forma secuencial y considerando los recursos didácticos coherentes a partir de la realidad, para ello se debe seguir procesos (niveles de comprensión)** propuesto por los autores por Pirie y Kieren (1994) citados por Meel (2003) y Codes y Delgado (2013), estos ocho niveles que se organizan desde un nivel elemental, como: conocimiento primitivo, creación de imagen, compresión de la imagen, observación de la propiedad, formalización, observación, estructuración e invención, la particularidad de la propuesta es que en cada nivel se debe dar el "redoblado"; es decir, revisar atrás sí se logró el nivel anterior de manera que se confirme el aprendizaje antes de pasar al otro nivel, este proceso gradual permite en el área de matemática identificar los logros y dificultades que se presentan en los estudiantes, y por otro lado el modelo permite considerar que se debe tener cuidado en la coherencia interna para realizar las planificaciones y desarrollo de las sesiones de aprendizaje de la representación y comprensión de patrones.

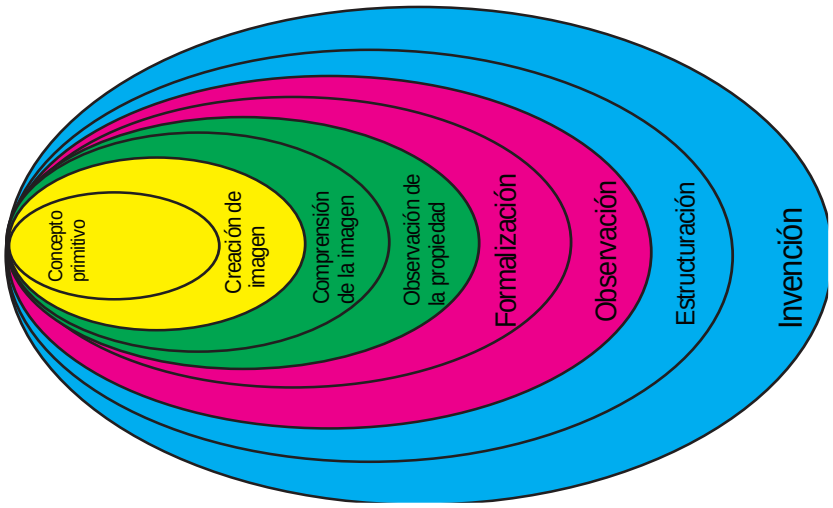


Figura 7: El modelo de Pirie-Kieren (Pirie & Martin, 2000)

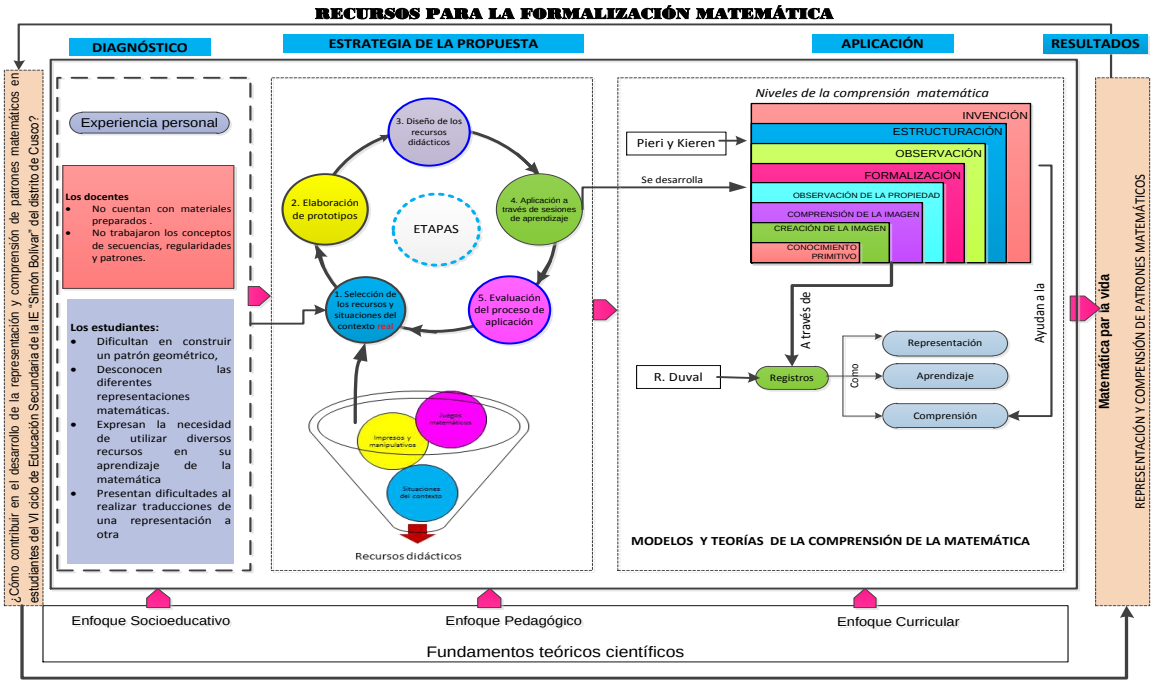


Figura 8. Esquema de modelación

Conclusiones

Los recursos didácticos siempre juegan un papel importante en las actividades escolares, este trabajo permitió comprobar que su aplicabilidad en el campo de la matemática y en especial en el proceso de la construcción de reglas y la formalización matemática es mayor. Además está claro que el docente antes de llevar un recurso o material al aula debe analizar las ventajas y desventajas de su aplicación, para no crear falsas expectativas en los estudiantes.

Las dificultades y errores que se han identificado **predominan las representaciones graficas en relación a las simbólicas numéricas**, confirmando que en los procesos de enseñanza se enfatizan con mayor frecuencia y desde temprana edad en la escolaridad. Existe una gran **deficiencia en el reconocimiento de secuencias, regularidades y patrones de tipo gráfico y literal a diferencia de las secuencias numéricas**, lo que refleja que no se han abordado en la educación primaria.

Las concepciones de patrones y regularidades recién desde el 2015 se han considerado como una competencia de importancia en la formación escolar, esto se pudo comprobar que las entrevistas realizadas a los docentes evidencian desconocimiento de la temática.

La propuesta pedagógica elaborada responde a la diversidad de estudiantes en el aula, su construcción a partir de un diagnóstico realizado, constituye una estrategia que sintetiza los procedimientos a realizar a partir de las diferentes propuestas de los autores, de manera que su aplicación permite mejorar las debilidades y dificultades encontradas. Esta se puede replicar en otros contenidos y en otros contextos o realidades.

Referencias

Corbalán, F. (1994): *Juegos matemáticos para secundaria*. Madrid: Síntesis

Codes, M. y Delgado, M. (2013) *Comprensión del concepto de serie numérica a través del modelo de Pirie y Kieren.* Recuperado de https://ddd.uab.cat/pub/edlc/edlc_a2013v31n3/edlc_a2013v31n3p135.pdf

Duval, R. (1993). *Semiosis y noesis. En Sánchez y Zubieta (Eds.), Lecturas en Didáctica de las Matemáticas*: Escuela Francesa, (118-144). México: Departamento de Didáctica Educativa del CINVESTAV-IPN.

Meel, D. (2003) *Modelos y teorías de la comprensión: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre la evaluación de la comprensión matemática y Teoría APOE*. Recuperado de http://personal.bgsu.edu/~meel/Research/Meel(RELIME2003).pdf

Rodríguez, Gil y García (1996) *Métodos de investigación cualitativa*, Málaga, Aljibe.

Volver al índice de autores

3.2.4. Enfoque Didáctico para la elaboración de situaciones problemáticas que abordan la construcción e interpretación de las tablas de frecuencia

Augusta Osorio Gonzales
Carina Juana Saire Huamani
Maestría en Enseñanza de las Matemáticas, Pontificia Universidad Católica del Perú-IREM, Perú

Resumen

La dimensión 1 de la propuesta de Wild y Pfannkuch, (1999), el ciclo PPDAC promueve la generación y análisis de datos cuando se da solución a una situación problemática que requiere la recopilación de datos. Este trabajo de investigación entrega evidencia sobre el trabajo realizado por un grupo de docentes de secundaria cuando son enfrentados a una situación problemática referida: a "Hábitos de lectura" que busca abordar la construcción e interpretación de las tablas de frecuencia. Dichas soluciones se orientan en el enfoque del desarrollo del pensamiento estadístico, es decir; implica que los docentes identifiquen cada una de las etapas del ciclo PPDAC. Además, entrega evidencia sobre la capacidad creativa de los maestros al elaborar una nueva situación problemática para trabajar tablas de frecuencias con estudiantes de primer año de secundaria. Las situaciones propuestas fueron evaluadas a través criterios para analizar la capacidad creativa; en base los trabajo de Torreancce (1974) y Guilford (1969).

Introducción

Según Wild y Pfannkuch (1999) la Dimensión I de la Estructura para del Pensamiento Estadístico en la Investigación Empirica es el Ciclo Investigativo que está constituida por 5 etapas: Problema, Plan, Datos, Análisis y Conclusiones (PPDAC).

Podemos considerar este ciclo como la base de cualquier estudio estadístico y por tanto pues ser visto como un proceso didáctico para trabajar la gestión de datos en la Educación Básica, pues permite al estudiante el desarrollo de diversas capacidades y competencias para manejar e interpretar datos. Como menciona Rivas (2014), los estudiantes deben observar que los datos no son simples números pues se generan en un contexto.

El ministerio de Educación (MINEDU) fomenta el trabajo con proyectos en gestión de datos y por tanto surge la necesidad de promover el trabajo en base al ciclo PPDAC (Problema, Plan, Datos, Análisis y Conclusiones) dentro de las aulas. Lo cual implica

plantear situaciones problemáticas de contexto a los estudiantes, dado que dichas problemáticas no están presentes en los libros propuestos para los alumnos. Por ello coincidimos con Malaspina (2014), quien menciona que profesores adecuadamente preparados y motivados lograran crear situaciones problemáticas para sus estudiantes. Además, como menciona Rivas (2014), existe la necesidad de orientar al maestro al enseñar temas de Estadística pues desconoce los procesos didácticos para trabajar de manera adecuada. Por ello pretendemos poner a disposición de los profesores de secundaria un taller de formación de profesores en Gestión de datos y al ciclo PPDAC como herramienta didáctica.

Marco teórico

La investigación explora la capacidad creativa de los docentes al elaborar situaciones problemáticas referidas a tablas de distribución de frecuencias para estudiantes del primer año de educación secundaria (12 años) aplicando el ciclo PPDAC. Para lo cual se presenta a los profesores un proyecto en gestión de datos aplicado a alumnas del primer año de secundaria, a las que se les plantea una situación problemática referida a "Hábitos de Lectura" y en la que se evidencia el proceso de las estudiantes a través de cada etapa del ciclo PPDAC hasta dar solución a la situación problemática planteada. Por ello no solo es necesario que los maestros conozcan las etapas del ciclo PPDAC sino también que sean capaces de crear situaciones problemáticas para utilizarlas con sus estudiantes, ya que en los diversos textos solo se observa ejercicios para completar tablas de frecuencias o se pide elaborar una tabla de frecuencias dada una serie de datos.

La dimensión I de la propuesta de Wild y Pfankuch (1999), ver figura 1, en la que los autores adaptaron el modelo PPDAC (Problema, Plan, Datos, Análisis, Conclusiones) de Mackay y Oldford (1994).

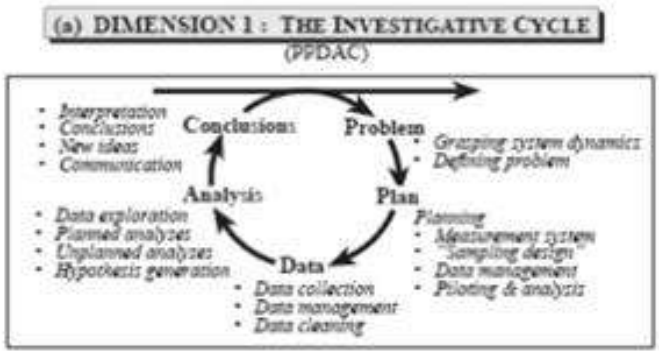


Figura 1 *Dimensión I del Ciclo Investigativo (PPDAC)*
Fuente: Pensamiento Estadístico en la Investigación Empírica, 1999.p.5

Muestra la forma cómo una persona actúa durante una investigación estadística y los autores indican que este ciclo está relacionado con la abstracción y resolución de un problema estadístico referido a situaciones de contexto. Mencionan también que la investigación impulsada por la curiosidad tendrá beneficios prácticos a largo plazo, pues la solución a un problema real requiere de la mejor comprensión del contexto que se relaciona con el problema y que para poder llegar al nivel de comprensión deseado se deberán alcanzar los objetivos de aprendizaje planteados. En otras palabras, en cada etapa del ciclo se adquiere conocimiento y se identifican diversas necesidades las cuales son requerimientos para poder pasar de una etapa a otra y así lograr los objetivos planteados.

¿Por qué una estadística basada en proyectos?

Una de las principales razones, como indican Anderson y Loynes 1987 (citados por Batanero, Díaz, Contreras y Arteaga, 2011), es que la estadística está relacionada a sus aplicaciones y se justifica en su utilidad cuando se lleva a cabo su aplicación en la resolución de problemas externos a la propia estadística.

Los problemas que se presentan a los estudiantes - por lo general - suelen concentrarse en los conocimientos técnicos; pero al trabajar con proyectos los estudiantes se hacen las siguientes interrogantes, como indica Graham (1987 citado en Batanero, 2011): ¿Cuál es mi problema? ¿Necesito datos? ¿Cuáles? ¿Cómo puedo obtenerlos? ¿Qué significa este resultado en la práctica?

Batanero (2011) plantea el siguiente esquema para el desarrollo de un proyecto:

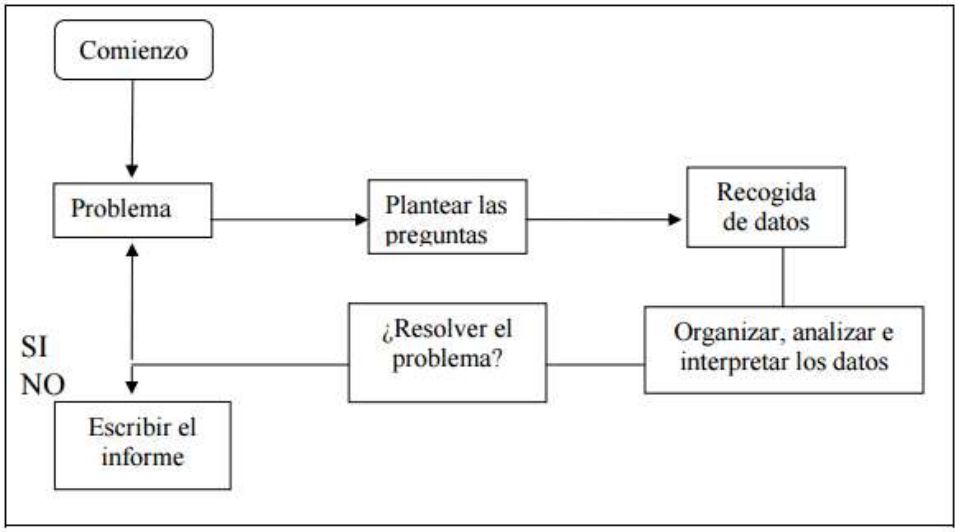


Figura 2. Esquema del desarrollo de un proyecto

Fuente: Batanero 2011.p.23

Como se puede observar en la Figura 2, la pauta a seguir en el trabajo con proyectos en estadística coincide con el ciclo PPDAC de Wild & Pfannkuch.

Marco de Análisis

El objetivo general de nuestra investigación es analizar si las situaciones problema, para trabajar las tablas de frecuencia, que crea un profesor de secundaria antes y después de un proceso de formación desarrollando el Pensamiento Estadístico de Wild & Pfannkuch (1999), muestran una mejora en la capacidad de creación.

Como debemos identificar los criterios o factores que nos determinarán la mejora de la creatividad, es necesario tener las herramientas que nos permitirán analizar las dos pruebas aplicadas durante el proceso de formación, la prueba de entrada y la prueba al finalizar el taller.

Entonces, el objetivo del taller con profesores fue saber si ellos mejoraron su capacidad creativa al conocer el ciclo PPDAC dentro de la propuesta de Wild & Pfannkuch. Para ello elaboramos una Matriz de evaluación que nos permitió analizar los Criterios de la capacidad creativa en base a los criterios de Torreancce (1974) y Guilford (1969): Originalidad, Flexibilidad y Fluidez. Además, incluimos dos criterios adicionales: Claridad, referida a si el enunciado elaborado por el profesor tiene cohesión y coherencia;

y Adecuación, referido a si la temática del problema planteada es adecuada para estudiantes del primer año de secundaria.

Para cada uno de estos criterios elaboramos una serie de indicadores para evaluar cada uno de los problemas en Gestión de Datos propuestos.

Metodología

El enfoque de la presente investigación es constructivista/cualitativa, pues: describimos los diferentes procesos realizados por los profesores durante el taller de formación y los resultados de la investigación son creados a partir de la interacción del investigador con los participantes usando los criterios del marco teórico expuesto y los criterios para analizar la capacidad creativa.

Sujetos

La investigación se realizó con 9 participantes. Todos ellos profesores de matemática del nivel secundario de instituciones públicas del departamento de Lima. El taller tuvo una duración de 8 horas.

Recogida de datos

Los datos de este estudio emergen a partir de las producciones de los profesores luego de haber sido enfrentados a la situación problemática referida a los "Hábitos de Lectura" proyecto aplicado a estudiantes del primer año de educación secundaria (Ciclo VI EBR). La situación se enmarca en la competencia actúa y piensa matemáticamente en Situación de Datos e Incertidumbre de la asignatura de matemática en el enfoque de resolución de problemas planteado en Rutas de aprendizaje (MINEDU 2015) en la cual se planteada el trabajo de la Estadística a través de proyectos.

En torno al objetivo general de la investigación, se ideó la Actividad 1 como una serie de tareas donde se tuviera un tiempo de reflexión en torno a varios de los conceptos que se trabajarían durante el taller. La primera tarea fue responder a la pregunta ¿Son las tablas de frecuencia mejores que los gráficos?

Frente a esta interrogante Gelman, 2011, (citado por Estrella, 2014) indica:

> Menos forma, más contenido: eso es lo que las tablas de frecuencias representan. Además, Gelman cree que los gráficos pueden ser una distracción y podrían conducir a error al mostrar patrones que no son estadísticamente significativos.

En la tarea actividad se le presentó la siguiente situación: Los alumnos del primer año A de secundaria han escogido los talleres deportivos que prefieren para el resto del año. En el aula de 31 alumnos, 8 de ellos han escogido el taller de vóley, 13 han escogido el taller de fulbito y el resto han escogido el taller de básquet. Se le solicita que organicen los datos de la situación planteada en una tabla de frecuencias y se les planteó la siguiente interrogante ¿Con que finalidad se presenta este tipo de problemas a los estudiantes?

Los problemas de este tipo están presentes en muchos textos, pero solo implican realizar algunos cálculos rutinarios y como indica Estrella (2014), los profesores conciben la enseñanza de la Estadística como meros procesos aritméticos.

También se les planteó a los profesores la siguiente pregunta, ¿podemos llamar situación problemática a la situación planteada?

Los docentes del taller coincidieron en que no es una situación problemática ya que le falta al problema una interrogante (requerimiento), y elementos al contexto como pueden ser el lugar donde se halla el colegio y el fin de los talleres deportivos.

Pudimos inferir que los profesores tienen cierta noción de situación problemática, pues Malaspina (2014), indica que al desarrollar la perspectiva sobre la creación de problemas es necesario tener en cuenta los siguientes criterios: información, requerimientos, contexto, entorno matemático. Y según Freudenthal una situación problemática es el contexto en el que tiene sentido un problema.

En la tercera tarea se trabajó ¿Qué características tiene un problema ideal en Gestión de Datos? Se les presento a los profesores cinco imágenes, cada una de ellas relacionada con una etapa del ciclo PPDAC y se les solicito que las coloquen en el orden que crean correcto y les dieran un nombre. Mostramos la secuencia propuesta por cada docente:

Participante	Opción 1	Opción 2	Opción 3	Opción 4	Opción 5
Profesor1	Análisis de Datos (4)	Búsqueda de Información (2)	Búsqueda de estrategias y métodos (3)	Identifico el problema (1)	Registro de resultados (5)
Profesor2	Investigar (2)	Evaluar (4)	Ordenar (1)	Analizar (3)	Resolver (5)
Profesor3	Investigación (1)	Información (5)	Razonamiento cognitivo (2)	Comprensión (3)	Conocimiento (4)
Profesor4	Observo (2)	Comparto (5)	Armo (4)	Interrogo (1)	Identifico los datos (3)
Profesor5	Indagar (1)	Planificar (3)	Solución (5)	Problematizar (2)	Acciones realizadas (4)
Profesor6	Observo la situación (2)	Comparto información (4)	Representación (3)	Identificar el problema (1)	Conclusiones (5)
Profesor7	Investigar (3)	Recoge información (2)	Concluye (5)	Analiza (1)	Ordena (4)
Profesor8	Analizar (1)	Discusión (3)	Construir (5)	Razonar (2)	Orden (4)
Profesor9	Investigo (2)	Trabajo en equipo (3)	Al finalizar se debe ir sacando conclusiones (5)	Comprendo la situación problemática (1)	Cumplo un cronograma de actividades (4)

Como podemos evidenciar en la tabla, los maestros tienen la noción del trabajo en Gestión de datos; pero solo tres de los participantes indican que es necesario un problema este aspecto es muy importante ya que el trabajo en el ciclo PPDAC se inicia con una situación problemática.

Luego de estas tareas se presenta el ciclo PPDAC de Wild y Pfankuch (1999) y además se les presenta las preguntas conceptos y proceso estadísticos necesarios para reconocer los conceptos relacionados con cada etapa ver figura.



Fuente propia

Se presentó los indicadores del DCN 2015 que se trabajan en el ciclo VI de la EBR. Se les realizo la siguiente interrogante: ¿Cómo se organizan los indicadores de desempeño de la competencia "Actúa y piensa matemáticamente en gestión de datos e incertidumbre " en el ciclo PPDAC para el nivel VI de la Educación Básica Regular? Se les plantea la tarea cuatro: ubicar cada indicador de logro del primer año de secundaria en la etapa del ciclo PPDAC (Problema, Plan, Datos, Análisis y Conclusiones) que crea que le corresponde en una ficha de trabajo; todo esto a fin de que los maestros vean que existe relación entre el ciclo PPDAC y los indicadores planteados en el DCN 2015.

Luego de finalizar la actividad 1 se presenta la situación problemática "Hábitos de lectura" trabajada por las estudiantes de primer año de educación secundaria.

Se les plantea la actividad 2: Dada la situación problemática indique que deben trabajar los estudiantes para cada etapa del ciclo PPDAC. A continuación, se presenta la solución más destacada.

Grupo	Etapas del ciclo PPDAC				
	Problema	Plan	Datos	Análisis	Conclusiones
2	Elaboraron un requerimiento cambiando el contexto. Identificar las variables y el tipo de variable de estudio.	Trabajo en grupos. Diseñar una encuesta en base a la variable de estudio. Define los encuestadores. Se dan pautas sobre un buen encuestador.	Determinar la muestra. Aplicación de la encuesta. Elaboración de un listado de datos.	Elaborar una tabla de frecuencias. Elegir el gráfico estadístico y las medidas de tendencia central más adecuada para representar los datos de la variable de estudio.	Interpretar la información de las tablas. Elaborar las conclusiones de la variable de estudio. Presentar un informe.

A continuación, se les detallaron las actividades realizadas por las estudiantes durante el desarrollo del estudio estadístico "Hábitos de lectura"

- ✓ Se planteó la situación problemática a las estudiantes. Se organizaron grupos de trabajo.
- ✓ Investigaron sobre la situación problemática planteada el cual se compartió en clase a través de organizadores gráficos.
- ✓ Se dio pautas para la elaboración de instrumentos de recojo de información, para que cada equipo de trabajo elabore su propia encuesta.
- ✓ Se presentó el instrumento de recojo de información que se esperaba que elaboraran que contiene 16 preguntas, a cada grupo de trabajo se le asigno dos preguntas.
- ✓ Las estudiantes aplicaron la encuesta.
- ✓ Construyeron una lista de datos y una tabla de doble entrada resumen.
- ✓ Compartieron la información obtenida en cada grupo de trabajo.
- ✓ Construyeron las tablas de distribución de frecuencias y sus conclusiones.

- ✓ Se elaboró la conclusión final en base al análisis de cada tabla de distribución de frecuencias, dando solución a la situación problemática planteada.

Como última actividad del taller de formación se les planteó un desafío: Elaborar una situación problemática para estudiantes de primero de secundaria para abordar la tabla de distribución de frecuencias.

Análisis de datos y resultados

Las producciones de la última actividad dieron evidencias del gran potencial que poseen los maestros al crear situaciones problemáticas. Al revisar la solución de las situaciones problemáticas creada observamos que tres de los cuatro grupos consideraron las cinco etapas del ciclo PPDAC de Wild y Fpankuch (1999), y que el equipo 1, figura 2, logró elaborar una situación problemática que cumple con la mayor cantidad de criterios de creatividad planteados.

.

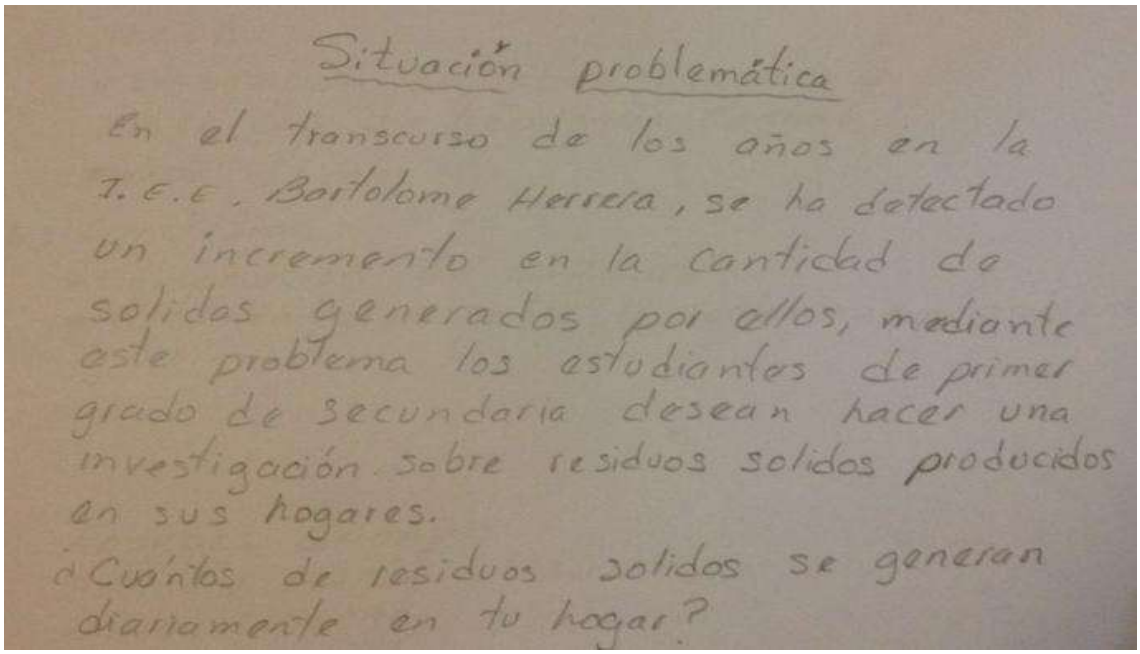


Figura 2: Situación problemática referida a residuos solidos

Fuente: Grupo 1 del taller de formación

Referencias

Batanero, C. (2011). Estadística con proyectos. Departamento de Didáctica de la Matemática. Granada. Recuperado de http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/Libroproyectos.pdf

Cárdenas, C. (2014). Análisis de problemas de adicción y sustracción y multiplicación de d expresiones decimales, creados por estudiantes dl 6° grado de primaria en una experiencia didáctica. (Tesis para optar al grado de magister, Pontificia Universidad Católica del Perú). Recuperado de http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/6754

Estrella, R. (2014). El objeto tabla: un estudio epistemológico, cognitivo y didáctico. (Tesis doctoral, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso). Recuperado de http://ima.ucv.cl/wp-content/uploads/2014/06/Tesis-doctoral-resumen-SOLEDAD-ESTRELLA-2014.pdf

Estrella, R. (2015). Transnumeración de los datos: el caso de las tablas de frecuencia. XIV Conferencia Internacional de Educación Matemática. CIAEM, XIV CIAEM-IACME, Chiapas, México. Recuperado de http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/1264/498

Lopez, M. (1998). Creatividad: Definiciones, antecedentes y aportaciones. Revista digital universitaria 31 de enero 2004, Volumen 5 Número 1, Monterrey, México. Recuperado de http://www.revista.unam.mx/vol.5/num1/art4/ene_art4.pdf

Latorre, Del Rincón y Arnal (1996). Bases Metodológicas de la Investigación Educativa. Editorial Experiencia.

Malaspina, U. (2014a), Una experiencia didáctica con problemas creados por docentes. Reflexiones y perspectivas. UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 40, 115 – 120. Recuperado de http://www.fisem.org/www/union/revistas/2014/40/archivo20.pdf

Malaspina, U. (2014b). Reflexiones y propuestas en Educación Matemática. IREM Departamento de Ciencias, Sección Matemáticas PUCP, Lima Perú, Moshera.

Martínez, P., Da, V., Zolkower & Bressan.(Sin fecha). Los contextos “realistas” en la resolución de problemas de matemática: una experiencia para capacitadores, docentes y alumnos. Grupo Patagónico de Didáctica de la Matemática Bariloche. Río Negro, Argentina. Recuperado de http://www.soarem.org.ar/Documentos/24%20Martinez.pdf

Ministerio de Educación. (2015). Rutas de aprendizaje III ciclo. Lima, Perú. Recuperado de http://www.minedu.gob.pe/rutas-del-aprendizaje/documentos/Primaria/Matematica-III.pdf

Wild, C. J. & Pfannkuch, M. (1999), Statistical Thinking in Empirical Enquiry (Dr. Román Hernández Martínez.), International Statistical Review, 67, pp. 223 –265.

Volver al índice de autores

3.2.5. Niveles de algebrización que alcanzan los estudiantes de primer grado de secundaria en la resolución de una tarea estructural de números racionales

Johana García
Flor Carrillo
Maestría en Enseñanza de las Matemáticas, Pontificia Universidad Católica del Perú-IREM, Perú

Resumen

El objetivo del reporte es analizar los rasgos de los niveles de algebrización de estudiantes de primer grado de secundaria en la resolución de tareas que involucran operaciones y propiedades de los números racionales, actividad considerada como tarea estructural en el marco del Razonamiento Algebraico Elemental. La actividad demanda la elaboración de conjeturas y de su validación, que a su vez exigen procesos de generalización usando variables. Para el diseño y análisis de la actividad matemática desarrollada se emplean elementos del EOS y de la investigación cualitativa. Se concluye que los rasgos identificados en el trabajo de los estudiantes corresponden predominantemente al nivel de razonamiento algebraico 1, ya que los estudiantes realizaron argumentos en sus procedimientos generalizando y encontrando un patrón (dualidad extensivo-intensivo), además no hay presencia de propiedades

Introducción

La presente investigación muestra un análisis de los rasgos de los niveles de algebrización de estudiantes de primer grado de educación secundaria en la resolución de una tarea estructural. La tarea estructural propuesta tiene como objetivo realizar conjeturas y generalice para valores lejanos y denote con variables para un término general. Como base teórica se toman aspectos del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) y del Razonamiento Algebraico Elemental (RAE). En particular se considera la noción de idoneidad didáctica para el diseño de tareas, concepto fundamental del EOS tal como señala Godino (2013). Además, consideramos las características de los rasgos del RAE propuestas por Godino, Castro, Ake y Wilhelmi (2012) para el análisis de los resultados. La experimentación realizada se llevó a cabo con 15 estudiantes; se analizan las resoluciones presentadas por ellos, empleando las herramientas teóricas señaladas.

Aspectos teóricos y metodológicos

Nuestro trabajo emplea aspectos del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática, centrados en el análisis cognitivo. En el marco de la noción de idoneidad didáctica de un proceso de instrucción, definida por Godino, Batanero y Font (2007) como la articulación coherente y sistémica de seis componentes, analizamos específicamente la idoneidad cognitiva, la cual se refiere al entendimiento del conocimiento de los estudiantes antes y después del aprendizaje de los contenidos de la tarea propuesta.

Esta investigación es cualitativa del tipo experimental ya que es la aplicación y análisis de solución a tareas estructurales considerando el modelo RAE que permite describir la práctica operativa y discursiva desarrollada por los estudiantes en torno a los números racionales. Así mismo, se muestra un diseño estructural como el que propone Pino-Fan y Godino, (2014) con las cuatro fases que un diseño instruccional debe tener: Estudio preliminar, Diseño, Implementación y Evaluación.

Realizamos un análisis detallado de los rasgos que presentan las resoluciones dadas por los estudiantes a la tarea; en particular, nos centramos en la dualidad extensivo-intensivo la cual indica rasgos característicos del razonamiento algebraico asociados a la generalización. Con esa información pretendemos responder a la pregunta: ¿Qué niveles de razonamiento algebraico predominan en la resolución de tareas estructurales sobre números racionales en estudiantes de primer grado de secundaria?

Experimentación y su análisis

Se ha considerado una de las tareas propuestas en el trabajo de García (2017), cuyo objetivo es que el estudiante resuelva en un primer momento casos particulares para que reconozca a la suma de números impares consecutivos, con procedimientos aritméticos en un primer momento para que a partir de estos resultados realice conjeturas y generalice para valores lejanos, es decir que el estudiante sea flexible en su solución para buscar una estrategia que le ayude a generalizar encontrando una regularidad que se obtiene para cualquier par de sumandos consecutivos (impares) en sus respuestas y denote con variables para un término general (como el doble del término que se encuentra entre ambos sumandos).

Los sujetos que participaron de la experiencia cursaban el primer año de secundaria de un colegio particular de Lima, Perú, y sus edades se encontraban entre 10 y 11 años.

A continuación, presentamos el enunciado de la tarea propuesta.

Realice las siguientes operaciones: $7 + 9$ $15 + 17$ $21 + 23$ $105 + 107$ $1575 + 1577$ A partir de los cálculos realizados y al observar la relación que existe de cada par de números. ¿Encuentra alguna regularidad? De ser así, elabore una hipótesis y justifique.

Con respecto a la fase cognitiva (se colocan todos los posibles resultados que se espera del estudiante) de la tarea propuesta, manifestamos lo siguiente:

Con respecto a la tarea propuesta:

- De esta tarea, los estudiantes pueden mencionar que los números que se deben sumar se diferencian siempre en 2 y que de cada suma obtenida siempre será un número par y lo pueden representar con variables al momento de generalizar.

  De esta forma: $\mathrm{n} + (\mathrm{n} + 2)$ donde n es un número natural.

- Por otro lado, otro estudiante puede operar las representaciones de los valores que se le da a cada número: $n + \ (n + 2)$

  $(n + n) + 2$ ……. Por propiedad asociativa

  Se obtiene: $2n + 2$

  Luego el estudiante factoriza, por lo que obtiene: $2n + 2 = 2\ (n + 1)$

  Entonces el estudiante reconoce que "$n + 1$" es el valor intermedio al valor de cada sumando y que luego es multiplicado por 2.

  Así encuentra que el patrón es el doble del valor intermedio a ambos sumandos.

A continuación, presentaremos las respuestas dadas por algunos estudiantes, acompañadas del análisis que emplea los elementos del RAE.

En la figura 1, podemos observar que el estudiante 2 realiza operaciones aritméticas resolviendo las operaciones de cada una de ellas (adición en los números naturales) sin analizar la respuesta ya que no realiza conjeturas ni generaliza sólo resuelve casos particulares (extensivo), presenta rasgos de algebrización de nivel 0.

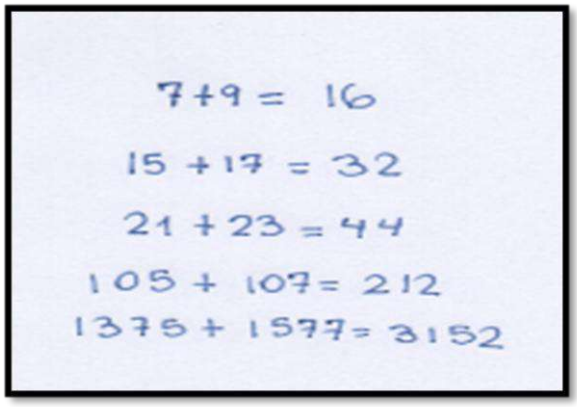


Figura 1. Solución del Estudiante 2-tarea 3

Fuente: (García, 2017, p. 80)

Ahora presentamos la solución de la tarea 3, del estudiante 9:

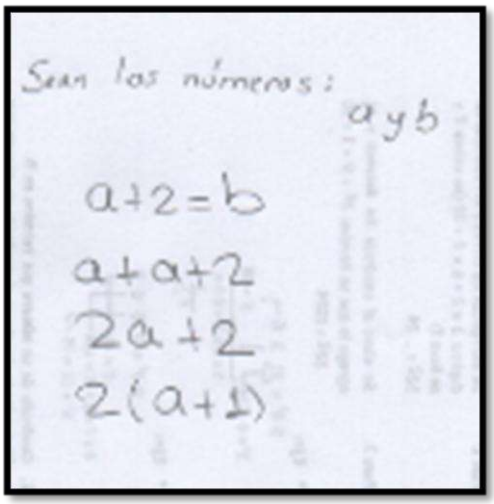


Figura 23. Solución del Estudiante 9-tarea 3

Fuente: (García, 2017, p. 80)

En la figura 2, se puede observar que el estudiante realiza cálculos aritméticos, operando cada caso (adición en los números naturales), luego asigna variables "*a*" y "*b*", (se colocan notaciones simbólicas), igualando $b = a + 2$, ya que se diferencian ambos sumandos por dos. Realiza operaciones con ambas variables, (propiedades de los números naturales), luego factoriza y obtiene $2(a + 1)$, es decir, realiza tratamientos.

Luego, menciona que el resultado es el doble del valor que se encuentra entre cada par de sumando. Los rasgos hallados corresponden al nivel 3 ya que opera las variables para encontrar un término general.

Algunos resultados

Después del análisis de las soluciones correspondiente a la tarea 3 identificamos que todos los estudiantes realizaron cálculos aritméticos (adición de números naturales). El nivel predominante de algebrización son los rasgos del nivel 1, ya que nueve estudiantes realizaron argumentos en sus procedimientos generalizando y encontrando un patrón (dualidad extensivo-intensivo), por otro lado, cinco estudiantes presentan rasgos del nivel 0 de algebrización ya que los casos particulares no le ayudan a encontrar un caso general (extensivo), además no hay presencia de propiedades; por otro, lado un estudiante utiliza variables para generalizar y obtener una regularidad encontrándose rasgos del nivel 3 de algebrización ya que además de utilizar variables las transforma y realiza tratamientos (operaciones con los términos algebraicos).

Conclusiones

Del análisis realizado encontramos que predominan las generalizaciones para valores cercanos, a través de la aplicación de procedimientos aritméticos. Por ello, el nivel de algebrización predominante identificado es el nivel 1. Con esta información, se pueden diseñar actividades que permitan a los estudiantes avanzar a otro nivel de razonamiento algebraico en las que el énfasis esté puesto en el empleo de variables, así como en que cuenten con medios de control que les permitan verificar si sus conjeturas y validaciones a

partir de casos particulares y así el estudiante necesite emplear variables que les ayuden a representar un término general.

Referencias bibliográficas

García, J. (2017). *Niveles de algebrización que alcanzan los estudiantes de primer grado de secundaria en la resolución de tareas estructurales de números racionales*. Perú. Pontificia Universidad Católica del Perú.

Godino, J. (2013). Diseño y análisis de tareas para el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático de profesores. *Revista de didáctica de la Estadística*, 2, 1-15.

Godino, J., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.

Godino, J., Castro, W., Aké, L., y Wilhelmi, M. (2012). Naturaleza del Razonamiento Algebraico Elemental. *Boletín de Educación Matemática*, 26(42 B), 483-511. Obtenido de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291223574005

Pino-Fan, L., y Godino, J. (2014). Perspectiva ampliada del conocimiento-didáctico matemático del profesor. Manuscrito enviado para su publicación. Obtenido de https://db.tt/VIiqGqR7

Volver al índice de autores

3.3. Socialización de experiencias

3.3.1. Grupos de interaprendizaje dialógico en el aprendizaje de la matemática

Raúl Sobrevilla Villa Johana García
Unidad de Gestión Educativa Huaytará, Huancavelica, Per**ú**

Resumen

Hace algún tiempo, la comunidad científica internacional identificó cuál era el tipo de organización de aulas que ha mostrado resultados muy positivos para generar el máximo de aprendizaje para todos. Y, por otro lado, qué tipos de organización siguen reproduciendo el fracaso escolar y las desigualdades sociales que afectan a muchos estudiantes. En este trabajo va a encontrar las informaciones básicas para conocer y poner en práctica el trabajo con Grupos Interactivos. Empezaremos con una presentación más conceptual, una justificación para organizar así el aula, cómo ha surgido y qué beneficios proporciona en el aprendizaje de la Matemática. A continuación, se recogerán algunas orientaciones ("Cómo organizar") para desarrollar los Grupos Interactivos. Esta descripción se divide en tres momentos:
Antes: lo que el docente necesita preparar y organizar para montar los Grupos Interactivos.
Durante: cómo actúan el profesor, los voluntarios y los alumnos durante la realización de la propuesta.
Después: cómo el docente puede aprovechar las observaciones realizadas para próximas actividades y futuras intervenciones.
Cada orientación está vinculada a un argumento teórico ("Por qué y para qué") que explicita por qué ésa es una manera de enseñar que facilita el aprendizaje de la Matemática de todos los estudiantes, además de presentar los resultados que podemos conseguir.

Introducción

A lo largo de la historia, las concepciones sobre cómo se aprende han ido evolucionando, siempre vinculadas al contexto social en que surgen y son implementadas. Los cambios

derivados del paso de la sociedad industrial a la sociedad de la información, con la posibilidad de acceso rápido y económico a las nuevas fuentes de información, transformaron los contextos en los que las personas aprenden e influenciaron las instituciones y otros ámbitos de la sociedad.

Infelizmente, la escuela se ha mostrado resistente a esa transformación, y las concepciones de aprendizaje que no responden a las necesidades de la sociedad de la información continúan estando presentes en el día a día de muchos alumnos.

Aprendizaje dialógico

Para la concepción comunicativa, situada en el contexto socio- histórico de la sociedad de la información, más importante que acumular informaciones es la manera como éstas son procesadas e incorporadas por el sujeto. Este enfoque reconoce las contribuciones de las concepciones anteriores, pero introduce la idea central de la interacción. Es necesario que las escuelas abandonen el modelo de escuela tradicional, propia de la sociedad industrial, y busquen maneras de enseñar basadas en el diálogo y en la participación de todas las personas de la comunidad escolar.

En la concepción comunicativa, la realidad es entendida como una construcción social en la cual los significados son construidos a través de las interacciones entre las personas y los consensos que establecen.

Rol del alumno: está conectado a su potencial para interactuar con diferentes personas y aprender con ellas, no sólo en la escuela o en los espacios designados para el aprendizaje, si no en todos los espacios de su vida.

Enseñanza: basada en el diálogo y busca el máximo aprendizaje para todos, es decir, que todos los alumnos y alumnas lleguen a los mismos y mejores resultados. El diseño del currículo no está vinculado al contenido que los alumnos saben o no saben, sino que apunta hacia los resultados que se desea alcanzar para todos.

Rol del profesor: agente educativo que debe conducir el aprendizaje sin adaptaciones curriculares o agrupamientos excluyentes basados en los conocimientos previos de los estudiantes. El profesor introduce en la clase nuevas situaciones de interacción para lograr los mejores resultados para todos.

En ese sentido, el aprendizaje sucede en las situaciones de interacción entre los propios alumnos, y entre alumnos y profesores, familiares y otros agentes del contexto educativo.

De esta manera, los procesos de enseñanza y aprendizaje son ampliados significativamente, ya que las interacciones se multiplican, así como los contextos de aprendizaje.

Es también papel del profesor establecer relaciones con el entorno en el que viven sus alumnos, inter viniendo educativamente en todos los contextos, fomentando las conexiones entre ellos y promoviendo la participación de la comunidad no sólo en los espacios de gestión y organización de la escuela, sino también en las situaciones de aprendizaje. La inclusión de todos los agentes educativos en los centros escolares es una de las actuaciones que más éxito ha generado para los alumnos (Yeste, Lastika & Caballero, 2013).

Referentes Teóricos (destacados en las siguientes páginas): el CREA ha desarrollado una línea de investigación en torno a las interacciones dialógicas y sus efectos en el aprendizaje. Éstas tienen un potencial altamente transformador para las personas y los contextos cuando se genera un clima de altas expectativas para todos los involucrados.

¿Cómo sucede el Aprendizaje Dialógico en la práctica?

"El Aprendizaje Dialógico se da por medio de diálogos igualitarios, en interacciones en las cuales se reconoce la inteligencia cultural en todas las personas. Esas interacciones están orientadas a la transformación de los niveles previos de conocimiento y del contexto sociocultural en búsqueda del éxito para todos. Además, el "Aprendizaje Dialógico se produce en las interacciones que aumentan el aprendizaje instrumental, favorecen la creación de sentido personal y social, están guiadas por principios solidarios y en las que la igualdad y la diferencia son valores compatibles y mutuamente enriquecedores." (Aubert et al., 2008:167)

Tal y como hemos dicho, el Aprendizaje Dialógico se sitúa en un marco teórico que cuenta con la contribución de diferentes áreas (psicología, sociología, pedagogía, etc.) y enfatiza el papel de la intersubjetividad, de las interacciones y del diálogo como promotores del aprendizaje. A continuación, presentaremos cada uno de sus principios, sus características fundamentales y pondremos un ejemplo práctico.

Principios del Aprendizaje Dialógico

- Diálogo igualitario: la fuerza está en los argumentos y no en la jerarquía de quien habla. Es escuchar con respeto y hablar con sinceridad.
- Inteligencia cultural: comprende el saber académico, práctico y comunicativo; todas las personas tienen capacidad de acción y reflexión.
- Transformación: educación como agente transformador de la realidad por medio de las interacciones.
- Creación de sentido: aprendizaje que parte de la interacción y las demandas y necesidades de las propias personas.
- Solidaridad: participación solidaria de todas las personas de la comunidad en el proyecto educativo de la escuela.
- Dimensión instrumental: aprendizaje de los instrumentos fundamentales para la inclusión en la sociedad actual.
- Igualdad de diferencias: mismas oportunidades para todas las personas.

Grupos Interactivos ¿Qué es?

Es la forma de organización del aula que hoy en día proporciona los mejores resultados en cuanto a la mejora del aprendizaje y la convivencia. A través de los grupos interactivos, se multiplican y diversifican las interacciones a la vez que aumenta el tiempo de trabajo efectivo. Este tipo de organización incluye a todos los estudiantes, contando con el apoyo de otros adultos además del profesor responsable por la clase. En Grupos Interactivos el objetivo es desarrollar, en una misma dinámica, la aceleración del aprendizaje para todos, además de valores y sentimientos como la amistad y la solidaridad.

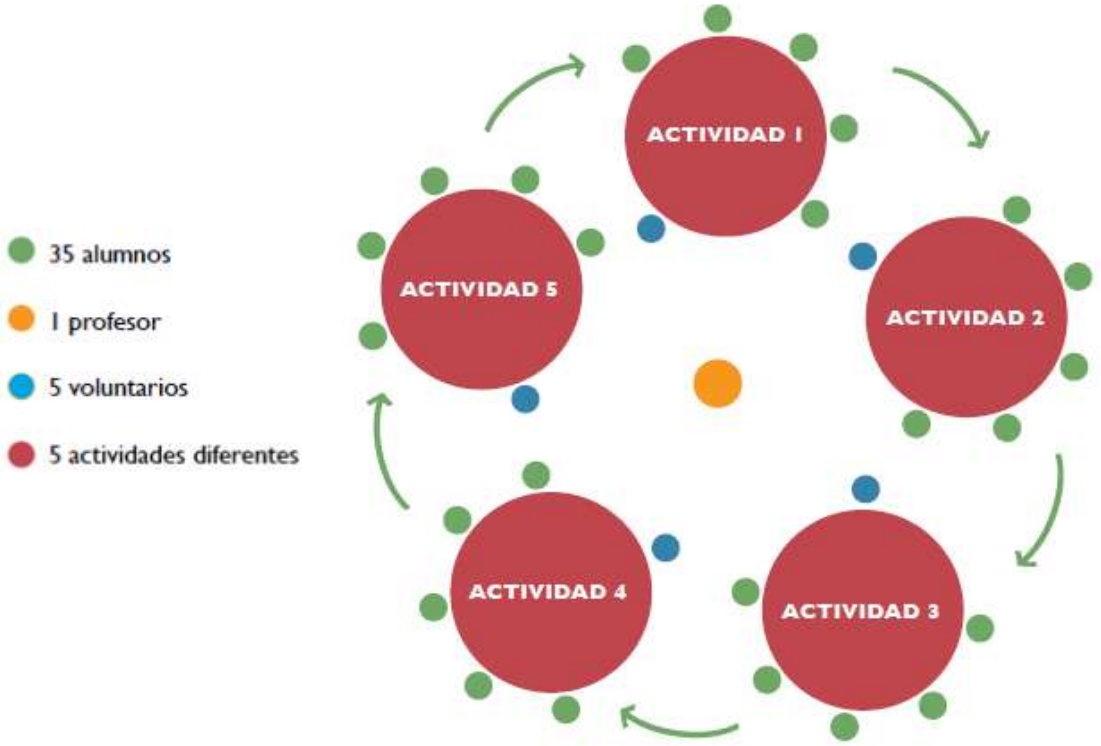
¿Cómo organizar Grupos Interactivos?

Para organizar Grupos Interactivos es necesario considerar:

1. Cuántos alumnos hay en el aula, para definir el tamaño y la cantidad de los grupos.

2. El tiempo total disponible para la realización de esa práctica.

Por ejemplo, para 5 grupos se estima un tiempo necesario de 1 hora 15 minutos de clase (15 minutos para cada actividad).



Orientaciones y sugerencias para organizar Grupos Interactivos

Antes

División de los alumnos en grupos heterogéneos

¿Cómo? El profesor planifica la división del alumnado en pequeños grupos heterogéneos. Esa heterogeneidad se refiere al nivel de conocimiento, habilidades, género, cultura, lengua, etc. Lo importante es garantizar la mayor diversidad posible en cada grupo. El primer criterio a ser considerado debe ser la competencia y el ritmo de aprendizaje, es decir, debemos asegurar que en todos los grupos haya estudiantes con habilidades diferentes y distintos niveles de aprendizaje. Tras esta primera organización, podemos sumar el resto de los criterios a ser considerados.

Planificación de las actividades

¿Cómo? El profesor prepara diferentes actividades (una para cada grupo) para trabajar contenidos que hayan sido enseñados previamente. Habitualmente no se introduce un nuevo contenido; sino que son actividades de "apropiación" del contenido que los alumnos tendrán que resolver usando sus saberes, con relativa autonomía. Pueden ser las mismas que habitualmente se trabajan en las clases, como las del libro didáctico, o nuevas propuestas elaboradas por el profesor.

Por ejemplo, para el área de Matemáticas, pueden ser ejercicios de cálculo, geometría, numeración y resolución de problemas.

División de actividades entre los voluntarios

¿Cómo? Antes de iniciar la clase, el profesor recibe al grupo de voluntarios (uno para cada grupo), les explica brevemente las actividades que van a realizar, y les ofrece estas para que cada quien elija una de ellas en función de sus preferencias. En este momento se les recuerda su rol dentro de la clase: facilitar que los alumnos realicen las actividades de manera solidaria.

Durante

En esa etapa de trabajo, los actores involucrados son el profesor, los voluntarios y los estudiantes. Aunque tengan actuaciones distintas, los tres tienen la misma intención: facilitar que todos los alumnos sin excepción alcancen el aprendizaje esperado de forma colaborativa.

Profesor

¿Cómo? El profesor explica al grupo, de manera concisa y clara, los objetivos de cada una de las actividades que van a ser trabajadas en el aula. Las actividades comienzan y el profesor circula libremente por el aula, ofreciendo una atención más personalizada a los alumnos, además de apoyar y reforzar el trabajo de los voluntarios.

Estudiantes

¿Cómo? Los estudiantes que participan en los Grupos Interactivos saben que hay de resolver la actividad entre todos. Así, habrá ocasiones en que ellos realizarán las actividades

en conjunto y otras en que las realizarán solos. Si bien, siempre, quien termina primero ayuda a los demás. Uno explica al otro, todos incentivados por el voluntario.

Voluntarios

¿Cómo? El voluntario de los Grupos Interactivos dinamiza y potencia la interacción entre iguales. No enseña ni explica; solo facilita la interacción, buscando que los alumnos se ayuden. Sus intervenciones pueden ser, por ejemplo, proponer que un alumno ayude al otro al terminar su actividad; estimular que un alumno cuente a los demás cómo hizo para resolver determinada tarea, etc.

Rotación

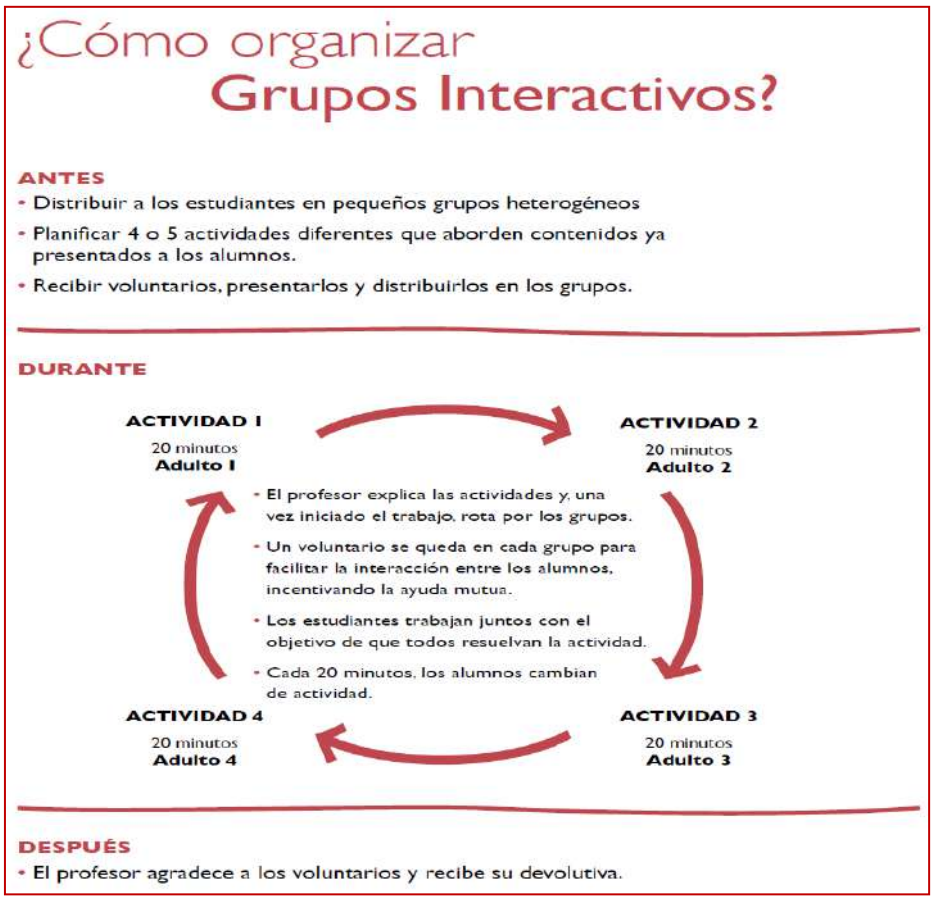
¿Cómo? Después de 15 o 20 minutos, todos los grupos cambian de actividad. Puede ser el voluntario quien cambia de grupo o preferentemente son los estudiantes quienes lo hacen. Cuando la clase termina todos los grupos han pasado por todas las actividades.

¿Por qué y para qué? Las clases son más dinámicas y es optimizado el tiempo de aprendizaje. Los estudiantes verbalizan que "aprenden cuatro veces más", lo que es coherente con el mejor aprovechamiento del tiempo de aprendizaje. Se practica en todo el momento el diálogo igualitario, en que la fuerza está en los argumentos y no en la posición jerárquica de quien habla. En los Grupos Interactivos todos aprenden a argumentar y a llegar a acuerdos fundamentados en argumentos.

Después

Finalización

¿Cómo? Una vez que todos los grupos han pasado por todas las actividades, el profesor agradece públicamente a los voluntarios su presencia y, cuando es posible, aprovecha para tomar nota de las impresiones y valoraciones de cada uno de ellos.



Corolario:

La disposición en la práctica pedagógica de los docentes de matemática del nivel secundario, particularmente en las sesiones de aprendizaje y empleando los Grupos Interactivos Dialógicos en el área de matemática, mejora sustancialmente las relaciones socio-afectivas e interpersonales, elevando el índice de aprendizaje de los estudiantes en el área de matemática, y tienen más ventajas que las competitivas e individualistas. Aporta sobre algunos factores que favorecen la innovación y buenas prácticas en el área de matemáticas.

Las pruebas muestrales implementadas concretamente en la Unidad de Gestión Educativa Local de Huaytará, Región Huancavelica, República del Perú, en el segundo grado del nivel secundario, reflejan una sustancial mejoría en la Evaluación Censal de Estudiantes en el área de matemática, cuyos resultados de niveles de logro satisfactorio, se incrementó del 4,2% obtenido en el año 2105 al 5,7% logrado en el año 2016 (en el 2017 no hubo Evaluación Censal de Estudiantes).

En cuanto al aprendizaje de los estudiantes en el área de matemática, en las instituciones educativas se observan las mejoras en las evaluaciones internas y también en las externas. Resolver problemas propuestos y conseguir que todas y todos sepan hacerlos, a partir de distribuciones estratégicas en Grupos Interactivos Dialógicos, de modo que la interacción entre quienes poseen habilidades y quienes tienen mayores dificultades, ayuda en el segundo se logre hasta el nivel del primero, valiéndose de la ayuda recíproca, como beneficio conjunto del grupo.

Destacar los muy buenos resultados obtenidos en esta experiencia, destacando el interés en ciertos alumnos que participaban escasas veces en clase y ver como forman parte de este asumiendo también un papel en la resolución de problemas. También se manifiestan capacidades en alumnos en el desarrollo del razonamiento y de resolución de problemas.

Para explicar estos resultados debemos volver a los principios del aprendizaje dialógico: es con diálogo que hay mejores resultados. Es con diálogo y solidaridad generados en los grupos interactivos que no sólo aprende y se beneficia el alumnado que tenía dificultades en la resolución de problemas matemáticos, sino todos y todas. Quienes van mejor, todavía aprenden más, porque explican a sus compañeros y compañeras, este ejercicio contribuye a consolidar los conocimientos matemáticos.

Referencias

Auber t, A., Flecha, A., García, C., Flecha, R., & Racionero, S. (2008). *Aprendizaje dialógico en la sociedad de la información*. Barcelona: Hipatia.

Morán, C., Siles, G., & Molina, S. (2012). *Aportaciones científicas a las formas de agrupación del alumnado. Organización y Gestión Educativa*, 2, 13-18.

Oliver, E., & Gatt, S. (2010). *De los actos comunicativos de poder a los actos comunicativos dialógicos en las aulas organizadas en grupos interactivos.* Signos, 43(2), 279-294.

Yeste, C. G., Lastikka, A. L., & Caballero, C. P. (2013). Comunidades de aprendizaje. Scripta Nova – Revista Electrónica de Geografía y Ciencias Sociales, 17.

Comunidades de aprendizaje: https://www.comunidaddeaprendizaje.com.es/material-biblioteca/106/Cuaderno-Grupos-Interactivos.

Comunidades de aprendizaje: https://www.comunidaddeaprendizaje.com.es/material-biblioteca/104/Cuaderno-Aprendizaje-Dialogico

Volver al índice de autores

3.4. Talleres

3.4.1. ¿Cómo construir el concepto de fracción a partir de sus significados?

Olimpia Castro Mora
Percy Merino Rosario
Rosa Lafosse Quintana
Felipe Asmad Falcón
Oficina de Medición de la Calidad de los Aprendizajes – MINEDU, Perú

Resumen

Los números naturales surgen como respuesta a la necesidad de contar y repartir, pero resultan insuficientes para medir, comparar cantidades o realizar repartos inexactos. En estas circunstancias cobra importancia usar las fracciones. En nuestro país, se trabaja el concepto de fracción desde el Ciclo IV de la Educación Básica Regular y se espera que, al culminar primaria, los estudiantes lo comprendan y lo apliquen satisfactoriamente. Evidencias recogidas en evaluaciones censales muestran que los estudiantes, incluso de secundaria, presentan dificultades en el aprendizaje de estos conceptos y en la resolución de problemas. Los investigadores concuerdan en la gran dificultad de los estudiantes en el aprendizaje de fracciones, y de los docentes en la resolución de situaciones que involucran, por ejemplo, fracciones como operador o como razón. Puede ser que, los docentes enseñen solo lo que saben, enfatizando reglas y operaciones. La fracción puede tomar distintos significados y el estudiante debe enfrentar diversos desafíos relacionados con ellos, su representación y sus relaciones. Generalmente, se trabaja ampliamente el concepto de fracción como parte-todo dejando de lado la fracción como cociente, razón, operador o medida. Es fundamental determinar la gradualidad del desarrollo de estos conceptos en la escolaridad y las estrategias didácticas más adecuadas

Propósito

Se cuenta con diversas investigaciones que sirven de sustento científico para abordar el concepto de fracción según sus significados en diversas situaciones, tanto en el aprendizaje de los estudiantes durante la escolaridad como de los docentes en el proceso de enseñanza o de futuros docentes en su periodo de formación, así como también la manera en cómo se aborda este concepto en algunos materiales de trabajo. Estas investigaciones ponen de

manifiesto cómo el trabajar solo algunos significados de la fracción obstaculiza la construcción de nociones adecuadas de fracción y no favorece para alcanzar su comprensión.

Entre las investigaciones encontradas se tiene a Silva (2005) con su tesis Investigando saberes de profesores de enseñanza fundamental con enfoque en números fraccionarios donde señala que los docentes solo conocen algunos significados de la fracción y este suele ser el concepto de fracción como parte-todo. Esto hace que, por lo general sea este significado el único que se imparte en las clases, lo que genera limitaciones en la comprensión del concepto y hasta la ruptura en la relación entre fracción y sus usos, tal como la aparición del número mixto al medir o usar la fracción como razón al comparar dos cantidades. Señala la autora, que pueda ser esta la causa por la que los docentes recurran al uso de técnicas rígidas, centradas en procedimientos mecánicos poco comprendidos para lograr responder a ciertos tipos de problemas que no abordan todos los significados de las fracciones. De allí que sugiere en su investigación organizar los conceptos de fracción desde sus diversos significados para alcanzar mayor comprensión, lo cual permitiría consolidar el concepto de fracción y sentar las bases para la construcción del campo de los números racionales.

Este taller busca afianzar en los docentes los conocimientos disciplinar y didáctico relacionados con el concepto de fracciones, abordando sus diferentes significados y representaciones. Sánchez (2001), nos dice que la comprensión de una idea matemática, implica, la habilidad de manejar sus diferentes representaciones y realizar conversiones entre estas, y Ma (2010) destaca la importancia del momento en que se presenta un concepto por primera vez para asegurar su comprensión. Por otro lado, D'Amore y otros (2010) señalan que una de las causas más frecuentes de los errores de los estudiantes es la dificultad en el manejo de las diferentes formas de representación de un concepto.

Es por ello que, se abordarán los diferentes significados de la fracción: como parte – todo, como cociente (o reparto), como razón, como operador y como medida. Se explicará cada significado a partir de situaciones que le den sentido tanto en contexto discreto como continuo, así también, usando diversas representaciones. Entre ellos se tiene:

a) **Significado de la fracción como parte - todo**: Se presenta cuando un todo (denominado también "unidad") es dividido en partes equivalentes, para luego

establecer una relación entre las partes seleccionadas y el número total de partes que conforman el todo.

b) **Significado de la fracción como cociente**: Se presenta en situaciones de reparto, cuando un todo o "unidad" se distribuye de manera equitativa entre un número de personas o de partes.

c) **Significado de la fracción como razón**: Surge en situaciones de comparación entre dos cantidades de la misma o de diferente magnitud.

d) **Significado de la fracción como operador**: La fracción actúa sobre una cantidad mediante relaciones operativas de división y de multiplicación, de modo que la transforma en una nueva cantidad.

e) **Significado de la fracción como medida**: Surge al comparar dos magnitudes, de las cuales una de ellas es el referente para medir y la otra magnitud es la que se quiere medir.

Con las actividades del taller, se buscará que los participantes reconozcan cada uno de estos significados de la fracción en situaciones problemáticas concretas, cómo se representan y cómo se relacionan. Llinares y Sánchez (1997) resaltan que para llegar a la comprensión del concepto de fracción se debe pasar por todas sus interpretaciones y, además, las establecidas desde el lenguaje cotidiano. Es importante establecer una gradualidad en el desarrollo de estos conceptos, a lo largo de la escolaridad y, por ello, se trabajará con situaciones problemáticas de los diferentes grados en que se consolidan dichos conceptos, desde 4.° grado de primaria hasta 2.° grado de secundaria.

Además, el taller buscará que los participantes analicen, a partir de la evidencia encontrada en las evaluaciones censales, las dificultades de los estudiantes en la comprensión y la aplicación de los diferentes significados de la fracción, cuáles son estas dificultades, cómo se expresan y cómo se podrían abordar.

Finalmente, dentro del taller se promoverá en los participantes la creación de situaciones problemáticas propias, las cuales podrán aplicar a los estudiantes en el aula para el desarrollo de la competencia matemática en fracciones.

Aspectos metodológicos

El taller será activo – participativo, es decir, a la luz de una base conceptual, que será presentada y ejemplificada, los participantes analizarán y contrastarán diversas situaciones problemáticas con los distintos significados de la fracción para reconocer sus características y particularidades.

Además, analizarán evidencias, encontradas en las evaluaciones censales, relacionadas con las respuestas de los estudiantes a estímulos con fracciones. Se identificará y sistematizará las dificultades de los estudiantes y, a partir de ellas, se buscarán estrategias para potenciar las habilidades cognitivas de los estudiantes.

Así por ejemplo:

Los docentes analizan, en grupos, tareas que le permitan identificar el contenido abordado, la capacidad que está involucrada y el contexto de la tarea. Veamos el siguiente ejemplo:

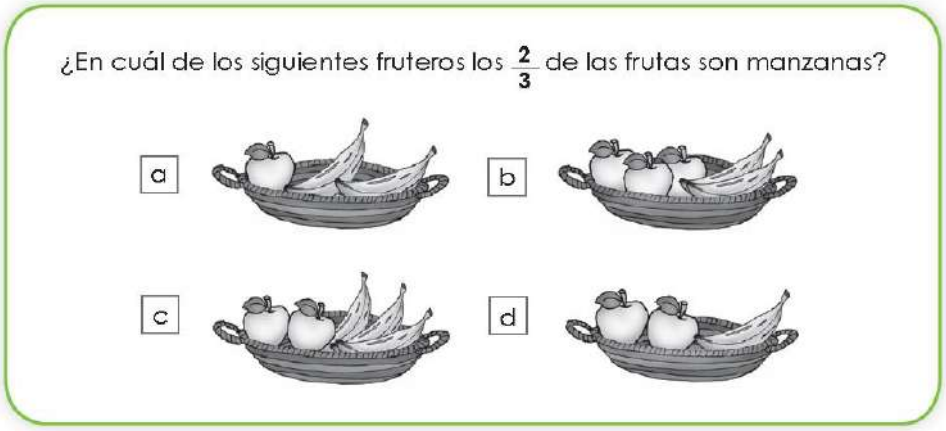


Figura 1. Pregunta de fracciones de la ECE 2015
Minedu (2016c)

En este caso, los participantes identificarán que es una tarea de fracción en su significado parte todo discreto, centrado en la capacidad de comunica ideas matemáticas y donde la respuesta correcta implica haber identificado el todo como frutas y las partes que son manzanas y plátanos, categorías inclusivas. Junto con señalar la respuesta correcta, los participantes comienzan a analizar los posibles errores que llevan a los estudiantes a marcar otras alternativas. En este caso, se evidencia que los estudiantes que marcan alternativa b)

y c) son aquellos que conciben la fracción como un arreglo de dos números y que buscan que haya 2 frutas de un tipo y 3 de otro. La evidencia de la Evaluación Censal de 2° de secundaria 2015 indica que el 54,8% de los estudiantes presentan esta dificultad.

Se generan acciones que llevan a dar propuestas de cómo desarrollar el concepto en las actividades de clase para evitar estos errores. Asimismo, permite identificar claramente la dificultad generada en el estudiante para acompañarlo de mejor manera en el proceso de retroalimentación.

El trabajo se hará en forma individual, en parejas y, finalmente, se hará una puesta en común.

Resultados esperados

Concluido el taller, los participantes serán capaces de:

- Diferenciar los distintos significados de la fracción y reconocer cada uno de ellos en un grupo de situaciones problemáticas dado.
- Crear situaciones problemáticas propias, con los diferentes significados de la fracción, para aplicar a los estudiantes en el aula con una intensión pedagógica definida.
- Proponer tareas de fracciones que impliquen variada demanda cognitiva.

Reflexiones

Este taller puede dar un valioso aporte a los docentes en formación como en servicio para poder comprender a cabalidad los conceptos de fracción y su forma de trabajarlo en aula según lo propuestos en el Diseño Curricular correspondiente a la noción de fracción. Los aportes y las evidencias encontradas nos confirman que:

Se debe trabajar desde los primeros grados de la escolaridad los distintos significados de las fracciones para poder consolidar la comprensión del concepto y poder aplicarlo en diferentes situaciones que se le presenten.

El aprendizaje de las fracciones a partir de sus significados permite dar una mirada funcional, es decir, le da sentido y utilidad a los conceptos aprendidos.

Los docentes debemos propiciar en las actividades de clase el uso de diferentes representaciones de una fracción tanto de la situación a la representación y viceversa como también poder graduar la complejidad de las tareas.

Realizar estudios que permitan investigar el nivel de comprensión de conceptos con respecto a la fracción que tienen los docentes en servicio como también los docentes en formación para, a partir de ello, dar propuestas que contribuyan en la formación inicial y continua de estos. Dichas propuestas deben considerar el concepto de fracción tanto desde un conocimiento pedagógico como disciplinar.

Referencias

D' Amore, B., Fandiño, M., Marazzani, I. y Sbaragli, S. (2010). *La didáctica y la dificultad en Matemática.* Bogotá: Magisterio.

Llinares, S. y Sánchez, M. (1997). *Fracciones.* Madrid: Síntesis.

Ma, L. (2010). *Conocimiento y enseñanza de las matemáticas elementales.* (1.a ed.). Santiago: Academia Chilena de Ciencias.

Ministerio de Educación [Minedu]. (2016a). Currículo Nacional de la Educación Básica. Recuperado de: http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/programa-primaria-16-marzo.pdf

Ministerio de Educación del Perú – Oficina de Medición de la Calidad de los Aprendizajes (2016b). *Informe de evaluación de Matemática en sexto grado - 2013. ¿Qué logros de aprendizaje en Matemática muestran los estudiantes al finalizar la primaria?* Lima: Serie Aportes pedagógicos

Ministerio de Educación [Minedu]. (2016c*). ¿Qué logran los estudiantes en Matemática?* 2.° grado de secundaria. Lima: Autor. Recuperado el 3 de junio de 2016 en: http://umc.minedu.gob.pe/wp-content/uploads/2016/03/Informe-para-el-docente-Matem%C3%A1tica_ECE-2015.pdf

Ministerio de Educación [Minedu]. (2017). *¿Qué logran los estudiantes en Matemática?* 2.° grado de secundaria. Lima: Autor. Recuperado el 13 de junio de 2017 en:

http://umc.minedu.gob.pe/wp-content/uploads/2017/04/Informe-para-Docentes-Matem%C3%A1tica-ECE-2016-2.%C2%B0-grado-de-secundaria.pdf

Rico, Luis (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, L. Rico & P. Gómez (Eds.) Educación Matemática. *Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia (pp. 69-108).* Bogotá: Una empresa docente.

Sánchez, M. (2001). Dificultades específicas en el aprendizaje de las fracciones. Estudio de casos. Implicaciones para la formación de maestros. En M. Chamorro (Ed.) *Dificultades del aprendizaje de las Matemáticas.* (pp. 11-24). Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Silva, M. (2005). *Investigando saberes de professores do ensino fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série* (tesis de doctorado). Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo, Sao Paulo, Brasil. Recuperado el 3 de marzo de 2016 de: http://www.ime.usp.br/~iole/significados%20da%20fra%E7%E3o.pdf

Volver al índice de autores

3.4.2. Juegos de mesa para la enseñanza de las fracciones

Luz Marlene Mendoza Torren
I.E. Simón Bolívar
Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco, Perú

Resumen

Una de las estrategias muy utilizadas en el nivel primario son los juegos, los cuales no se continúan y se descuidan en el nivel secundario, muchas veces por la aparente formalidad de los docentes. En este taller se pretende mostrar a los asistentes diferentes propuestas, que consisten en juegos de mesa adaptados a las fracciones, con el objeto de facilitar la motivación y el aprendizaje en los estudiantes del Sexto grado de primaria y Primer grado de secundaria. Los juegos propuestos son: cartas de fracciones, Dominó secuencial de fracciones, cuatro en raya (michi) de representación de fracciones, ¿Quién tiene ...? Yo tengo…, los cuales se demostrarán en forma individual y en grupos de cuatro integrantes. Luego de cada experiencia con los participantes, se realizarán un proceso de análisis y reflexión del uso de los juegos

Introducción

Mejorar los aprendizajes en el área de la matemática es un interés permanente de los docentes y de las diferentes autoridades involucradas en el campo educativo. Por ello se han incrementado una diversidad de estudios y propuestas didácticas referidas al aprendizaje y enseñanza de las fracciones para la educación primaria y secundaria. También en la Web encontramos propuestas manipulativas y tecnológicas orientadas a practicar y reforzar las habilidades de identificar y reconocer las fracciones en sus diferentes significados y representaciones.

La matemática está dedicada al estudio de las estructuras formales y de sus aplicaciones, por ello la necesidad de que cada concepto o estructura numérica utilice el sistema de representación. Las representaciones son elementos básicos en el proceso de enseñanza aprendizaje, existe una problemática en cuanto a la representación de conceptos matemáticos, pues entender como son los procesos que el hombre realiza para tener presente los objetos del mundo externo es un proceso complejo. Reconocemos que la comprensión es producto de un proceso mental como señala Dorsch, (1985) *"[…] a diferencia de la mera percepción, la comprensión es la*

recepción consciente de un contenido vivencial o perceptivo, ordenadora de la experiencia en un contexto de significación" (p. 133).

Con relación a la conceptualización de las Representaciones existe una amplia literatura, como en Rico, Castro y Romero, (2000), asumen un análisis conceptual de las representaciones, por la riqueza que se ha construido en torno a este, indicando que existe 27 diferentes conceptos, pero el único interés es el utilizado en matemáticas. Además, manifiestan que la interpretación de las representaciones está relacionada estrechamente con la comprensión del conocimiento, señalando que, para entender el concepto matemático, se necesita de un conjunto de símbolos propios es decir sus representaciones para ser distinguible. Según los autores las representaciones matemáticas en un sentido amplio:

> Son aquellas herramientas particulares - signos o gráficos- mediante las cuales los sujetos particulares abordan e interactúan con el conocimiento matemático. Mediante el trabajo con las representaciones las personas asignan significados a las estructuras matemáticas. Las representaciones son parte esencial de del proceso de aprendizaje de las matemáticas y conectan los objetos mentales con los objetos matemáticos (p. 1*)*.

Las fracciones se abordan en primaria y secundaria, además las diversas investigaciones realizadas han documentado las deficiencias específicas en estudiantes, además su importancia se evidencia en la ECE de proceso del 2017, que constó de 16 ítems, de los cuales 10 ítems tienen que ver con fracciones en sus diferentes significados y representaciones lo que implica su valor en el proceso de la enseñanza de la matemática.

Por otro lado, el juego es una actividad practicada por todos los tiempos y todas las culturas, con diferentes objetivos militares, diversión, formación y otros, esto es una evidencia de su importancia para la vida ser humano. Por ello el interés de proponer actividades a partir del juego.

Una de nuestras preocupaciones permanentes como docentes es la diversidad en el aula. Desde un punto de vista en atención a la diversidad y relaciona con el juego, Bautista, (2003) reconoce:

> El valor didáctico del juego está dado por el hecho de que en el mismo se combinan aspectos propios de la organización eficiente de la enseñanza: participación, dinamismo, entrenamiento, interpretación de papeles, colectividad, modelación, retroalimentación, carácter problemático, obtención de resultados completos, iniciativa, carácter sistémico y competencia (p.4).

El propósito principal del este taller es: dar a conocer una estrategia didáctica para la enseñanza aprendizaje de las fracciones a partir de actividades lúdicas motivar y generar el interés de los estudiantes para lograr la comprensión de conceptos básicos de la fracción en su significado Parte –Todo, de manera que los posteriores aprendizajes sean de fácil comprensión.

1. Juegos y fracciones

Diferentes autores proponen actividades producto de experiencias de trabajo en el aula, como: Morales, (2006, p. 3 -19) en la publicación "Las fracciones según los pescantes", Contreras, (2004) en su página Web, propone un conjunto de actividades que se pueden utilizar en el aula (listas para imprimir). Corbalán, (1994) en sus diversas publicaciones Carrillo y Hernán, (1989) en el libro materiales propone actividades de domino para trabajar representaciones de las fracciones, y otros.

Por su parte Flores y Otros, (2006) en los cursos de formación a distancia en Enseñanza de las Matemáticas en el Aula; propone algunos materiales que se pueden utilizar para el tema de la enseñanza aprendizaje de las matemáticas; para ejemplificar el uso de materiales elige el tema de las fracciones (a partir de una situación problemática en el tema), por tratarse de un concepto complejo, que acarrea fracaso escolar, y que se extiende a lo largo de toda la enseñanza básica; sugiere varias propuestas de materiales como: Materiales conceptuales: el Círculo de Fracciones, Diagrama de Freudenthal y Puzzle de trozos, y las Transparencias de Cuadrados y la Demostración Fracciones. Y Materiales Para Ejercitarse: el Dominó de Fracciones y la Baraja de Fracciones. Puzzle de Fracciones

El círculo de fracciones

Un caso específico fue en las evaluaciones de proceso de la ECE 2017, fue los ítems 5, 9 y 10 (figura N° 1), son de tipo: operatorio, graficas continúas y fracciones como parte todo. La respuesta del estudiante **A**; en el ítem N° 5 referida a la utilización de algoritmos de operaciones de fracciones mixtas; la realizada correctamente, lo que evidencia el manejo en algoritmos de operaciones.

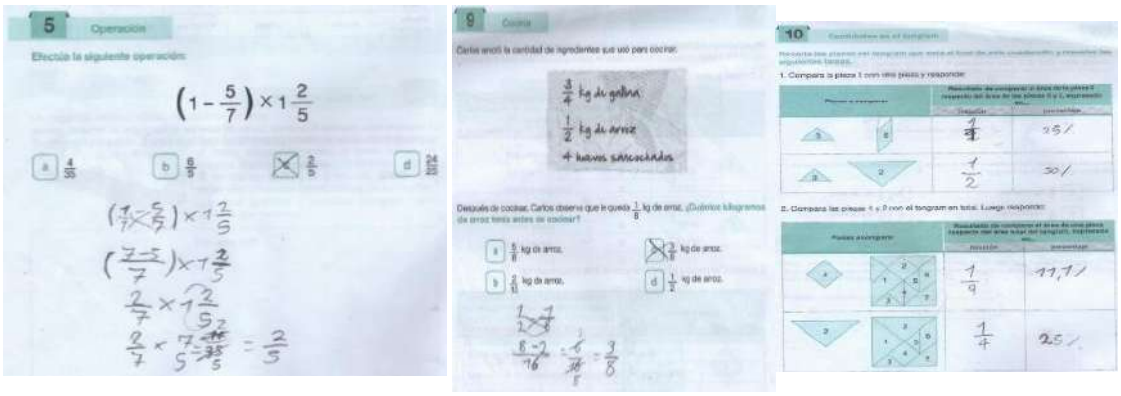


Figura. N° 1 Tomado del cuadernillo Proceso 1 Matemática demostrando lo que aprendimos 2° de secundaria

En el item N° 9, formulado a partir de una situacion problemática muestra representaciones simbólicas y numéricas en contextos discretos y continuos, el estudiante **A** presenta dificultades en la comprensión del significado Parte - Todo, pero la parte operatoria ejecuta con facilidad. Esto nos muestra que en los cálculos no tiene dificultades, pero, cuando se enfrenta a las representaciones comete errores en reconocer el todo, una temática que los docentes tenemos que abordar con diferentes actividades y situaciones.

El mismo estudiante **A**, en el ítem N° 10 referida a representaciones graficas en contexto continuo, no realiza correctamente, evidenciando que tiene dificultad en la comprensión de reconocer el Todo, esto ocurre porque muchas veces se da por entendido por su aparente facilidad.

Como Llinares y Sánchez (1988) en su propuesta de las fracciones señalan que no se debe empezar con la representación circular (lo clásico), sino iniciar con representaciones continuas rectangulares, porque el estudiante podrá realizar diversas particiones iguales a diferencia de la circular que muchas veces trae complicaciones.

Otro aspecto importante en la construcción de propuestas es considerar y reconocer la complejidad de comprender las representaciones de las fracciones en su significado Parte – Todo; en estudiantes de la educación básica; como lo señala Llinares y Sánchez, (1988)

> (….) el paso de los números naturales a los fraccionarios no es fácil para los estudiantes. Presentan dificultades tanto conceptuales como algorítmicas. El docente debe estar pendiente de la evolución de los errores de los estudiantes y huir de la tentación de creer que con la simple práctica repetitiva se irán subsanando (p. 128)

Por otro lado, a nivel internacional identificamos diversos trabajos referidos a las fracciones, como indica Cortina (2014) en el campo de la educación matemática es uno de los temas más estudiados por su complejidad conceptual que representa para los estudiantes en la comprensión en las diferentes edades escolares.

También su importancia radica en que está presente en diversos contextos de uso. Centrándonos en el contexto escolar, el tema de fracciones está considerada a lo largo de la escolaridad básica de Perú y son pre-requisitos para posteriores aprendizajes de mayor complejidad. También se puede comparar en las actividades de aula que la mayoría de los estudiantes continúan enfrentando problemas en este concepto matemático, muy a pesar de que se invierte un tiempo razonable para el desarrollo de las actividades de aprendizaje.

2. Objetivo del Taller

Los objetivos para el desarrollo del taller son los siguientes:

- Exponer de forma general la estructura de una secuencia didáctica basada en la metodología del aprendizaje basado en juegos matemáticos.
- Mostrar las bondades de los juegos matemáticos en el desarrollo de aprendizajes relacionados con el pensamiento matemáticos
- Ejemplificar cómo puede diseñarse y seleccionar situaciones y juegos que ayuden en la representación y compresión de las fracciones.

- De manera simultánea, se propone mostrar los errores que los estudiantes cometen al realizar tareas referidas a la representación de las fracciones en diversos contextos.

3. Metodología del taller

La metodología del taller que se propone es totalmente activa y participativa, se realizaran actividades individuales y grupales con materiales, situaciones, juegos de manera vivencial de manera que el participante pueda reconocer las bondades y ventajas de utilizar estos recursos en el aula.

El investigador es el que propone la manera de intervención, es decir determina el estilo de realizar las propuestas metodológicas en el aula, como señalan Rodríguez, Gil y García (1996), siguiendo esta línea el desarrollo de este taller comprende tres fases: inicial, desarrollo y de reflexión- síntesis; los que se describen a continuación.

3.1. FASE INICIAL

Para el desarrollo del taller se realizará siguiendo el protocolo siguiente:

a) Presentación de los objetivos del taller a los participantes

b) Fase de motivación

- Presentación de situaciones diarias en las que se observan las fracciones
- Comentarios de los diversos ejemplos.

c) Haciendo uso de PPT, se presenta información teórica de las diversas representaciones de las fracciones y sus traducciones de un sistema a otro: **Simbólicas, graficas, verbales.**

d) Comentario de la importancia del juego en la formación de la educación secundaria.

e) Presentación y desarrollo de los juegos grupales:

- Cuatro en raya de representaciones de fracciones

- Domino de representaciones de fracciones
- Mosaico de representaciones de fracciones
- Rompecabezas de representaciones de fracciones
- Cuadrados mágicos de fracciones
- Cartas de representación de fracciones
- Situaciones del contexto para las representaciones de fracciones

3.2. FASE DE DESARROLLO

Se presenta a los asistentes en las reglas y características básicas del desarrollo del taller **juegos de mesa para la enseñanza de las fracciones** y la secuencia a seguir en el taller, ejemplificando en todo momento. Para ello se entrega los materiales antes de iniciar cada actividad. Las actividades a desarrollar se presentan a continuación:

3.2.1. Materiales a utilizar por los participantes

Los materiales que se utilizaran para el desarrollo de las actividades, son:

Generales

- Papel Bonn
- Dados cúbicos

Específicos

- Tableros juego de cuatro en raya
- Fichas de dominó de fracciones
- Fichas de mosaico de fracciones
- PPTs de cuadrados mágicos y otros.

3.2.2. Actividades a desarrollar por los asistentes

a) Actividad N° 1 JUEGO DE CARTAS DE FRACCIONES

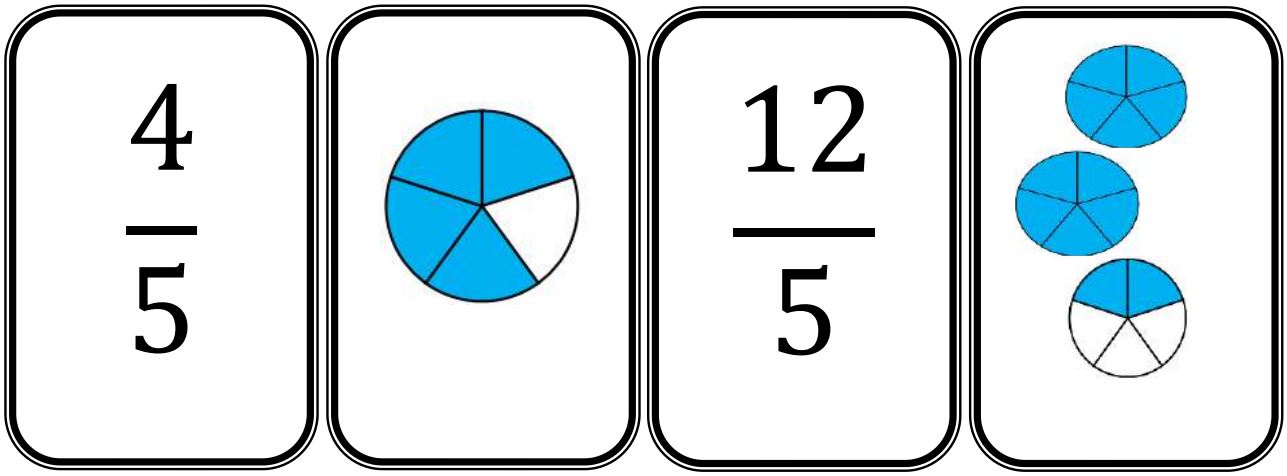
A. DESCRIPCIÓN DEL MATERIAL

Grado de estudios:	5 º de Primaria a más
Temas	❖ Representación numérica y grafica de fracciones propias e impropias
Material	• El juego consta de 40 cartas con representaciones gráficas y numéricas de fracciones.
Número de jugadores	• El juego esta propuesto para 2 o 4 jugadores
Objetivo:	• Reforzar la lectura de las representaciones gráficas y simbólicas numéricas de las fracciones propias e impropias. • Desarrollar estrategias de juego • Desarrollar habilidades de trabajo en grupo.

B. REGLAS DE JUEGO

- Se barajan las cartas.
- Se entrega a cada grupo una baraja completa de cartas de fracciones
- Se reparten todas las cartas a cada jugador el mismo número.
- Cada jugador con las cartas que le tocaron forma todas las parejas posibles de la representación gráfica y simbólica (por ejemplo: $\frac{3}{8}$ y  ; $\frac{3}{5}$  , … , …… todas las que se puedan) las mismas que se guardan (cartas acumuladas) previamente mostrando los pares formados a sus compañeros de juego.
- En sentido de las agujas del reloj y por turno cada jugador extrae una carta de las que quedan a su vecino (sin verlas). Si forma una pareja la guarda, ya que el objetivo es quedarse sin cartas.
- Gana el primero que se queda sin cartas

C. MATERIAL DE JUEGO (para fotocopiar)



Actividad N° 2 CUATRO EN RAYA DE REPRESENTACIÓN DE FRACCIONES

A. DESCRIPCIÓN GENERAL

Grado de estudios:	Primer Grado de secundaria a más
Contenido	Representación de fracciones numéricas, gráfica y verbales
Material	Un tablero como se muestra en la figura 10 fichas de color rojo 10 fichas de color azul
Número de jugadores	2 jugadores
Objetivo:	Reforzar la Representación de fracciones Trabajo grupal

B. DESCRIPCION DEL JUEGO

El juego está adaptado del juego tradicional **tres en raya o MICHI,** consta de un tablero y fichas de color para cada jugador, se juegan por turnos, el que logra formar unas cuatro fichas consecutivas en forma vertical u horizontal, es el ganador.

C. DESARROLLO DEL JUEGO

1. Juego para dos jugadores
2. Cada par de jugadores debe tener un tablero (como la figura)
3. Por jugador 10 ó 12 fichas de diferente color
4. Se juega por turno
5. Se echa a la suerte o se decide quien inicia el juego.
6. El primer jugador indica dos números que se encuentran en la fila numerador y en la fila de denominador, luego coloca una ficha de color en la casilla en la que se encuentra la representación de fracción (verbal, numérica, gráfica).
7. El segundo jugador hace lo mismo, pero usa fichas de otro color.
8. Gana el primero que logra tener 4 fichas consecutivas de su color en una fila, en una columna o en una diagonal.
9. Debe decir en voz alta para que escuche el otro jugador.
10. Competencia a nivel de grupos

Actividad N° 3 DOMINO SECUENCIAL DE REPRESENTACIONES DE FRACCIONES

A. Descripción General

Grado	Primero Grado de secundaria a más
Contenido	Representación de fracciones
Material	24 fichas
Objetivo:	• Reconocer la representación gráfica y numérica (Parte - Todo). • Reforzar el lenguaje matemático de la representación de fracciones
Tipo	• Fichas

B. Desarrollo del Juego (competencia a nivel de grupos)

1. Grupos de 4 estudiantes, en un inicio el grupo debe descubrir cómo jugar (unos minutos).

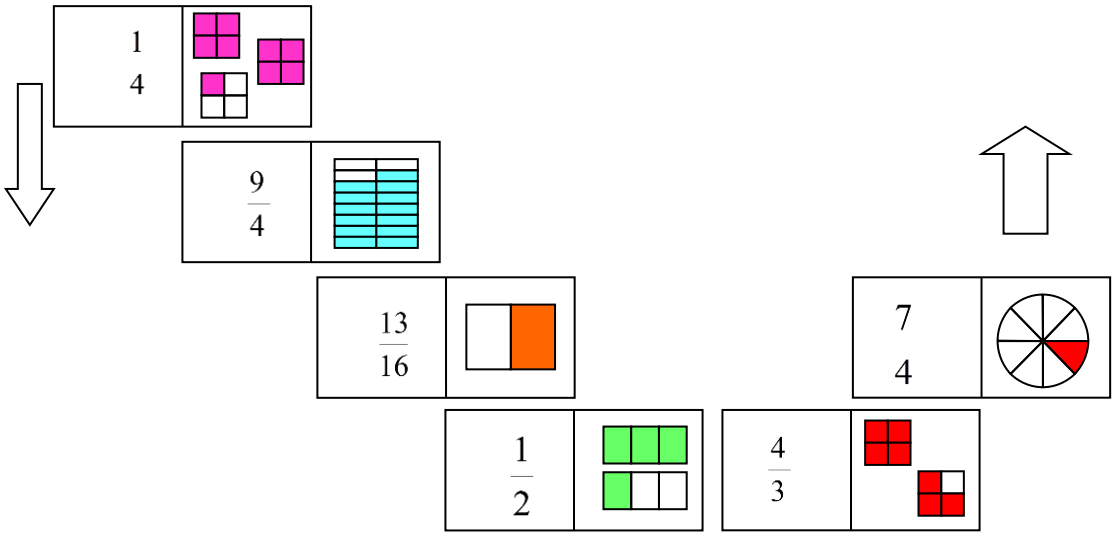
2. Todas las fichas de dominó contienen gráficos y números fraccionarios diferentes, el juego se inicia y termina con cualquier ficha.

3. El juego consiste en relacionar la representación gráfica y la simbólica numérica y así se va armando el dominó de fracciones (como una cadena de pregunta y respuesta). Ver ejemplo.

4. La primera ficha colocada debe encajar con la última ficha.

5. El grupo que termine primero de armar la secuencia del juego es el ganador y puede ser bonificado con puntos.

6. Este juego afianza la representación de fracciones, simbólico numérico y gráfica. Se recomienda, que el docente realice previamente ejercicios sobre este tema (lectura de fracciones), para que el alumno tenga más facilidad de armar el dominó.

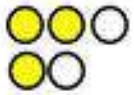
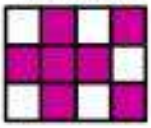


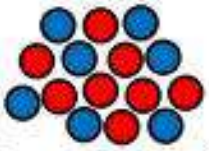
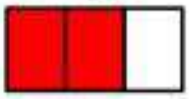
El siguiente ejemplo en la figura podemos observar cómo se van colocando las fichas unas tras otras, se empieza con cualquier ficha e igual se termina con cualquier ficha (cadena de pregunta y respuesta).



Actividad N° 4Juego ¿Quién tiene …? Yo tengo …….

Este es el material para trabajar en macrogrupo.

¿QUIEN TIENE .....?	YO TENGO.....
Quien tiene la representación simbólica de: 	Yo tengo y es: 
Quien tiene la representación gráfica de: $\frac{3}{7}$	Yo tengo y es: $\frac{3}{5}$
Quien tiene la representación verbal de: 	Yo tengo y es: 
Quien tiene la representación simbólica de: 	Yo tengo y es: cinco novenos
Quien tiene la representación de: Tengo quince caramelos de los cuales 8 son de fresa, la representación gráfica es:	Yo tengo y es: $\frac{7}{12}$

Quien tiene la representación simbólica de los círculos verdes: 	Yo tengo y es: 
Quien tiene la representación simbólica de: José tiene una parcela rectangular de tierra. Este año sembró ½ de la parcela tomates y en la cuarta parte cebollas. ¿Qué parte de parcela sembró José?	Yo tengo y es: $\frac{7}{13}$
Quien tiene la representación simbólica de: ¿Qué parte del día ha transcurrido a las 3 pm?	Yo tengo y es: $\frac{3}{4}$
Quien tiene la representación gráfica de: Matías leyó 1/3 de un libro y luego la mitad de lo que le quedaba. ¿Qué fracción del libro leyó Matías?	Yo tengo y es: $\frac{5}{8}$
Quien tiene la representación gráfica de: Los cuatro elementos de un conjunto, tres de ellos son círculos	Yo tengo y es: 

4. Reflexiones finales

- La falta de comprensión de las fracciones es un problema permanente; evidencia de ello se encuentra en los resultados de la evaluación ECE.

- Presentar situaciones variadas que impliquen los distintos usos de las fracciones en base a distintos contextos. No solo centrarse en la enseñanza de la relación parte-todo.

- Comenzar a trabajar fracciones con las fracciones más usuales y sus equivalencias. No empezar por las más complicadas.

- Por la diversidad de estudiantes en el aula, es necesario utilizar los recursos y materiales, por un lado ayudan a mejorar nuestra práctica pedagógica y por el otro, ayudan a superar los errores y dificultades en la comprensión de los conocimientos matemáticos.

- Las propuestas de los autores desde diferentes perspectivas, son evidencia sobre la importancia del "juego" en la vida del hombre, por ello se reconoce el potencial de este recurso en las aulas de matemáticas, como un recurso para mejorar los aprendizajes en los estudiantes.

- De las diversas propuestas se deduce que la selección pertinente de juegos, implica un proceso de conocimiento mínimo de estos, para ello debe, el profesor debe hacer preguntas como las siguientes: sirve el juego para 1os objetivos propuestos?, qué conocimientos necesita el estudiante para practicar el juego?, qué habilidades se requieren para practicar el juego?, el juego es atractivo teniendo en cuenta la edad y maduración de 1os estudiantes?, los estudiantes tienen limitaciones físicas para practicar el juego?, hay problemas de costos o de espacio para la práctica del juego?, existe compañero que haya experimentado el juego en situaciones similares a las de mis estudiantes? Garin, (1990).

Referencias

Bautista-Vallejo, J.M. & Raquel-López, N. (2002). *El juego didáctico como estrategia de atención a la diversidad*. Ágora Digital, 4, 134141. Recuperado de https://www.grupocomunicar.com/ojs/index.php/agora/article/download/3214/1678

Cortina, J. (2014) *Investigar las fracciones: experiencias inspiradas en la metodología de los experimentos de diseño*. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/267810789_Investigar_las_fracciones_*experiencias*_inspiradas_en_la_metodologia_de_los_experimentos_de_diseno

Flores, P. y Otros (2006). Actividades de Educación Matemática para la formación de profesores. En Corral, C. Y Zurbano, E. (Eds.). *IV Simposio de Propuestas Metodológicas y de Evaluación en la Formación Inicial de los Profesores en el Área de Didáctica de la Matemática*. Universidad de Oviedo, pp. 33-53. ISBN: 84-699-2416-8. Recuperado de http://www.ugr.es/~pflores/

Llinares, S. y Sánchez, V. (1988) Fracciones. Síntesis. Madrid. España

MINEDU, (2016) *Marco de Fundamentación de las pruebas de evaluación censal de estudiantes*. Lima. Series de reportes técnicos. Recuperado de http://umc.minedu.gob.pe/marco-de-fundamentacion-de-las-pruebas-de-la-evaluacion-censal-de-estudiantes/

NCTM, (2003). Principios y Estándares para la Educación Matemática. Sevilla: Sociedad *Andaluza* de Educación Matemática Thales.

Rico, L., Castro, E. y Romero, I. (2000). *Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas*. En Beltrán, J. et al. (Ed.), Intervención psicopedagógica y currículum escolar (pp. 153-182). Madrid: Pirámide. Recuperado de http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/RicoL00-39.pdf

Skemp, R. (1999) Psicología del aprendizaje de las matemáticas. Madrid. MorataV.

Volver al índice de autores

Eje temático 4

Epistemología y secuencias didácticas

4. EJE TEMÁTICO: EPISTEMOLOGÍA Y SECUENCIAS DIDÁCTICAS

4.1. Conferencias

4.1.1. A engenharia do percurso de estudos e pesquisa (Conferencia plenaria)

Dr. Saddo Ag Almouloud.
Pontificia Universidad Católica de São Paulo, Brasil

Resumen

Apresentamos uma reflexão sobre a engenharia do Percurso de Estudos e Pesquisa desenvolvida no contexto da Teoria Antropológica do Didática (TAD). É um ponto de partida consiste em olhar "o método da engenharia didática" como um caso específico que oferece ao investigador as possibilidades únicas "de uma metodologia" de investigação em didática. "A metodologia" refere-se então ao que Chevallard chama de praxeologias de investigação colocadas em jogo em um domínio dado ou em uma pesquisa específica.

I- INTRODUÇÃO

Os fatores que interferem no ensino e na aprendizagem de matemática têm despertado o interesse de vários pesquisadores da área de Educação Matemática. As pesquisas desenvolvidas seguiram diferentes direções. Escolhemos discutir neste texto a Engenharia do Percurso de Estudo e Pesquisa (PER) desenvolvida no contexto da Teoria Antropológica do Didático (TAD) por Yves Chevallard (2009). Por isso, discutiremos, de forma sucinta, alguns construtos da TAD que vão fundamentar nossa discussão sobre o PER.

Os avanços das pesquisas em Didática da Matemática conduziram em pensar na constituição de uma área cientifica que investiga os processos de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos. Partindo desse princípio, a Didática da Matemática é definida

como a ciência da educação cujo propósito é o estuda de fenômenos de ensino e de aprendizagem, mais especificamente, é o estudo de situações que visam à aquisição de conhecimentos/saberes matemáticos pelos alunos ou adultos em formação, tanto do ponto de vista das características dessas situações, bem como do tipo de aprendizagem que elas possibilitam.

Uma contribuição importante, nesse contexto, é a Teoria Antropológica do Didático (TAD) desenvolvida por Yves Chevallard (1999). Esta teoria focaliza o estudo das **organizações praxeológicas didáticas** pensadas para o ensino e a aprendizagem de **organizações matemáticas**.

A Didática da Matemática vista no campo da antropologia do conhecimento (ou antropologia cognitiva) considera o seguinte: *tudo é objeto*, faz-se a distinção dos tipos de objetos particulares: *as instituições, os indivíduos e as posições* que os indivíduos ocupam nas instituições. Os indivíduos tornam-se os *sujeitos* das instituições.

A Teoria Antropológica do Didático (TAD) estuda as condições de possibilidade e funcionamento de Sistemas Didáticos, entendidos como relações sujeito-instituição-saber. Ela tem como foco estudar o Homem frente ao saber matemático, e mais especificamente, frente a situações matemáticas. Uma razão para a utilização do termo "antropológico" é que a TAD situa a atividade matemática e, em consequência, o estudo da matemática dentro do conjunto de atividades humanas e de instituições sociais (Chevallard, p.1, 1999-1).

Na TAD, as noções de (tipos de) tarefa, (tipo de) técnica, tecnologia e teoria permitem modelar as práticas sociais em geral e, em particular, a atividade matemática, baseando-se em três postulados:

1. Toda prática institucional pode ser analisada, sob diferentes pontos de vista e de diferentes maneiras, em um sistema de tarefas relativamente bem delineadas.

2. O cumprimento de toda tarefa decorre do desenvolvimento de uma técnica

A palavra técnica é aqui utilizada como uma "maneira de fazer" uma tarefa, mas não é necessariamente um procedimento estruturado e metódico ou algorítmico.

As tarefas são identificadas por um verbo de ação, que, sozinho, caracterizaria um gênero de tarefa, por exemplo: calcular, decompor, resolver, somar que não definem o conteúdo

em estudo. Por outro lado, "resolver uma equação fracionária" ou ainda "decompor uma fração racional em elementos simples" caracterizam tipos de tarefas, em que se encontram determinadas tarefas, como por exemplo, "resolver a equação" ou "decompor a fração 7/9 em frações mais simples" (Silva, 2005).

Para uma determinada tarefa, geralmente, existe uma técnica ou um número limitado de técnicas reconhecidas na instituição que problematizou essa tarefa, embora possam existir técnicas alternativas em outras instituições. A maioria das tarefas institucionais torna-se rotineira quando deixam de apresentar problemas em sua realização. Isso quer dizer que para produzir técnicas é preciso que se tenha uma tarefa efetivamente problemática que estimule o desenvolvimento de pelo menos uma técnica para responder às questões colocadas pela tarefa. As técnicas assim produzidas são então organizadas para que funcionem regularmente na instituição.

Com esses dois postulados citados, obtém-se um bloco "prático-técnico" formado por um tipo de tarefas e por uma técnica que pode ser identificado em linguagem corrente como um "saber-fazer". (Chevallard, 2002, p. 3)

O terceiro postulado a ser enunciado refere-se à ecologia das tarefas:

3. A ecologia das tarefas, isto é, as condições e restrições que permitem sua produção e sua utilização nas instituições. Para existir em uma instituição, uma técnica deve ser pelo menos compreensível, legível e justificada, o que seria uma condição mínima para permitir o seu controle e garantir a eficácia das tarefas feitas, que são geralmente tarefas supondo a colaboração de vários atores.

Essas condições e restrições ecológicas implicam a existência de um discurso descritivo e justificativo das tarefas e técnicas que Bosch e Chevallard (1991) chamam de tecnologia da técnica. Toda tecnologia precisa também de uma justificação, que chamaram a teoria da técnica.

Para Chevallard (2002) um "saber-fazer", identificado por uma tarefa e uma técnica, não é uma entidade isolada porque toda técnica exige, em princípio, uma justificativa, isto é, um "discurso lógico" (logos) que lhe dá suporte, chamado de tecnologia. Segundo o autor, a tecnologia vem descrever e justificar a técnica como uma maneira de cumprir corretamente uma tarefa.

Assim, qualquer bloco tarefa/técnica vem sempre acompanhado de algum vestígio de tecnologia. Por exemplo, na aritmética elementar, às vezes, o discurso tem a função dupla de ser técnica e tecnologia, pois permite, ao mesmo tempo, encontrar o resultado e justificar que tal resultado está correto.

Um conjunto de técnicas, de tecnologias e de teorias organizadas para um tipo de tarefa forma uma organização "praxeológica" (ou praxeologia) pontual. A palavra praxeologia é formada por dois termos gregos, práxis e logos, que significam, respectivamente, prática e razão. Ela reporta-se ao fato de que uma prática humana, no interior de uma instituição, está sempre acompanhada de um discurso, mais ou menos desenvolvido, de um logos que a justifica, a acompanha e que lhe dá razão.

Um saber diz respeito a uma organização praxeológica particular, com uma certa "generalidade" que lhe permite funcionar como uma máquina de produção de conhecimento. Para Bosch, Fonseca e Gascón (2004), a reconstrução institucional de uma teoria matemática requer elaborar uma linguagem comum que permita descrever, interpretar, relacionar, justificar e produzir as diferentes tecnologias da Organização Matemática Local (OML) que integram uma Organização Matemática Regional (OMR).

A praxeologia associada a um saber é a junção de dois blocos: saber-fazer (técnico/prático) e saber (tecnológico/teórico) cuja ecologia refere-se às condições de sua construção e vida nas instituições de ensino que a produz, utiliza ou transpõe. Consideram-se aqui as condições de "sobrevivência" de um saber e de um saber-fazer em analogia a um estudo ecológico: qual o habitat? Qual o nicho? Qual o papel deste saber ou saber-fazer na "cadeia alimentar"? Tais respostas ajudam na compreensão da organização matemática determinada por uma praxeologia.

Segundo Chevallard (1999), as praxeologias (ou organizações) associadas a um saber matemático são de duas espécies: matemáticas e didáticas. As organizações matemáticas referem-se à realidade matemática que se pode construir para ser desenvolvida numa em uma sala de aula e as organizações didáticas referem-se à maneira que se faz essa construção; sendo assim, existe uma relação entre os dois tipos de organização que Chevallard (2002) define como fenômeno de codeterminação entre as organizações matemática e didática.

Em um processo de formação de saberes/conhecimentos, as praxeologias envelhecem, pois, seus componentes teóricos e tecnológicos perdem seu crédito. Constantemente, em uma determinada instituição I surgem novas praxeologias que poderão ser produzidas ou reproduzidas se existem em alguma instituição I'. A passagem da praxeologia da instituição I para a da instituição I' é chamada por Chevallard (2002) de Transposição, mais especificamente, de Transposição Didática quando a instituição de destino é uma instituição de ensino (escola, classe, etc.).

ENGENHARIA DIDÁTICA DE PER

Segundo Chevallard (2009), um ponto de partida poderia consistir em olhar "o método da engenharia didática" como um caso específico que oferece ao investigador as possibilidades únicas "de uma metodologia" de investigação em didática. "A metodologia" refere-se então ao que Chevallard chama de praxeologias de investigação colocadas em jogo em um domínio dado ou em uma pesquisa específica.

Este autor observa que, o trabalho coletivo sobre praxeologias de investigação em didática, parece hoje necessário que nunca para combater os efeitos dos caminhos maquinalmente trilhados, ou a quase naturalização dos métodos usados.

Chevallard (2009) explica a terminologia "didática de investigação codisciplinar", da seguinte forma: "Uma questão Q a ser estabelecida, num sistema didático S(X; Y; Q) onde X é um coletivo de estudo (uma classe, uma equipe de estudantes, etc.) e Y um grupo (geralmente reduzido, ou mesmo inexistente) de auxiliares e diretores de estudo (professor, tutor, etc.). A finalidade da constituição desse sistema é estudar Q e procurar uma resposta R que satisfaça algumas restrições a priori, confrontando-a com 'meios didáticos' apropriados".

Esse trabalho de investigação agrega ferramentas praxeológicas de várias disciplinas, ou seja, é codisciplinar. Segundo o autor, envolver-se numa tal investigação é engajar-se num Percurso de Estudo e Pesquisa (PER[3]) motivado por essa mesma pesquisa. Ele esclarece, ainda, que para desenvolver a resposta R, de fato, é conveniente coletar e organizar um "milieu" de trabalho M que reúne recursos novos e antigos que X irá usar. Esses recursos, certamente, serão "todas" as respostas à Q, validadas por uma instituição particular, e denotada por $R^{\Diamond}$. A análise destas respostas deve fornecer materiais para a construção da

[3] Parcours d´Étude et de Recherche

resposta R, ela será denotada por $R^{\blacktriangledown}$. Outras obras "O" serão da cultura, qualquer que seja a "dimensão" cultural, que fornecem ferramentas para a análise das respostas $R^{\Diamond}$ e da construção da resposta esperada $R^{\blacktriangledown}$. As obras "O" serão parcialmente desenhadas em várias disciplinas, embora algumas sejam "disciplinas" não reconhecidas, porque são emergentes ou culturalmente vilipendiadas. Chevallard apresenta o que ele chama de "esquema herbatiano" que pode ser observado na seguinte forma condensada por $(S(X\,;\,Y\,;\,Q) \rightharpoonup M) \hookrightarrow R^{\blacktriangledown}$ e, da forma desenvolvida por:

$$[S(X\,;\,Y\,;\,Q) \rightharpoonup \{\, R_1^{\Diamond}, R_2^{\Diamond}, \ldots, R_n^{\Diamond}, O_{n+1}, \ldots, O_m \,\}] \hookrightarrow R^{\blacktriangledown}.$$

Segundo o autor, a noção de PER permite englobar práticas mais ou menos diferentes das práticas sociais de conhecimento: pesquisa científica, investigação policial ou jornalística, etc. O estudo escolar é, todavia, o que parece ser menos passível de modelagem em termos de PER e, na verdade, podemos imaginar as formas mais tradicionais de ensino, e dizer que elas requerem uma investigação sobre Q, é o fato de o professor ter lugar em outra cena da classe; ao aluno é oferecido uma resposta pronta $R^{\Diamond}$, autenticada pelo professor, que será a resposta $R^{\blacktriangledown}$ da classe: ele deverá estudá-la, como será a resposta $R^{\Diamond}$ relatada num "milieu" M pela classe X se os alunos tiveram tempo livre para respondê-la. Ou seja, esse movimento retrata onde cada cidadão ou grupo de cidadão deve ser capaz de investigar qualquer assunto que escolher e usar as ferramentas praxeológicas de sua formação escolar.

Chevallard afirma que se deve ser enfatizar os seguintes aspectos a partir da noção de PER associada à investigação codisciplinar:

- A investigação codisciplinar aberta agrega as ferramentas com o "milieu", que a priori é qualquer "milieu" M, que pode ser elegível.

- Com relação à questão Q estudada, deve-se levar em conta a generalidade desta questão, ou seja, sua capacidade de gerar outras perguntas.

Um PER é baseado em uma pergunta geradora**, ou seja, uma questão capaz** de gerar um encontro com questões " derivadas". O que levou a seguinte definição de uma questão crucial: Será dito que uma pergunta Q_2 é crucial para (ou em relação à) uma pergunta Q_1 se o fato de saber responder à Q_2 permite avançar na elaboração de uma resposta à Q_1. Naturalmente, para uma pergunta Q_1 pode haver várias perguntas Q_2, Q_2 ', Q_2 ", etc., crucial para Q1 (tradução nossa)

É importante entender o significado dos termos "Estudo e Pesquisa" nas expressões PER. Esses termos apontam a necessidade de procurar respostas a questões cujo estudo está sob a responsabilidade dos alunos. Para reforçar essa ideia, Chevallard define três princípios estruturantes dos PER: O primeiro é organizar *um PER em torno de uma questão geradora*. O segundo princípio exige *organizar* um PER em torno de cinco gestos básicos (CHEVALLARD, 2011): *observar, analisar, avaliar as respostas* $R^{\diamond}$*, desenvolver, em seguida, divulgar e defender a resposta* $R^{\bullet}$. O terceiro princípio, finalmente, une a pilotagem do PER, *regulando [as] sete dialéticas fundamentais* (a seguir).

Esse dispositivo tem um papel estratégico para a formação inicial e continuada de professores, na medida em que elimina o risco de querer formar professores a partir de um equipamento praxeológico (EP) imutável, o qual deve ser deixado sob a responsabilidade do professor para mobilizá-lo em situações concretas. De outro modo, os EP disponíveis passam a serem objetos questionáveis, a partir das necessidades praxeológicas que se criam no exercício da profissão e se constituindo no estudo das questões, problemas ou necessidades, que estão na origem do processo de formação, que por sua vez, levarão a reformulações desses EP disponíveis. O autor (2009, p.4) ilustra esta situação com um exemplo de PER para construir uma calculadora gráfica, que relatamos a seguir.

Segundo Chevallard (2009a), a noção de PER codisciplinar pode englobar um amplo conjunto de práticas sociais do conhecimento, como por exemplo, a pesquisa científica, a investigação policial ou jornalística etc.

De acordo com Chevallard (2009a), cada estudante ou grupo de estudantes engajado em um PER deve ser capaz de investigar qualquer assunto escolhido usando equipamentos praxeológicos da formação básica que a escola tem proporcionado. O autor salienta que a introdução da noção de PER na sala de aula de Matemática leva naturalmente à questão da redefinição de um currículo de Matemática PER, no qual ele examina alguns princípios que devem orientar a concepção, a construção e a realização de um ensino renovado, trabalhando-se com temas específicos ou tópicos do programa do ano.

Quando um currículo se forma em torno de uma pedagogia dada, forma-se também uma infraestrutura didática - aqui didática-matemática, ou matemática-didática - que permite a aplicação desta pedagogia. Uma pedagogia na qual se espera apenas do professor que expõe aos alunos a matéria a estudar supõe assim uma infraestrutura cujo essencial se reduz às

“lições”, ou seja, exposições sobre os diferentes temas e assuntos previstos pelo currículo prescrito. No entanto, segundo Chevallard, mesmo a criação destas exposições não é evidente. Ela é facilitada quando, essencialmente, ela retoma de forma a penas transposta “um texto do saber” elaborado na esfera (matemática) cientifica. Os objetos matemáticos que compõem seu curso e a sua organização vem de outras fontes. É isto que constitui (em parte) o que Chevallard chama de infraestrutura didática composta por exigências e condições pedagógicas, além das organizações matemáticas que exploram estas condições e respeitando estas exigências (assim como as condições e exigências próprias da disciplina estudada).

De acordo com Chevallard (2009a), esta infraestrutura supõe fundações que o professor isolado ou em associação com outros professores não pode criar. Ainda, ele aponta que criar uma infraestrutura didática-matemática adequada a uma pedagogia do PER revela-se fora de alcance de “simples” professores, e que, é provável que tal projeto suponha a mobilização de imensas forças produtivas na disciplina. Portanto, a infraestrutura matemática adequada a uma pedagogia de professor constitui uma obra difícil e rara.

Chevallard (2009b, p.99) afirma que o equipamento praxeológico dependerá do PER determinado em parte pelas decisões adotadas no quadro do inquérito sobre Q. Neste caso, não há realmente uma análise a priori anterior ao funcionamento do sistema educativo S (X; Y; Q) em que ocorre a investigação. A análise a priori, que na problemática clássica da engenharia didática é a prerrogativa do "engenheiro didático" ou, na melhor das hipóteses, do professor Y, aqui é integrada ao trabalho do sistema didático S(X; Y; Q) e tornou-se na "análise in vivo", parte integrante do trabalho exigido pelo inquérito, que determina em grande parte o Percurso de Estudo e Pesquisa, em que ele ocorre.

Segundo ainda o autor (p.103), a concepção, a construção, a realização de cenários de PER apresentam todos os grandes problemas que as pesquisas em didática da matemática, há muito tempo, identificaram. Alguns desses problemas são a devolução (BROUSSEAU, 2004 apud CHEVALLARD, 2009b, p.103) e a institucionalização no momento do estudo. Ele assevera que uma institucionalização não desequilibrada por uma forte preferência disciplinar valoriza outras entidades praxeológicas que participam de diversas “disciplinas” e vão ao encontro com a elaboração, no y, como X, de uma relação, muitas vezes, inédita com vários tipos de objetos, presentes ou não na formação escolar habitual.

A engenharia didática para o uso (e para usuário) só pode existir, de acordo com Chevallard (2009b, p.105), em regra geral, em estreita articulação com a pesquisa. Dito de outra forma, tais produções de tal engenharia didática devem ser olhadas, salvo exceção, como sendo em uma versão "beta" - senão "em versão alpha". No estado de desenvolvimento da pesquisa sobre os PER, Chevallard (2009b) coloca a clínica didática de PER como condição de possibilidade de pesquisa e de engenharia em termos de PER, desenvolvimento marcado pela criação, viabilização e ativação de terrenos clínicos, mediante os quais realizações, observações, experiências podem ser muito bem realizadas, levando em consideração as instituições e as pessoas em causa e atendendo as necessidades de pesquisa de engenharia e necessidades de engenharia a pesquisa.

O QUE FAZER PARA A IMPLEMENTAÇÃO DE UM PER?

Para desenvolver um PER, é preciso estudar as três dimensões de um problema didático: a dimensão epistemológica, da dimensão econômica e a dimensão ecológica. Dimensões de um problema didático

Para Barquero, Bosch e Gascón (2013, p.3), uma pesquisa em Educação Matemática deve se dar a partir da existência de um problema docente que a justifique, problema esse, entendido como aquele de que se depara um professor ao ter que ensinar um tema matemático aos seus alunos.

Segundo esses autores, esse problema é o P0 do esquema heurístico representado por

$\{[(P_0 \oplus P_1) \hookrightarrow P_2] \hookrightarrow P_3\} \hookrightarrow P_\delta$ onde

- P1 é a dimensão epistemológica, P2 a dimensão econômica, P3 a dimensão ecológica e Pδ o problema didático propriamente dito, entendido como aquele que diz respeito ao ensino e à aprendizagem de Matemática. (GASCÓN, 2011, p. 205, BARQUERO, BOSCH E GASCÓN, 2013, p. 2)

- P0 é o possível ponto de partida para uma investigação científica em Didática da Matemática, é a problemática inicial, configurada “de certa forma pré-científica”, também vista como “problema docente”,

- o símbolo $\oplus$ refere-se a sua incompletude, no sentido de que, para estabelecer-se como um problema didático, há necessidade de ter, pelo menos, a dimensão epistemológica P1;

- o símbolo $\hookrightarrow$, não significa inclusão, mas uma hierarquização, no sentido de que a dimensão Pi+1, mesmo que não explicitamente, necessita da dimensão Pi que a precede.

DIMENSÕES EPISTEMOLÓGICA E ECONÔMICA-INSTITUCIONAL DE UM PROBLEMA DIDÁTICO

Para Almouloud (2010, p. 156), a análise epistemológica tem por base o desenvolvimento histórico, permitindo identificar as diferentes formas de concepções de um determinado objeto matemático que poderão favorecer a análise didática.

Para Godino (2003, apud MATTOS, 2017, p.85), para estudar os fatores que afetam os processos de ensino e aprendizagem da matemática, devemos considerar a natureza dos conteúdos e perguntar qual o papel da atividade humana e, sendo assim, a análise epistemológica de objetos matemáticos deve ajudar a esclarecer a natureza desses objetos.

Barquero, Bosch e Gascón (2013) indicam que a dimensão epistemológica se faz importante e presente em todo e qualquer problema didático, pois é nela que buscamos entender:

- amplitude do âmbito matemático para situar nosso problema didático;
- Os tipos de problemas oriundos da problemática;
- As tentativas de abordar e até mesmo solucionar tal problemática;
- Quais as razões de ser desse objeto matemático e da problemática do seu ensino.

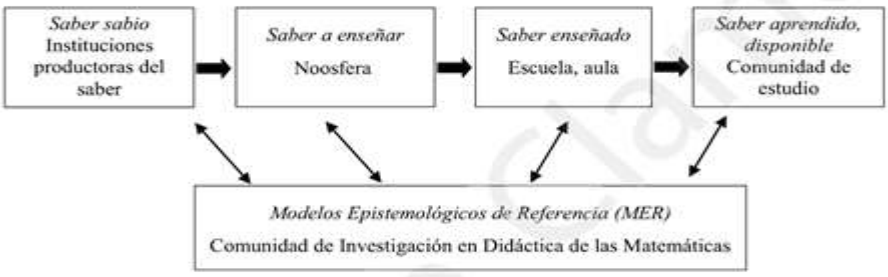


Figura 4: Etapas da transposição didática

Fonte: Gascón (2011, p.2014)

Entendemos que esses aspectos permitem vislumbrar o modelo epistemológico de referência do objeto matemático em estudo (Figura 1)

Além das questões acima tecida, sugerimos apoiar-se nas seguintes questões (adaptada de Barquero, Bosch e Gascón (2013)) para o estudo dessa dimensão:

Q1: Como o objeto matemático em estudo pode ser descrito por meio de um modelo epistemológico de referência (MER) compatível com o modelo epistemológico geral da atividade matemática proposta pelo TAD?

Q2: Quais características diferenciais (em relação àquelas usualmente encontradas na literatura) a TAD atribui às praxeologias relacionadas ao objeto em estudo?

Q3: Qual é a amplitude do campo matemático mais apropriado para planejar o problema didático do objeto em questão? Quais questões e tarefas matemáticas pontuais, áreas da matemática escolar ou matemática escolar, relacionadas com o objeto em estudo considerar?

DIMENSÃO ECONÔMICA

O estudo da dimensão econômica visa a responder à seguinte pergunta: Como as praxeologias se comportam em uma determinada instituição?

Formam parte da dimensão económica as questões relativas às condições que regulam a organização e o funcionamento de tais praxeologias na instituição de referência, ou seja, as questões relativas ao sistema de regras, princípios e leis (normas) que regem a vida institucional da mesma.

Para estudo a dimensão econômica, pode-se apoiar-se nas seguintes questões (adaptada de Barquero, Bosch e Gascón (2013))

Q1: Que âmbito institucional temos que levar em consideração para abordar o problema didático do objeto matemático em estudo: a sala de aula, a escola, o sistema de ensino de matemática, a Sociedade ou a Civilização?

Q2: Como o objeto é descrito e interpretado em cada uma das instituições que intervêm no processo de transposição? Quais tarefas, no sentido da TAD, vivem normalmente nos sistemas educacionais?

Q3: O que se entende nas instituições didáticas para ensinar o objeto matemático? Em particular, como as atividades consideradas no sistema escolar se relacionam com as atividades relacionadas com o objeto em questão e aquelas consideradas como solução matemática de problemas?

DIMENSÃO ECOLÓGICA DE UM PROBLEMA DIDÁTICO

A dimensão econômica-institucional permeia a dimensão ecológica, uma vez que o "nascimento", a "vida" e a possibilidade de "fenecimento" e/ou "ressurgimento", prescindem das condições econômicas.

Isso é destacado por Gascón (2011) e Barquero, Bosch e Gascón (2013), quando dizem que a dimensão ecológica, dentre outros fatores, deve evidenciar:

a) Os âmbitos institucionais considerados;

b) As instituições envolvidas e as maneiras como descrevem e interpretam o objeto pesquisado;

c) As práticas matemáticas existentes nas instituições envolvidas relativas ao objeto pesquisado;

d) Os modelos epistemológicos da matemática envolvida no seio das instituições;

e) As dificuldades que surgem ao se tentar modificar as OD em uma determinada instituição.

Essas evidências permitem, por exemplo, situar, em termos da Didática da Matemática, os *habitat* e *nichos* do objeto matemático investigado no ecossistema de ensino considerado.

Os *habitats* serão os ambientes conceituais nos quais um determinado objeto do saber matemático se encontra e vivencia suas práticas. São os setores de um ecossistema onde os componentes curriculares dão guarida às praxeologias com objetos matemáticos.

Os *nichos*, por sua vez, contemplarão as suas funcionalidades e praxeologias, que se evidenciam pelas práticas que, em relação a um objeto de ensino, se evidenciam em um dado *habitat* de um certo ecossistema, interagindo com os demais *nichos*

DIMENSÃO ECONÔMICA X DIMENSÃO ECOLÓGICA

Para estudar as dimensões económicas e ecológicas da problemática didática, o pesquisador (ou professor) usa inevitavelmente - como referência - um modelo (que pode ser implícito) das praxeologias matemáticas que estão em jogo, isto é, um modelo epistemológico de referência (MER) do campo da atividade matemática em questão.

Quando falamos de modelo epistemológico de referência, referimo-nos a formas de interpretar e descrever um campo conceitual de objeto matemático pertencente a quadro, como, por exemplo, a geometria euclidiana, álgebra escolar, proporcionalidade ou estatística, que é predominante nas instituições escolares, mas também na noosfera e nas instituições que produzem conhecimento matemático. É o instrumento com o qual o didata pode desconstruir e reconstruir as praxeologias cuja divulgação intrainstitucional e interinstitucional pretende analisar.

O MER também é essencial para estudar o conhecimento matemático antes de ser transformado para ser ensinado. Quando a MER é abertamente e explicitamente exposto à crítica e ao contraste empírico, ele constitui um instrumento de emancipação (da didática e ciência didática) no que diz respeito ao modelo epistemológico dominante na instituição (GASCÓN, 2014).

Em coerência com esta MER e com base nela, o formador (ou pesquisador) utiliza (e, eventualmente, constrói) um modelo didático do que significa «aprender» conhecimentos matemáticos do referido campo.

ECOLOGIA DIDÁTICA

A Ecologia Didática, ao tratar de um dado saber, diz respeito aos questionamentos sobre a sua real existência, ou inexistência, ou possibilidades de ressurgir, na instituição onde se instala, ou se instalou, ou seja, sobre como é que ele surge, como se mantém "vivo", como é que deixa de existir, e, nesse caso, se pode voltar a "viver" ali.

A ecologia de uma organização praxeológica associa-se às condições que pesam sobre sua construção e sua "vida", normalizadas tanto nas instituições de ensino como nas de produção, de utilização e/ou transposição de saberes.

Artaud (1998, p. 102-103) identifica quatro tipos de ecossistemas de ensino, segundo o regime epistemológico ao qual é submetido o saber matemático:

- Ecossistema do saber, onde se produz a matemática;
- Ecossistema didático escolar, onde se estuda a matemática;
- Ecossistema profissional, utilizador da matemática para concretizar algumas tarefas;

Ecossistema noosferiano, onde a matemática é manipulada para fins de transposição.

Referencias

Artaud, M. (1998). ***Introduction à l'approche écologique du didactique*** – L'écologie des organisations mathématiques et didactiques. Actes de la *IXième* École d'été de Didactique des Mathématiques. Caen: ARDM&IUFM. pp. 101-139

Barquero, B., Bosch, M. y Gascón, J. (2010). Ecología de la Modelización Matemática: los Recorridos de Estudio e Investigación - III International Conference on the Anthropological Theory of the Didactic.

Barquero, B., Bosch, M. y Gascón, J. (2013). Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática. Educação Matemática e Pesquisa, São Paulo, v.15, n.1, pp.1-28.

Bosch, M., Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude e problématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage, Grenoble, 1999, v.19, n°1, p.77-124.

Bosch, M., Fonseca, C.y Gascón, J.(2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales em las instituciones escolares. In: *Recherches em Didactique des Mathématiques.* Grenoble, França: La Pensée Sauvage, p. 205-250. v. 24/2.3.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage, Grenoble, v. 12.1, p.73-112.

Chevallard, Y. (1999). L´analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactiqu**e.** *Recherches en Didactique des Mathématiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage-Éditions.v. 19.2, p.221-265.

Chevallard, Y. (2002a). Organiser l´étude. 1. Structures & Fonctions. *Actes de la 11 École d´Été de Didactique des Mathématiques. France*: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y.(2002b). Organiser l´étude. 3. Ecologie & régulation. *Actes de la 11 École d´Été de Didactique des Mathématiques. France*: La Pensée Sauvage. p. 41-55.

Chevallard, Y.(2009a) La notion de PER : problèmes et avancées, 2009a, (*in* http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/La_notion_de_PER_problems_et_avancees.pdf , acesssado em 10/03/2018)

Chevallard, Y. (2009b). La notion d´ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponses à partir de la TAD. in Margolinas et all.(org.) : En amont et en aval des ingénieries didactiques, XVª École d´Été de Didactique des Mathématiques – Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme). Recherches em Didactique des Mathématiques. Grenoble : La Pensée Sauvage, v. 1, p.81-108, 2009b.

Gascón, J. (2014). Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica, 2014.

Gascón, J. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico: El caso del álgebra elemental. Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa, pp. 203-231, 2011

Volver al índice de autores

4.1.2. Sistemas de Equações Lineares: organização matemática local (conferencia especial)

Dra. Maria José Ferreira da Silva
Pontificia Universidad Católica de São Paulo, Brasil

Resumen

O presente artigo é um dos resultados de um projeto de pesquisa conjunto entre os grupos PEA-MAT e DIMAT, respectivamente, da PUC-SP e PUCP que tem como objetivo apresentar duas organizações matemáticas locais relacionadas ao ensino de sistemas de equações lineares. O referencial teórico é a Teoria Antropológica do Didático de Chevallard e a motivação para tal estudo foi a constatação de que tanto os professores que participaram da formação continuada no âmbito desse projeto, quanto os livros textos dos dois países privilegiarem o saber-fazer desse conteúdo sem explicitar suas justificativas. Apresentamos aqui duas praxeologias locais partindo de duas tarefas e de técnicas possíveis de resolvê-las, as justificando por meio de um discurso tecnológico-teórico, em geral, ausente no ensino de tal conteúdo.

Introdução

No âmbito do projeto Processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática em Ambientes Tecnológicos, desenvolvido de forma colaborativa pelos grupos de pesquisa PEA-MAT, da PUC-SP e DIMAT do *Instituto de Investigación para la Enseñanza de las Matemáticas* (IREM) da PUC-Peru, um dos temas era investigar o ensino e a aprendizagem da álgebra escolar. Um objetivo era apoiar professores na organização de conteúdos em diferentes pontos de vista e ressaltar o desenvolvimento de sequências didáticas que favorecesse uma rotina de aula produtiva. Com esse propósito, entre outros, realizamos formações continuadas no Brasil e no Peru com professores de Matemática do Ensino Básico.

A primeira, realizada em São Paulo, tinha como objetivo discutir, de forma colaborativa, questões do ensino de álgebra escolar. Depois de alguns encontros e discussões gerais os professores começaram a focar em Sistemas de Equações Lineares. As principais questões eram referentes às técnicas de resolução e as dificuldades dos alunos. No entanto, quando questionados a respeito de como justificavam as técnicas para os alunos, não souberam

explica-las e perceberam que conheciam diferentes técnicas, mas não as justificavam, nem para si, nem para os alunos. Dessa forma, conduzimos a formação com os professores peruanos focando nesse tema e, da mesma forma, as justificativas não ocorreram completamente. Depois do tema ser escolhido em São Paulo fizemos uma revisão bibliográfica (Gaita e Silva, 2018, no prelo) e notamos que esse conteúdo tem sido muito estudado por vários pesquisadores que, em grande parte se preocuparam ou com as dificuldades apresentadas pelos alunos ou em aplicar uma sequência com o objetivo de sanar tais dificuldades. É raro encontrar trabalhos que questionem o currículo ou os conhecimentos dos professores para ensinar.

Baseando-nos na Teoria Antropológica do Didático buscamos nessas formações que os professores desenvolvessem um discurso tecnológico-teórico para as técnicas de resolução que apresentavam, isto ocorreu parcialmente nos dois casos, pois alguns professores já haviam desenvolvido suas próprias formas de lidar com o tema em sala de aula, ou seja, já tinham hábitos difíceis de serem reformulados. Assim, neste artigo, temos como objetivo fazer uma reflexão a respeito de possíveis justificativas para algumas técnicas utilizadas pelos professores em tal formação sob o ponto de vista de organizações matemáticas locais. Com esse intuito apresentaremos, no que segue, o referencial teórico que embasou a formação e, em seguida, estudaremos, a partir de um problema, diferentes soluções apresentadas pelos professores organizados matematicamente.

Referencial teórico

Para Chevallard (1999) o saber matemático organiza uma forma particular de conhecimento. O conhecimento e o saber, entendido como certa forma de organizar conhecimentos, entram em jogo com a noção de relação, pois um objeto existe se um sujeito ou uma instituição o reconhece. A noção de "relação" trata então das práticas sociais que se realizam em uma instituição e que envolvem o objeto em questão. Assim, a existência de um objeto depende do reconhecimento e do relacionamento de, pelo menos, uma pessoa ou instituição com esse objeto.

De acordo com Almouloud (2015) a Teoria Antropológica do Didático – TAD – estuda condições, possibilidades e funcionamento de sistemas didáticos, ou seja, das relações entre sujeito, instituição e saber. Em outras palavras a TAD estuda o homem frente a situações matemáticas, ou melhor, ao saber matemático. Para Chevallard (1999) sua teoria é "antropológica" porque situa a atividade matemática e o estudo de matemática no conjunto

de atividades humanas e de instituições sociais. Uma das primeiras contribuições da TAD, segundo Bosch e Gascón (2002, p. 6), foi "evidenciar que não é possível interpretar de maneira adequada os fenômenos didáticos sem considerar a relatividade institucional da atividade matemática".

Na TAD, segundo Chevallard (1999), um saber refere-se a uma organização ou praxeologia que funciona como uma máquina de produção de conhecimento, na qual as noções de tipos de tarefa, de técnica (maneira de fazer), de tecnologia (justificativa para a técnica) e teoria (saberes científicos que justificam a tecnologia) permitem modelizar as práticas sociais, em particular, a atividade matemática. Dessa forma, para existir em uma instituição, qualquer técnica deve ser compreensível, legível e justificada, ou seja, é necessário existir um discurso descritivo e justificativo das tarefas e técnicas (tecnologia). Mas, por sua vez, esta tecnologia também precisa de uma justificativa que se dá no âmbito da teoria. Uma praxeologias será considerada pontual se uma determinada técnica resolve um conjunto de tipos de tarefas; será considerada local se agrupa várias praxeologias pontuais em torno de uma mesma tecnologia e será regional quando agrupa várias organizações locais com a mesma teoria justificando as tecnologias associadas.

Para o autor é a instituição que caracteriza um problema que deve ser resolvido, por exemplo a necessidade de reconstruir tarefas e, no caso da sala de aula, caracteriza uma questão didática. O autor distingue então dois tipos de praxeologias ou organizações a matemática, que corresponde à realidade matemática que se pode construir para uma sala de aula e a didática que corresponde à maneira de se construir essa organização matemática. No caso dos sistemas de equações lineares, como objeto de ensino, encontramos diferentes técnicas de resolução e diferentes alcances, algumas extremamente custosas para sistemas com um número maior de equações. No ensino básico o discurso tecnológico-teórico está nas equações e sistemas equivalentes que nem sempre são explicitados durante o ensino das técnicas. Em termos de teoria esse discurso seria justificado no estudo de definições e propriedades dos polinômios.

Para Chevallard (1999) é necessário examinar os diferentes espaços em que o objeto matemático e os saberes associados a ele são encontrados, ou seja, seus *habitats*. Para isso introduz a noção de ecologia de uma praxeologia para referir-se às condições de sua construção e vida nas instituições que a produz, utiliza ou transpõe apoiando-se em ideias da ecologia biológica para explicar as relações entre objetos matemáticos no estudo de um

objeto matemático específico. Assim, a ecologia didática dos objetos matemáticos se apresenta como um meio de questionamento da existência de tais objetos na instituição, ou seja, o que existe ou não existe e por quê? E, ainda se poderia existir e em que condições. Enfim, permite evidenciar e analisar as estruturas ecológicas dos objetos matemáticos, suas relações hierárquicas. No caso dos sistemas de equações lineares poderíamos perguntar: que saberes os alimentam, que outros objetos matemáticos se relacionam com eles? Qual a função do ensino de sistemas de equações lineares? Seria a resolução de problemas?

Não pretendemos responder tais questões neste momento, por falta de espaço para todas as discussões necessárias, mas as iniciaremos apresentando duas praxeologias locais no sentido de focar seu discurso tecnológico-teórico que, como evidencia Gaita e Silva (2018, no prelo) não aparecem nos livros textos utilizados, tanto no Brasil, quanto no Perú. Faremos tal análise a partir de dois problemas, discutidos nas formações de professores desenvolvidas nos dois países, que envolvem o saber-fazer aritmético e algébrico. Os resultados aqui apresentados referem-se às duas formações e não os identificaremos especificamente porque foram semelhantes, embora os professores peruanos tivessem arriscado mais no discurso tecnológico teórico.

Análise do primeiro problema

Com o objetivo de explicitar uma organização matemática local iniciaremos com um problema que envolve equação retirado de Bolea (2002, p. 173): ***Encontrar três números cuja soma seja 164, tais que o segundo supera o primeiro em 14 e que o terceiro seja a soma dos dois primeiros. Resolva aritmeticamente.***

A partir do tipo de tarefa: determinar aritmeticamente um valor desconhecido, os professores, em sua maioria do Ensino Fundamental II (Secundaria), resolveram primeiro algebricamente. Solicitados a resolverem aritmeticamente permaneceram em silêncio, mas depois de algum tempo, um professor apresentou a solução e, os outros, influenciados pela solução algébrica, feita inicialmente, começaram a discutir. A primeira solução coincide com a solução apresentada por Bolea (2002, p.173), que caracteriza as soluções aritméticas por meio de um discurso: o *segundo número é igual ao primeiro aumentado de 14. O terceiro número, sendo a somo dos outros dois, vale o primeiro mais o primeiro aumentado de 14, quer dizer, duas vezes o primeiro mais 14. A soma 164 refere-se então em quatro vezes o primeiro aumentado em 28. Se tirarmos 28 de 164, o resto, 136, será o quádruplo do primeiro número. Portanto, o primeiro número é 34 e, portanto, o segundo número é*

34 mais 14 ou 48 e o terceiro a soma de 34 e 48, quer dizer, 82. Essa técnica aritmética, que, de acordo com a autora o aluno deveria aprender a dominar, se caracteriza por uma técnica oral que destaca o papel funcional do cálculo mental nas operações aritméticas, que podem, eventualmente, ser registradas no sentido de não perder a condução do raciocínio: $164 - 28 = 136$ e $136 \div 4 = 34; 34 + 14 = 48; 34 + 48 = 82.$

Uma segunda resolução aritmética foi apresentada, por outro professor: *se o terceiro representa a soma dos dois primeiros, podemos dizer que esse número é a metade de 164, e a soma do primeiro com o segundo representam a outra metade. Então o terceiro número é 82. Retirando 14 de 82 obtemos 68 que representa duas vezes o primeiro número. Logo, sessenta e oito dividido por dois, resulta em 34 e podemos concluir que esse é o primeiro número. O segundo número seria então trinta e quatro mais catorze que resulta em 48 e o terceiro 82 que é a soma dos dois.* O registro dos cálculos seria: $164 \div 2 = 82; 82 - 14 = 68;\ \ 68 \div 2 = 34;\ \ 34 + 14 = 48$ que, sem o discurso, pode tornar-se incompreensível.

Na terceira solução apresentada, como mostra a figura 1, o professor apresentou as operações que realizou explicando-as. Esta solução teve que ser explicada várias vezes para os outros professores, pois não entendiam o caminho escolhido pelo colega, colocamos entre parênteses o discurso que o professor utilizou para explicar sua técnica.



Figura 1: Terceira resolução aritmética apresentada

Primeiro, retirou 14 de 164 (porque o segundo número é maior que o primeiro em 14), dividiu o resultado por 3 (pois o terceiro é a soma dos dois primeiros) resultando em 50. Retirou então 14 de 50 (porque o segundo número é maior que o primeiro em 14) obtendo

36, que é o primeiro número. Considerou então que o primeiro número era, 36, o segundo 50 e o terceiro a soma dos dois, 86. Mas, como a soma desses três números resulta em 172 (oito a mais que 164) considerou que a cada metade deveria ser retirado 4 (o primeiro e o segundo número, representam uma metade do valor total e o terceiro a outra metade). Ou seja, o primeiro número é $36 - 2 = 34$ e, o segundo número, é $50 - 2 = 48$.

Assim, apresentamos uma tarefa do tipo "determinar um valor desconhecido aritmeticamente" a partir de um problema que conduziu a três técnicas aritméticas diferentes para sua solução que foram associadas a uma explicação (tecnologia) e que poderia ser justificada pelas propriedades das operações aritméticas (teoria). Com isso temos uma praxeologia local constituída por três praxeologias pontuais, pois apresentamos três técnicas que podem ser justificadas pelo mesmo discurso tecnológico teórico, as propriedades das operações aritméticas.

Agora, trataremos o mesmo problema do ponto de vista algébrico que, durante a formação, foi resolvido pelos professores sem problemas, mas cuja técnica não foi justificada por eles. Apresentaremos a discussão da resolução algébrica desse problema dada por Chevallard e discutido por Bolea (2002) quando diz que esse tipo de resolução deve vir para mostrar que o emprego de símbolos torna mais fácil a solução, pois o método aritmético é amplo e pode ser penoso em alguns casos. Acrescenta, que o emprego de signos para indicar as operações a serem feitas pode simplificar consideravelmente a solução e mostrar que "a álgebra proporciona outros instrumentos de pensamento e de ação (p.174)". Assim, considerou a separação com o signo + das quantidades que serão somadas, a separação pelo signo = para as igualdades e a representação do primeiro número pela letra *x*, obtendo então que:

primeiro número: x

segundo número: $x + 14$

terceiro número: $x + x + 14$

e, portanto, $x + x + 14 + x + x + 14 = 164$ ou $4x + 28 = 164$.

Subtraindo 28 aos dois membros da igualdade se obtém: $4x = 136$. De onde vem que $x = 136 \div 4 = 34$; $x + 14 = 48$ e $x + x + 14 = 82$.

Se encontra aqui uma técnica, muito familiar, com suas etapas: escolher a incógnita principal, *x*; expressar as outras incógnitas com a ajuda de *x*; escrever a equação; resolver a equação em *x* e calcular os valores das outras incógnitas. (Bolea, 2002, p. 174).

No entanto, o discurso tecnológico-teórico que justifica essa técnica está na definição dada para equação polinomial e suas propriedades. Escolhemos buscar tal discurso em um livro para a segunda série do ginásio (atual 7º ano do Ensino Fundamental, 12 anos) do final da década de 50. Sangiorgi (1959, p. 115-116) depois de apresentar um capítulo dedicado ao estudo do cálculo literal e de polinômios define igualdade algébrica como sendo "um conjunto de duas expressões algébricas ligadas pelo sinal de =". A identidade como "a igualdade que se verifica para qualquer valor atribuído às letras que nela figuram". A equação como "a igualdade que se verifica somente para alguns valores particulares atribuídos a todas ou algumas letras que nela figuram". Mais à frente, define que duas ou mais equações, que tem o mesmo número de raízes, dizem-se equivalentes, quando as suas raízes têm os mesmos valores" e passa a tratar a resolução de equações de primeiro grau com uma incógnita "resolver uma equação significa determinar as suas soluções, caso existam, ou verificar a sua impossibilidade. Para este fim empregamos certos princípios, denominados princípios de equivalência, que permitem transformar a equação dada em uma equação equivalente de resolução imediata." (Sangiorgi, 1959, p. 117).

Na sequência, apresenta esses princípios, seguidos de exemplos. "Primeiro princípio: somando-se ou subtraindo-se aos membros de uma equação, uma mesma expressão, obtém-se uma equação equivalente à equação dada (p. 118)." "Segundo princípio: multiplicando-se ou dividindo-se os membros de uma equação por uma mesma expressão diferente de zero e que não contenha a incógnita, obtém-se uma equação equivalente à equação dada (p. 119)." Para cada um dos princípios apresenta um exemplo resolvido justificando cada passagem para a obtenção de equações equivalentes e as consequências dos princípios como, por exemplo: "pode-se passar (ou transpor) um ou vários termos de um membro para outro de uma equação desde que se troquem os seus sinais" (p.118). Nos parece que esta consequência como regra é o que predomina hoje no ensino e não o princípio de equivalência. Na página 125 o autor apresenta o que chama de *discussão de uma equação do primeiro grau com uma incógnita* afirmando que "discutir uma equação é verificar se ela tem ou não solução, isto é, se é possível ou não a sua resolução", apresenta então uma equação do primeiro grau em sua forma reduzida "$ax = b$ onde a (coeficiente da incógnita) e b (termo conhecido) são dois números." O autor evidencia tal discussão a partir

de três hipóteses: $a \neq 0$ e nesse caso $x = \frac{b}{a}$ e a equação é possível e determinada; $a = 0\ e\ b \neq 0$ e agora a equação se reduz a $0 \cdot x = b$ o que implica que a equação não tem solução, é impossível; $a = 0\ e\ b = 0$ que conduz à equação $0 \cdot x = 0$ que caracteriza uma identidade, "qualquer número atribuído a *x* pode verifica-la".

No entanto, para Bolea (2002) essa técnica também não é perfeita, pois o resultado é isolado e não revela nada a respeito de sua origem, pois os dados desaparecem enquanto se busca o valor da incógnita o que obriga a recomeçar o mesmo raciocínio para resolver outro problema semelhante em que apenas os números são alterados.

Para Bolea (2002) a contribuição da álgebra vai além, quando introduzimos parâmetros, porque estes possibilitam a generalização do problema e de sua solução. Afirma que, segundo Chevallard, esse problema, com o uso de parâmetros, passa a ser enunciado da seguinte forma: e***ncontrar três números cuja soma seja S, tais que o segundo supera o primeiro em a e que o terceiro seja a soma dos dois primeiros.***

Apresentamos tal problema aos professores em formação que rapidamente chegaram à expressão $x = \frac{S-2a}{4}$ e de imediato afirmaram que o valor de *x* deveria ser um número múltiplo de 4 e, ainda, que *S* deveria ser maior que *2a*. Mas, solicitados à apresentar um discurso tecnológico-teórico que justificasse a técnica escolhida as discussões não avançaram e não perceberam que a técnica foi a mesma utilizada quando o problema apresentava números. Para a autora esse resultado mostra que o primeiro número é igual a quarta parte do excesso da soma com o dobro da diferença dos dois primeiros números e esse resultado permite resolver todos os problemas que só se diferenciam pelo valor numérico de seus dados. Para a autora a utilização de parâmetros permite trabalhar números conhecidos como se fossem desconhecidos e dá à álgebra elementar um pleno alcance porque manifesta a função das expressões algébricas.

Na discussão com os professores ficou claro que trabalhamos com os alunos apenas a resolução dos problemas isoladamente, sem a utilização de parâmetros nem discussões ou justificativas para as técnicas utilizadas, pois estas são apenas apresentadas.

Análise do segundo problema

O segundo problema envolve sistemas de equações lineares, também discutido com os professores, que para sua solução apresentaram todas as técnicas possíveis, mas nenhum discurso tecnológico teórico. Explicitaremos tal discurso apenas para duas técnicas utilizadas, no sentido de exemplificar o que seria uma praxeologias local. O problema é o seguinte, em sua versão em espanhol: **Diego ahorró S/. 15 en monedas de 2 y 1 soles. Si en total son 9 monedas, ¿cuántas monedas de cada denominación tiene Diego?**

Os professores apresentaram suas soluções no quadro negro e a primeira técnica foi chamada de método da igualdade, como mostra a figura 2.

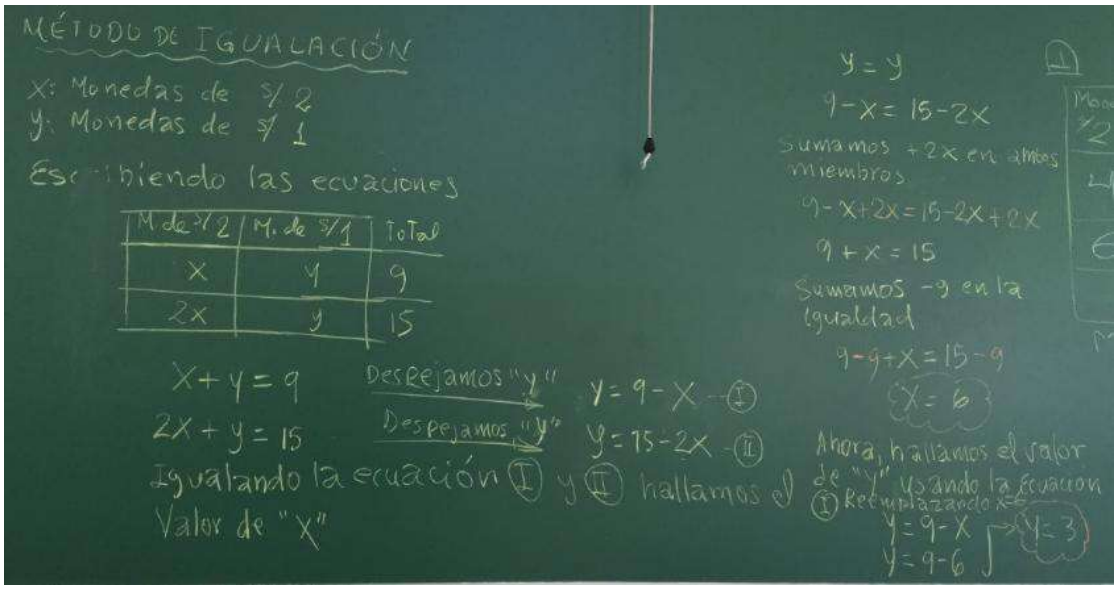


Figura 2: Resolução de sistema de equações lineares pelo método da igualdade

A técnica consiste em chamar de *x* a quantidade de moedas de 2 soles e de *y* a quantidade de moedas de 1 sol representando então o contexto do problema por um sistema de equações lineares em que a primeira é $x + y = 9$ e a segunda $2x + y = 15$ que é apresentada pelo professor sem a chave inicial que caracterizaria a relação de simultaneidade entre as duas igualdades.

A seguir, foi isolado o valor de *y*, em ambas as equações, para que fosse possível trabalhar com a seguinte igualdade: $9 - x = 15 - 2x$. A partir da resolução dessa equação encontra-se o valor de $x = 6$ que possibilita encontrar o valor $y = 3$. Podemos perceber

na resolução apresentada na figura 2, um esboço de tecnologia quando o professor, por exemplo, escreve "despejamos "y"" ou "isolamos y" para justificar a igualdade que ele apresenta como "y=y" e o método escolhido.

Além disso, explica os passos da resolução da equação obtida quando escreve "sumamos +2x a los dos miembros"; "sumamos -9 em la igualdad" e "ahora, hallamos el valor de "y" usando la ecuacion I reemplazando x=6", mas não voltou ao problema para responde-lo. Tal técnica, conhecida como método da igualdade, foi explicada pelo professor sem referência alguma à equivalência de equações ou de sistemas de equações lineares.

A segunda técnica é conhecida como método de substituição e a solução apresentada por outro professor está na figura 3. Na apresentação de sua solução o professor não explicita o que será representado por A ou B, mas entendemos que A representa as moedas de 2 soles e B as de 1 sol. Depois de apresentar as duas equações $2A + B = 15$ e $A + B = 9$, o professor isola B na segunda equação e escreve $B = 9 - A$.

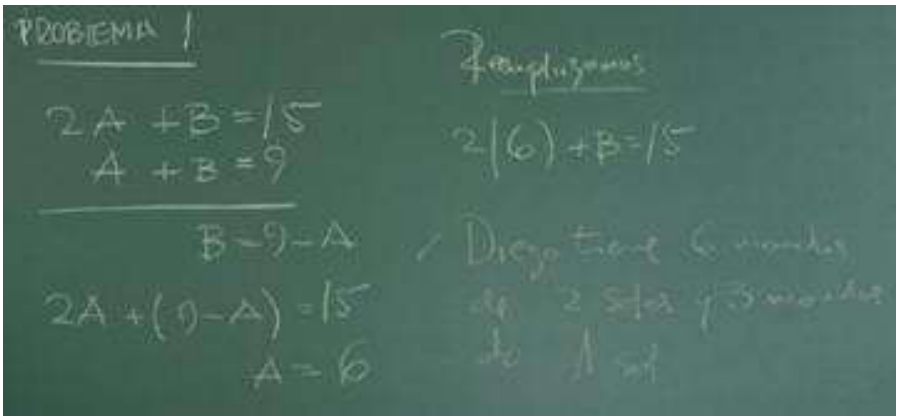


Figura 3: Solução de um sistema de equações lineares pelo método de substituição

Imediatamente substitui o valor de B na primeira equação e encontra que $A = 6$. A seguir, escreve "reemplazamos" ou "substituímos" e escreve: $2(6) + B = 15$ e logo apresenta a resposta do problema: Diego tem 6 moedas de 2 soles e 3 moedas de 1 sol.

Questionados a respeito da justificativa que poderiam dar para o método não souberam explicitar. Um discurso simples, tecnologia, que poderia justificar tal técnica poderia ser: isolo B na segunda equação para substituir na primeira equação porque isso me dá uma

equação equivalente, que me permite determinar o valor de B. Tendo este valor volto na equação e substituo este valor para encontrar o valor de A.

O discurso teórico está na definição que se dá para sistemas de equações lineares e suas propriedades. Ainda em Sangiorgi (1959) encontramos o discurso necessário para justificar teoricamente as duas técnicas apresentadas. O autor inicia o tópico *sistemas lineares com duas incógnitas* definindo uma equação desse tipo: "as equações do primeiro grau com duas incógnitas são aquelas que apresentam: um termo do primeiro grau em uma das incógnitas, um termo do primeiro grau na outra incógnita e um termo conhecido (p. 140)." A seguir afirma que:

duas ou mais equações são simultâneas ou formam um sistema quando se verificam para um mesmo conjunto de valores de suas incógnitas. Se as equações que compõem o sistema são do primeiro grau, diz-se que o sistema é linear. Chama-se solução de um sistema o conjunto de valores das incógnitas que satisfazem as equações do sistema. (p. 141)."

Imediatamente define sistemas equivalentes como sendo aqueles "que admitem a mesma solução" e expressa a "forma geral para um sistema linear de duas equações com duas incógnitas: $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ onde *a*, *b*, *a´*, *b´* são, respectivamente, os coeficientes das incógnitas *x* e *y*, e, *c* e *c´* os termos conhecidos (p. 142)." Em continuação discute a resolução de um sistema linear com duas incógnitas e descreve o método da substituição, o da adição e o da comparação. No entanto não explicita as operações necessárias para a obtenção de sistemas equivalentes e, com isso, justificar os métodos adotados. Essas operações elementares nos permitem permutar duas equações do sistema, multiplicar uma equação por um número real diferente de zero, substituir uma equação pela soma dessa equação com outra multiplicada por um número real diferente de zero com outra equação ou ainda eliminar uma equação que seja proporcional ou combinação linear de outra.

Assim, apresentamos duas praxeologias pontuais para um problema que envolvia a solução de um sistema de duas equações lineares com duas incógnitas que foi resolvido por duas técnicas diferentes, justificadas pelo mesmo discurso tecnológico teórico que caracteriza então parte de uma praxeologias local, porque esse mesmo discurso poderia justificar outras técnicas.

Considerações finais

O tema sistemas de equações lineares está no currículo para o Ensino Básico, no entanto, a ênfase é dada apenas ao bloco do saber-fazer, isto é, às suas técnicas de resolução. As justificativas que validam tais técnicas, bem como seu alcance estão ausentes. Algumas delas têm um alcance muito restrito, como é o caso da resolução gráfica que só atende a sistemas com duas equações e duas incógnitas. Por outro lado, os problemas são apresentados apenas para que essas técnicas sejam memorizadas e não efetivamente como situações problemáticas que permitam mobilizar os sistemas como um caminho de resolução. Muitas vezes, resolvido o sistema não se volta ao contexto do problema para constatar que efetivamente esta é sua solução. Assim, o bloco composto de tarefa e técnica são trabalhados, mas o bloco do saber composto de tecnologia e teoria não e, ainda, a razão de ser desse conteúdo no ensino que, geralmente, é associada à resolução de problemas também não ocorre. Necessitamos de problemas melhor elaborados para esse fim. Tratamos aqui apenas de duas técnicas, no entanto há muitas outras que estão presentes nos conhecimentos dos professores que necessitam um estudo mais aprofundado. É necessário, segundo a TAD que sejam justificadas teoricamente o que implicaria um discurso tecnológico teórico acessível a esse nível de ensino, bem como relacioná-lo com a teoria dos polinômios que, em geral, é vista no ensino superior para formação de professores.

Referências

Almouloud, S. A. (2015). Teoria Antropológica do Didático: metodologia de análise de materiais didáticos. *UNION – Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 42, 09-34.*

Bolea, P. (2002). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares.* Tese de doutorado, Facultad de Ciencias, Universidad de Zaragoza, Espanha.

Bosch, M. & Gascón, J. (2002). Organiser l´étude 2. Théories & empiries. In Dorier, J.L., Artaud, M., Artigue, M., Berthelot, R., Floris, R. (eds). *Actes de la 11e École d´Été de Didactique des Mathématiques*, Grenoble: La Pensée Sauvage, 23-40.

Chevallard, Y. (1999). L´analyse des pratiques enseignantes em Théorie Anthropologique du Didactique. *Recherches em Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.

Gaita, C. e Silva, M. J. F. (2018). Perspectivas em Didática e Álgebra. Em *Educação Matemática: epistemologia, didática e tecnologia*. Capítulo 4, São Paulo, Brasil (no prelo).

Sangiorgi, O. (1959). Matemática para a segunda série ginasial. São Paulo: Companhia Editora Nacional.

Volver al índice de autores

4.1.3. El algoritmo de la división en la enseñanza de la aritmética elemental (conferencia especial)

Mg. Teodulo Isaias Verástegui Chuquillanqui
Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú

Resumen

El algoritmo de la división, como herramienta de trabajo y recurso didáctico hacia el logro de aprendizajes significativos y relevantes en los estudiantes y en el proceso del desarrollo de conocimientos, tiene aplicaciones en la estructuración y enseñanza de la aritmética elemental: La representación polinomial de los números naturales, el cálculo del máximo común divisor de números enteros, la representación decimal de números fraccionarios, etc.

Por ello, el docente de matemáticas para los niveles iniciales de la educación básica debe conocer, con amplitud y profundidad, el proceso de su estructuración y de su utilidad o aplicaciones, iniciado en el desarrollo de la división como caso particualr de la sustracción y con aplicaciones de actividades heurísticas, orientadas al proceso del redecubrimiento con aplicaciones de conceptos y propiedades previas.

Teniendo el conjunto $\mathbb{N}$, en el contexto de la teoría de conjuntos y con representación de sus elementos por numerales, siguen las operaciones básicas y el planteamiento y solución de ecuaciones en $\mathbb{N}$ con aplicaciones de propiedades, llegando a la división con residuo como formalización de procesos de repartir objetos en cantidades iguales, que conduce a la formulación del Algoritmo de la División y se completa con aplicaciones a los cálculos del mayor divisor común y menor múltiplo común de dos números y a la expresión decimal de una fracción de números en $\mathbb{N}$, presentando propiedades claves con ilustraciones de casos particulares.

***El proceso heurístico*:**

El algoritmo de la división, como herramienta de trabajo y como recurso didáctico, tiene aplicaciones diversas en la enseñanza de la aritmética elemental. De este algoritmo resultan la representación polinomial de los números naturales en distintas bases, la división como

caso particular de la sustracción, los criterios de divisibilidad, el cálculo del máximo divisor común de números enteros,la representación decimal de números fraccionarios, etc.

Lo anterior motiva que el docente de matemáticas tenga suficiente formación en temas que incluya el estudio del algoritmo de la división y sus diversas aplicaciones, para disponer de un recurso didáctico infalible: Conocer bien lo que tiene que enseñar para el logro de aprendizajes significativos (y relevantes) en sus estudiantes.

En la enseñanza y aprendizaje de la matemática, deben realizarse actividades mentales y prácticas: Resolver problemas, analizar y demostrar teoremas, realizar construcciones geométricas, etc. en forma planificada y adecuada respecto al esfuerzo y al tiempo disponible, usando medios auxiliares o siguiendo el proceso heurístico del pensamiento lógico-matemático.

La heurística o eurística, con la realización de ciertas actividades orientadas al proceso de redecubrimiento, al estudiante le facilita hallar, descubrir, inventar y aplicar concep-tos y propiedades, con suficientes informaciones previas, para resolver problemas por analogía o semejanza, por reducción, por generalización, por modelación, por induc-ción, etc. considerando los procesos o método progresivo–regresivo.

2. *Los números naturales y su representación por numerales*:

El desarrollo de la matemática en los primeros grados está centrado en el estudio de los números naturales (aritmética) y en el uso de figuras (geometría), adquiriendo destrezas en los cálculos numéricos, comparando y operando con números en formas escrita u oral, realizando mediciones con aproximaciones, indagando formas de solución y verifi-cando resultados. Su punto de partida es el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, que se inicia antes de la escuela, continuando con los conjuntos de los números racionales no negativos $\mathbb{Q}_0^+$ y los números enteros $\mathbb{Z}$, para completar con los conjuntos de los números reales y complejos, según el desarrollo histórico.

El concepto de número resulta de la cantidad de elementos o cardinal de conjuntos finitos, por la relación de equipotencia, partiendo de conjuntos unitarios y del conjunto vacío, que definen 1 y 0, respectivamente, y se define el sucesor *s* de un número *n* es el cardinal de un conjunto que resulta de adicionar un elemento al conjunto que define *n* y se denota s(*n*), es una función inyectiva, donde *s*(0) = 1, *s*(1) = 2, *s*(2) = 3, etc.

Luego, definidas las operaciones de adición y multiplicación y el oden en ℕ con sus propiedades básicas, resulta $s(n) = n + 1$, $n < s(n)$ y $0 \leq n$, $\forall\, n$ en ℕ. Se completa que el conjunto ℕ es bien ordenado.

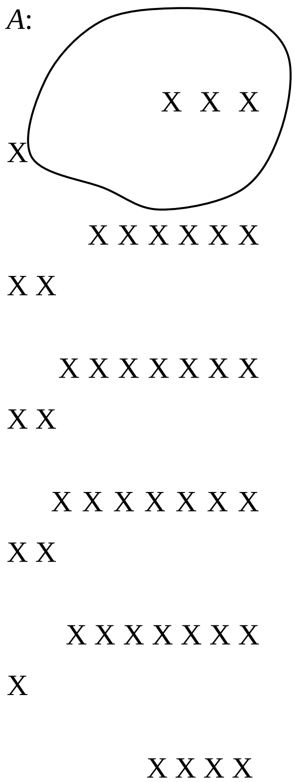
Dado un conjuto finito *A*, ¿qué significa decir que *A* tiene *n* elementos o que *A* define el número que se denota o representa por *n* o cuyo numeral es *n*? o simplemente y si no hay confusión, ¿qué es el número *n*?.

Asi, si *A* es el conjunto del diagrama, ¿cuántos elementos hay?.

Para esto, agrupando o contando de 10 en 10, resulta 4 grupos de 10 elementos cada uno y quedan 2 elementos sin agrupar, es decir, en base 10 hay $4{\times}10 + 2 = 40 + 2 = 42$ elementos.

¿Cómo se representa el cardinal de *A* agrupando de 5 en 5?

A:



En el desarrollo, se consideraron la descomposición polinomial de los números, las propiedades asociativa y comutativa de la adición, las propiedades distributiva de la multiplicación respecto a la adición y la propiedad de neutralidad de 1 para la multiplicación, entre otras, dentro del proceso de reestructuración del conjunto ℕ.

3. *La división en* ℕ *y el algoritmo de la división:*

La división como una operación, cuyo resultado depende de la multiplicación, se trata también por la sustracción con el cálculo de diferencias, que responde a la acción de dividir,

repartir, agrupar una cantidad de objetos en partes con igual cantidad de elementos, sobrando o no una cantidad de objetos que no es posible repartir entre todas las partes, es decir, hay o no un resto o residuo.

a) Al repartir 96 juguetes entre un grupo de 12 niños, correspondiendo a cada uno la misma cantidad de jeguetes, ¿cuántos juguetes recibirá cada niño?

Se trata de dividir o repartir 96 entre 12, y se obtiene el cociente denotado por q y cumple $12 \times q = 96$. De la multiplicación se sabe que $12 \times 8 = 96$ y se tiene $96 \div 12 = 8$ o $\frac{96}{12} = 8$, que responde a la acción de entregar a cada niño $q = 8$ juguetes.

Otra forma de repartir, más empírica y natural, es entregar a cada uno un juguete, quedando $96 - 12 = 84$ para repetir el proceso, quedando $84 - 12 = 72$ para otra vuelta, y se continúa: $72 - 12 = 60$, $60 - 12 = 48$, $48 - 12 = 36$, $36 - 12 = 24$, $24 - 12 = 12$ y $12 - 12 = 0$ y nada sobra. De esto, en 8 vueltas o en 8 diferencias se termina la repartición, por lo que a cada niño le corresponde 8 juguetes: $96 \div 12 = 8$.

b) ¿Cómo expresar 60 dias calendarios en semanas?

Una semana tiene 7 dias y, de los 60 días, al considerar la semana 1 quedan $60 - 7 = 53$ dias, considerada la semana 2 quedan $53 - 7 = 46$ dias, continuando las diferen-cias $46 - 7 = 39$, $39 - 7 = 32$, $32 - 7 = 25$, $25 - 7 = 18$, $18 - 7 = 11$, $11 - 7 = 4$ y $4 - 7$ no existe en $\mathbb{N}$. De esto, la cantidad de diferencias efectuadas indican la cantidad de semanas que hay en 60 dias. En este caso son 8 semanas y, como la última diferencia es 4, sobran 4 días; es decir, en 60 días hay 8 semanas y 4 días.

Propiedad* 1**: El ***Algoritmo de la división en $\mathbb{N}$, establece que:

Para a y b en $\mathbb{N}$, con $b \neq 0$, existen únicos números q y r en $\mathbb{N}$ tales que $a = b \times q + r$, donde $0 \leq r < b$; que también se expresa $\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}$, donde $0 \leq r < b$; y se dice que "q es el cociente y r es el residuo de dividir a entre b".

Cuando $r = 0$, es decir, $a = b \times q$ o $\frac{a}{b} = q$, se dice que la división es exacta.

Para esto, como $b \neq 0$, se tiene $b \geq 1$; y, si $0 \leq a < b$ entonces $a = b \times 0 + a$, $q = 0$ y $r = a$.

Si $b \leq a$, existe $t \geq 1$ en $\mathbb{N}$ tal que $b \times t \leq a$ y $t \leq a$; pues, si $t = 1$ se tiene $b \times 1 = b \leq a$, y si para algún t es $t > a$ se tiene $a \geq b \times t > a \times b$ y $a \times b \geq a \times 1 = a$, es decir, $a > a$, lo cual es falsa o contradictoria como resultado de asumir que $t > a$. Por otro lado, como entre 0 y a hay un número finito de estos t, sea q el mayor de tales t, esto es $b \times q \leq a$, y sea $r = a - b \times q$. Entonces $a = b \times q + r$, con $0 \leq r$ y $r < b$; pues, si $r \geq b$ o $a - b \times q \geq b$, resulta $a \geq b \times (q + 1)$, contrario a que q es el elemento mayor que cumple $a \geq b \times q$, siendo $q + 1 > q$ y $a \geq b \times (q + 1)$. Luego, $a = b \times q + r$, con $0 \leq r < b$.

Aplicando la propiedad, para a en $\mathbb{N}$ y $b = 2$, se tiene: $a = 2 \times q + r$, con $0 \leq r < 2$; es decir, $r = 0$ y $a = 2 \times q$ o $r = 1$ y $a = 2 \times q + 1$, llamándose a un ***número par*** o a un ***número impar***, respectivamente, que permite definir una partición de $\mathbb{N}$ es dos partes: Conjunto de los números pares y conjunto de los números impares de $\mathbb{N}$.

4. *Múltiplo y divisor*:

Dados los números a y b en $\mathbb{N}$, con $b \neq 0$, se tienen las expresiones equivalentes:

"b es un ***divisor*** de a", "b ***divide*** a", "b es un ***submúltiplo*** de a", "b es un ***factor*** de a", "a es un ***múltiplo*** de b" o "a es ***divisible*** por b", significan:

Existe un número q en $\mathbb{N}$ tal que cumple $a = b \times q$; es decir, al dividir a entre b, el resultado es el cociente q, y se denota: $a \div b = q$ o $\frac{a}{b} = q$.

De lo anterior:

a) Para a, b y q en $\mathbb{N}$, $a \div b = q \Leftrightarrow a = b \times q$; en donde, si $q \neq 0$, también q es un divisor de a o a es un múltiplo de q; esto es, $a \div b = q \Leftrightarrow a \div q = b \Leftrightarrow a = b \times q$.

b) De las propiedades de 1 para la multiplicación y de 0 para la adición:

-) Para todo b en $\mathbb{N}$, se cumple $b \times 1 = 1 \times b = b$; de donde 1 es divisor de b o b es múltiplo de 1, y para $b \neq 0$, b es divisor de b o b es múltiplo de b.

-) Para todo b en $\mathbb{N}$, se cumple $b \times 0 = 0 \times b = 0$; de donde, para $b \neq 0$, b es divisor de 0 o 0 es múltiplo de b.

c) En $\mathbb{N}$, si $b \neq 0$ es un divisor de a, existe q tal que $a = b \times q$, y para $c \neq 0$, se cumple $a \times c = (b \times q) \times c = b \times (q \times c) = (b \times c) \times q$; es decir, $b \times c$ es un divisor de $a \times c$.

Lo anterior, en términos de división, se expresa: Si $\frac{a}{b} = q$, entonces $\frac{a \times c}{b \times c} = q$, esto es, para $c \neq 0$, se cumple $\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c}$ o , equivalentemente, $\frac{a \times c}{b} = q \times c$. ¿Cómo se leen?.

d) En el contexto de las relaciones binarias en $\mathbb{N}$, las relaciones "ser múltiplo" y "ser divisor", son relaciones binarias inversas:

a es múltiplo de $b \Leftrightarrow b$ es un factor de a, o

a es divisible por $b \Leftrightarrow b$ es un divisor de a.

Además, dichas relaciones definen una ***relación de orden*** en $\mathbb{N}$, pues son:

-) Reflexivas: $\forall\, b$ en $\mathbb{N}$, b es múltiplo de b o b es divisor de b, para $b \neq 0$.

-) Anti simétricas: Para a y b en $\mathbb{N}$, si a es múltiplo de b y b es múltiplo de a, entonces $a = b$.

-) Transitivas: Para a, b y c en $\mathbb{N}$, si a es múltiplo de b y b es múltiplo de c, entonces a es múltiplo de c.

e) Para a y b en $\mathbb{N} - \{0\}$, si "b es un divisor de a", entonces se cumple $0 < b \leq a$.

Para esto: b es un divisor de $a \Leftrightarrow$ Existe q en $\mathbb{N}$ tal que $a = b \times q$; y como $a \neq 0$, también $q \neq 0$ y $q \geq 1$. Luego, $b \times q \geq b \times 1 = b$, de donde $a \geq b$ o $b \leq a$.

En resumen:

-) Todo número $a \neq 0$ en $\mathbb{N}$, tiene como divisores a 1 o al mismo número a.

-) Los divisores de a forman el "conjunto de los divisores de a", que se denota D(a) y se tiene D(a) = $\{b \;/\; b \in \mathbb{N}, b \neq 0,\ b$ es divisor de a y $0 < b \leq a\} \neq \varnothing$, no vacío. Además, $1 \in$ D(a) y $a \in$ D(a).

-) D(a) $\subset \{1, 2, 3, \ldots, a-1, a\}$ y es un conjunto finito; es decir, a tiene un número finito de divisores.

-) Todo número $a \neq 0$ en $\mathbb{N}$, tiene como múltiplos a 0 y al mismo número a.

-) Los múltiplos de a forman el "conjunto de los múltiplos de a", se denota por M(a) y se tiene M(a) = $\{ac \ / \ c \in \mathbb{N}\} \neq \varnothing$ y es un con junto infinito; es decir, $a \neq 0$ tiene infinidad de múltiplos. Además, $0 \in$ M(a) y $a \in$ M(a).

-) En particular, para $a > 1$, si D(a) = $\{1, a\}$, se dice que a es un ***número primo***; y, en otro caso, se dice que a es un ***número compuesto***.

5. ***Máximo común divisor y mínimo común múltiplo***:

Para a y b en $\mathbb{N} - \{0\}$, ¿Qué es el MCD de a y b? y ¿Qué es el MCM de a y b?

-) Sean D(a) y D(b) los conjuntos divisores de a y de b, que son conjuntos finitos.

Se tiene D(a) $\cap$ D(b) = D(a , b), el conjunto de divisores comunes de a y b, es un conjunto finito, pues D(a , b) $\subset$ D(a), y D(a , b) $\subset$ D(b).

Luego, sea d el mayor o máximo de los elementos de D(a , b), llamado el ***Máximo Común Divisor*** de a y b; y se denota d = MCD(a , b).

-) Sean M(a) y M(b) los conjuntos múltiplos de a y de b, que son conjuntos infinitos.

Se tiene M(a) $\cap$ M(b) = M(a , b), el conjunto de los múltiplos comunes de a y b, es un conjunto infinito.

Luego, sea $m \neq 0$ el menor de los elementos de M(a , b), llamado el MCM de a y b; y se denota m = MCM(a , b).

Por ejemplo: Para 6 y 8, D(6) = {1, 2, 3, 6}, D(8) = {1, 2, 4, 8} y D(8 , 6) = {1, 2}, de donde MCD(8 , 6) = 2.

También, M(6) = {0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, …},

M(8) = {0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, …} y

M(8 , 6) = {0, 24, 48, 72, …}, de donde MCM(6 , 8) = 24.

En el contexto anterior, si MCD(a ,b) = 1, se dice que a y b son ***primos relativos*** o son ***primos entre sí***.

6. *Aplicaciones del algoritmo de la división*:

6.1. *Escritura de números naturales en base b > 1.*

Cuando un conjunto *A* tiene 39 elementos, donde 39 = 30 + 9 = 3×10 + 9 en el sistema decimal, significa que al agrupar dichos elementos de 10 en 10, hay 3 subconjuntos de 10 elementos cada uno y quedan 9 elementos; es decir, hay 3 decenas y 9 unidades.

¿Cómo se representa la cantidad de elementos de *A*, si la agrupación se hace de 5 en 5 o de 2 en 2 o de 16 en 16?; es decir, ¿en sistemas de numeración de bases 5, 2 y 16?

En general, para la base $b > 1$, a cada elemento de un comjumto *A* se llama ***unidad simple***, a un grupo de *b* elementos o unidades simples se llama ***unidad de primer orden***, a un grupo de *b* unidades de primer orden se llama ***unidad de segundo orden***, a un grupo de *b* unidades de segundo orden se llama ***unidad de tercer orden*** etc.

Según esto, en *A* con 39 elementos en base 10, para $b = 5$, se forman 7 unidades de primer orden, y quedan 4 unidades simples; luego, con las unidades de primer orden se forman una unidad de segundo orden y quedan 2 unidaes de primer orden: La cantidad de elementos de *A* es 124, en base 5.

Para la base 2, los elementos de *A* agrupando de 2 en 2, finalmente se tiene: 100111. ¿Qué propiedad sustenta estos procesos?.

Propiedad 2: Para a y b en $\mathbb{N}$, con $b > 1$, existen únicos $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ en $\mathbb{N}$, tales que $0 \leq a_i < b$, $\forall\ i = 1, 2, \ldots, n$, $a_n > 0$ y $a = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_2 b^2 + a_1 b^1 + a_0 b^0 = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_2 b^2 + a_1 b + a_0$, es la ***representación polinomial*** de a en la base b, y se escribe $a = a_n a_{n-1} \ldots . a_2 a_1 a_0$, donde a_0 es la cifra de unidad simple, a_1 es la cifra de unidad de primer orden, a_2 es la cifra de unidad de segundo orden, … , a_n es la cifra de unidad de orden n, en la base b.

En efecto; Para *a* y *b* en $\mathbb{N}$, con $b > 1$, por el algoritmo de la división, existen únicos q_0 y a_0 en $\mathbb{N}$, que cumple $a = q_0 b + a_0$, con $0 \leq a_0 < b$.

Como $q_0 \in \mathbb{N}$, si $q_0 = 0$ se tiene $a = a_0$; si $q_0 \neq 0$ o sea $q_0 > 0$, para q_0 y *b*, por el algoritmo de la división, existen únicos q_1 y a_1 en $\mathbb{N}$, que cumplen $q_0 = q_1 b + a_1$, con $0 \leq a_0 < b$, $0 \leq q_1 < q_0$ y $a = (q_1 b + a_1)b + a_0 = q_1 b^2 + a_1 b + a_0$.

Si $q_1 = 0$ se tiene $q_0 = a_1$ y $a = a_1 b + a_0 = a_1 a_0$; en otro caso, $q_1 \neq 0$ o sea $q_1 > 0$, para q_1 y *b*, por algoritmo de la división, existen q_2 y a_2 en $\mathbb{N}$, tal que $q_1 = q_2 b + a_2$, con $0 \leq a_2 < b$, $0 \leq q_2 < q_1 < q_0$ y $a = (q_2 b + a_2)b^2 + a_0 = q_2 b^3 + a_2 b^2 + a_1 b + a_0$.

Si $q_2 = 0$ se tiene $q_1 = a_1$ y $a = a_2 b^2 + a_1 b + a_0 = a_2 a_1 a_0$; y si $q_2 \neq 0$ o sea $q_2 > 0$, para q_2 y *b*, por algoritmo de la división, existen q_3 y a_3 en $\mathbb{N}$, tales que $q_2 = q_3 b + a_3$, con $0 \leq a_3 < b$, $0 \leq q_3 < q_2 < q_1 < q_0$ y $a = (q_3 b + a_3)b^3 + a_2 b^2 + a_1 b + a_0$

$$= q_3 b^4 + a_3 b^3 + a_2 b^2 + a_1 b + a_0.$$

Continuando el proceso, si $q_{n-1} \neq 0$ o sea $q_{n-1} > 0$, para q_{n-1} y *b*, por algoritmo de la división, existen únicos q_n y a_n en $\mathbb{N}$, tales que $q_{n-1} = q_n b + a_n$, con $0 \leq a_n < b$, $0 \leq q_n < q_{n-1} < \ldots < q_2 < q_1 < q_0$ y $a = q_{n-1} b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_2 b^2 + a_1 b + a_0$.

Entre 0 y q_0 hay un número finito de elementos q_i y resulta que $q_n = 0$, $q_{n-1} = a_{n-1}$ y $a = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_2 b^2 + a_1 b + a_0 = a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0$.

Así, para *a* = 39, en base 10, se tiene $a = 39 = 3 \times 10^1 + 9$; en base 5, se tiene $a = 124 = 1 \times 5^2 + 2 \times 5^1 + 4 = 1 \times 5^2 + 2 \times 5 + 4$; en base 2, $a = 100111 = 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1$; y en bases 16, $a = 27 = 2 \times 16 + 7$, etc.

6.2. *Cálculo del* MCD *y* MCM *de dos números*:

Sean *a* y *b* dos números en $\mathbb{N}$, con $0 < b < a$. Se trata de hallar el MCD(*a* ,*b*) usando el algoritmo de la división en $\mathbb{N}$:

1) Para $0 < b < a$ en $\mathbb{N}$, por el algoritmo de la división, existen únicos números q y r en $\mathbb{N}$ tal que $a = b \times q + r$, con $0 \leq r < b$.

Si $r = 0$, entonces $a = b \times q$; es decir, b es un divisor de a. Luego, si d es un divisor de b, también d es un divisor de a (propiedad transitiva de la relación ".. es divisor de "). De esto, $D(b) \subset D(a)$, $D(b) \cap D(a) = D(b)$ y el mayor elemento en $D(b)$ es b. Por tanto, $MCD(a , b) = b$.

Si $0 < r < b$, aplicando el algoritmo de la división a b y r, existen únicos q_1 y r_1 en $\mathbb{N}$ tal que $b = r \times q_1 + r_1$, con $0 \leq r_1 < r$.

***Propiedad* 3**: El conjunto de divisores comunes de b y r es igual al conjunto de divisores comunes de a y b; es decir, $D(b , r) = D(a , b)$.

En efecto, si $d \in D(b , r)$, entonces existen t y r en $\mathbb{N}$ tales que $b = d \times t$ y $r = d \times s$. Como $a = b \times q + r$ se tiene $a = (d \times t) \times q + (d \times s) = d \times (t \times q + s) = d \times h$, para $h = t \times q + s$ en $\mathbb{N}$; es decir, d es un divisor de a y $d \in D(a , b)$.

Luego, $D(b , r) \subset D(a , b)$.

Recíprocamente, si $d \in D(a , b)$, existen u y v en $\mathbb{N}$ tales que $a = d \times u$ y $b = d \times v$. Como $a = b \times q + r$ se tiene $d \times u = (d \times v) \times q + r$; de donde $r = d \times u - (d \times v) \times q = d \times (u - v \times q) = d \times k$, para $k = u - v \times q$ en $\mathbb{N}$; es decir, d es un divisor de r y $d \in D(b , r)$. Luego, $D(a , b) \subset D(b , r)$.

Por tanto, $D(b , r) = D(a , b)$; y resulta: $MCD(b , r) = MCD(a , b)$.

2) En la expresión $b = r \times q_1 + r_1$, con $0 \leq r_1 < r < b$;

Si $r_1 = 0$, entonces $b = r \times q_1$, r es un divisor de b y $D(b , r) = D(r)$. Por lo tanto, se tiene $MCD(b , r) = MCD(a , b) = r$.

Si $0 < r_1 < r < b$, aplicando el algoritmo de la división a r y r_1, existen q_2 y r_2 en $\mathbb{N}$ tal que $r = r_1 \times q_2 + r_2$, con $0 \leq r_2 < r_1 < r < b$. Luego, $D(r , r_1) = D(a , b)$, por la propiedad dada, y $MCD(r , r_1) = MCD(a , b)$.

Si $r_2 = 0$, entonces $r = r_1 \times q_2$; es decir, r_1 es un divisor de r, $D(r , r_1) = D(r_1)$ y, se tiene $MCD(r , r_1) = MCD(b , r) = MCD(a , b) = r_1$.

Si $0 < r_2 < r_1 < r < b$, aplicando el algoritmo de la división a r_1 y r_2, existen q_3 y r_3 en $\mathbb{N}$ tal que $r_1 = r_2 \times q_3 + r_3$, con $0 \leq r_3 < r_2 < r_1 < r < b$. Luego, $D(r_1 , r_2) = D(a , b)$, por la propiedad dada, y $MCD(r_1 , r_2) = MCD(a , b)$.

Si $r_3 = 0$, entonces $r_1 = r_2 \times q_3$; es decir, r_2 es un divisor de r_1, $D(r_1 , r_2) = D(r_2)$ y, se tiene $MCD(r_1 , r_2) = MCD(r , r_1) = MCD(b , r) = MCD(a , b) = r_2$.

Si $0 < r_3 < r_2 < r_1 < r < b$, se aplica el algoritmo de la división a r_2 y r_3.

Continuando los procesos anteriores:

Se tiene r_{n-2} en $\mathbb{N}$ tal que $0 < r_{n-2} < \ldots < r_2 < r_1 < r < b$; y del algoritmo de la división para r_{n-3} y r_{n-2}, existen q_{n-1} y r_{n-1} en $\mathbb{N}$ tal que $r_{n-3} = r_{n-2} \times q_{n-1} + r_{n-1}$, con $0 < r_{n-1} < r_{n-2} < \ldots < r_2 < r_1 < r < b$. Luego, $D(r_{n-3} , r_{n-2}) = D(a , b)$.

Si $r_{n-1} = 0$, entonces $r_{n-3} = r_{n-2} \times q_{n-1}$; es decir, r_{n-2} es un divisor de r_{n-3}, $D(r_{n-2} , r_{n-3}) = D(r_{n-2})$ y $MCD(r_{n-2} , r_{n-3}) = MCD(b , r) = MCD(a , b) = r_{n-2}$.

Si $0 < r_{n-1} < r_{n-2} < \ldots < r_2 < r_1 < r < b$, del algoritmo de la división para r_{n-2} y r_{n-1}, existen q_n y r_n en $\mathbb{N}$ tal que $r_{n-2} = r_{n-1} \times q_n + r_n$, con $0 < r_n < r_{n-1} < \ldots < r_2 < r_1 < r < b$. Luego, $D(r_{n-2} , r_{n-1}) = D(a , b)$.

Como entre 0 y b hay una cantidad finita de números c en $\mathbb{N}$ tal que $0 < c < b$, los procesos anteriores termina al aplicar el algoritmo de la división a r_{n-1} y r_n, por el cual existen q_{n+1} y r_{n+1} en $\mathbb{N}$ tal que $r_{n-1} = r_n \times q_{n+1} + r_{n+1}$, con $0 = r_{n+1} < r_n$

$< r_{n-1} < \ldots < r_2 < r_1 < r < b$; de donde $r_{n-1} = r_n \times q_{n+1}$ y r_n es un divisor de r_{n-1}. Luego, D(r_{n-1} , r_n) = D(r_n) y MCD(r_{n-1} , r_n) = r_n.

Por tanto, MCD(r_{n-1} , r_n) = MCD(r_{n-2} , r_{n-1}) = …. = MCD(b , r)

= MCD(a , b) = r_n .

En los procesos realizados, de $r_{n-2} = r_{n-1} \times q_n + r_n$ y se tiene $r_n = r_{n-2} - r_{n-1} \times q_n$; y en el paso anterior se tiene $r_{n-3} = r_{n-2} \times q_{n-1} + r_{n-1}$ o $r_{n-1} = r_{n-3} - r_{n-2} \times q_{n-1}$, que al remplazar en r_n se tiene $r_n = r_{n-2} - (r_{n-3} - r_{n-2} \times q_{n-1}) \times q_n$

$= r_{n-2} \times (1 + q_{n-1} \times q_n) - r_{n-3} \times q_n$.

En otro paso anterior, $r_{n-4} = r_{n-3} \times q_{n-2} + r_{n-2}$ o $r_{n-2} = r_{n-4} - r_{n-3} \times q_{n-2}$, que al remplazar en r_n, resulta $r_n = (r_{n-4} - r_{n-3} \times q_{n-2}) \times (1 + q_{n-1} \times q_n) - r_{n-3} \times q_n$

$= (1 + q_{n-1} \times q_n) \times r_{n-4} - (q_{n-2} + q_{n-2} \times q_{n-1} \times q_n + q_n) \times r_{n-3}$.

Llegando a los primeros pasos, se tienen $b = r \times q_1 + r_1$ o $r_1 = r \times q_1 - b$ y $a = b \times q + r$ o $r = b \times q - a$, que al remplazarlos en r_n, resulta: $r_n = p \times a - q \times b$, para p y q en $\mathbb{N}$. Pero r_n = MCD(a , b) y denotando por d = MCD(a , b), se tiene $d = p \times a - q \times b$, para p y q en $\mathbb{N}$.

Para hallar el MCM(a , b), conociendo o hallando el MCD(a , b), se tiene la siguiente:

***Propiedad* 4:** Para $a \neq 0$ y $b \neq 0$ en $\mathbb{N}$, MCD(a , b) × MCM(a , b) = $a \times b$.

En efecto, sean d = MCD(a , b) y m = MCM(a , b), entonces d es un divisor de a, de b y de $a \times b$, y se tienen $a = d \times k$, $b = d \times h$ y $a \times b = (d \times k) \times (d \times h) = d \times (k \times d \times h)$, para k y h en $\mathbb{N}$; de esto $k \times d \times h = (k \times d) \times h = a \times h$ y $k \times d \times h = k \times (d \times h) = k \times b$, es decir, $k \times d \times h$ es múltiplo común de a y de b. Siendo m el menor múltiplo común de a y de b, se tiene $k \times d \times h$

es múltiplo de m o $k\times d\times h = t\times m$, para t en $\mathbb{N}$, y $a\times b = d\times(k\times d\times h) = d\times(t\times m) = (d\times m)\times t$. De esto, $d\times m$ es un divisor de $a\times b$.

Por otro lado, siendo d = MCD(a , b), se tiene $d = p\times a - q\times b$, para p y q en $\mathbb{N}$, y m = MCM(a , b), se tiene $m = a\times u = b\times v$, para u y v en $\mathbb{N}$.

Luego, se tiene $d\times m = (p\times a - q\times b)\times m = p\times a\times m - q\times b\times m = p\times a\times(b\times v) - q\times b\times(a\times u) = (a\times b)\times(p\times v) - (a\times b)\times(q\times u) = (a\times b)\times(p\times v - q\times u)$.

De lo anterior, $a\times b$ es un divisor de $d\times m$.

Por lo tanto, por la propiedad anti simétrica de la relación "… es divisor de …", se tiene

$a\times b = d\times m$ = MCD(a , b) × MCM(a , b).

De esta propiedad, conocidos o calculados MCD(a , b) y $a \times b$, se halla MCM(a , b).

Además, si b es un divisor de a, entonces MCD(a , b) = b y MCM(a , b) = a.

Por ejemplo, hallar: **i)** MCD(24 , 18) y **ii)** MCD(825 , 315).

i) Para T = MCD(24 , 16), se tiene: $24 = 18 \times 1 + 6$ y $18 = 6 \times 3 + 0$. Luego, $T = 6$ y $T = 6 = 1 \times 24 - 1 \times 18$.

ii) Para U = MCD(825 , 315), se tiene $825 = 315 \times 2 + 195$, $315 = 195 \times 1 + 120$, $195 = 120 \times 1 + 75$, $120 = 75 \times 1 + 45$, $120 = 45 \times 2 + 30$, $45 = 30 \times 1 + 15$ y $30 = 15 \times 2 + 0$. Luego, $U = 15$.

Además, hallar p y q en $\mathbb{N}$ tal que $U = 15 = p\times 825 - q \times 315$.

6.3. ***Expresión decimal de un número fraccionario*:**

En las fracciones o números racionales, hay que diferenciar las fracciones decimales, cuyos denominadores son 10 o potencias de 10, tales como $\frac{3}{10}$, $\frac{27}{100}$, $\frac{56}{1000}$, etc, que se representan por expresiones decimales 0,3 , 0,27 , 0,056 , etc. y se leen "3 décimos", "27 centésimos", "56 milésimos", etc.

Dada una fracción o número racional $\frac{a}{b}$, con a y b en $\mathbb{N}$ y $b > 0$, por el algoritmo de la división, existen q y r en $\mathbb{N}$ tal que $\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}$, con $0 \leq r < b$. Si $r = 0$, $\frac{a}{b} = q \in \mathbb{N}$; y si $0 < r < b$, entonces $0 < \frac{r}{b} < 1$ y $\frac{r}{b} = \frac{1}{10} \times \frac{10\times r}{b}$, donde $0 < \frac{10\times r}{b} < 10$ y, del algoritmo de la división aaplicado a $\frac{10\times r}{b}$ se tiene $\frac{10\times r}{b} = q_1 + \frac{10\times r_1}{b}$, con $0 \leq r_1 < b$ y $0 \leq q_1 < 10$.

Luego, $\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b} = q + \frac{1}{10} \times \frac{10\times r}{b} = q + \frac{1}{10}\left(q_1 + \frac{r_1}{b}\right) = q + \frac{q_1}{10} + \frac{1}{10}\times\left(\frac{r_1}{b}\right)$, donde, si $r_1 = 0$, $\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b} = q + \frac{q_1}{10} = q + 0$, $q_1 = q, q_1$ es la expresión decimal de $\frac{a}{b}$ y se lee "q enteros y q_1 décimos" o q es la parte entera y q_1 es la parte decimal o cifra de las décimas de $\frac{a}{b}$.

Si $0 < r_1 < b$, por el algoritmo de la división, $\frac{10\times r_1}{b} = q_2 + \frac{r_2}{b}$, con $0 \leq r_2 < b$, $0 \leq q_2 < 10$ y $\frac{a}{b} = q + \frac{q_1}{10} + \frac{1}{100}\times\left(q_2 + \frac{r_2}{b}\right) = q + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{100} + \frac{1}{100}\times\left(\frac{r_2}{b}\right)$.

Si $r_2 = 0$, entonces $\frac{a}{b} = q + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{100} = q + 0, q_1 + 0{,}0q_2 = q, q_1q_2$, expresión decimal de $\frac{a}{b}$, siendo q su parte entera y q_1q_2 su parte decimal, con q_1 la cifra de las décimas y

q_2 la cifra de las centésimas, y se lee"q enteros y q_1q_2 centésimos".

Si $0 < r_2 < b$, por el algoritmo de la división $\frac{10\times r_2}{b} = q_3 + \frac{r_3}{b}$, con $0 \leq r_3 < b$, $0 \leq q_3 < 10$ y $\frac{a}{b} = q + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{100} + \frac{1}{1000}\times\left(\frac{10\times r_2}{b}\right) = q + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{100} + \frac{1}{1000}\times\left(q_3 + \frac{r_3}{b}\right)$

$= q + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{100} + \frac{q_3}{1000} + \frac{1}{1000}\times\left(\frac{r_3}{b}\right)$.

Si $r_3 = 0$, entonces $\frac{a}{b} = q + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{100} + \frac{q_3}{1000} = q + 0{,}q_1 + 0{,}0q_2 + 0{,}00q_3 = q, q_1q_2q_3$, es la expresión decimal de $\frac{a}{b}$, siendo q su parte entera y $q_1q_2q_3$ su parte decimal, con q_1 la cifra de las décimas, q_2 la cifra de las centésimas y q_3 la cifra de las milésimas,y se lee"q enteros y $q_1q_2q_3$ milésimos".

Si $0 < r_3 < b$, se repite el proceso anterior con $\frac{10\times r_3}{b}$, $\frac{10\times r_4}{b}$, etc. y la expresión decimal de $\frac{a}{b}$ es $\frac{a}{b} = q, q_1q_2q_3q_4\ldots\ldots$, una expresión periódica.

Por ejemplo, se tiene:

$$\frac{17}{5} = 3 + \frac{2}{5} = 3 + \frac{1}{10} \times \left(\frac{20}{5}\right) = 3 + \frac{1}{10} \times (4) = 3 + \frac{4}{10} = 3 + 0{,}4 = 3{,}4;$$

$$\frac{13}{18} = 0 + \frac{13}{18} = 0 + \frac{1}{10}\times\left(\frac{130}{18}\right) = 0 + \frac{1}{10}\times\left(7 + \frac{4}{18}\right) = 0 + \frac{7}{10} + \frac{1}{10}\left(\frac{2}{9}\right) = 0 + \frac{7}{10} + \frac{1}{100}\left(\frac{20}{9}\right)$$

$$= 0 + \frac{7}{10} + \frac{1}{100}\left(2 + \frac{2}{9}\right) = 0 + \frac{7}{10} + \frac{2}{100} + \frac{1}{100}\left(\frac{2}{9}\right) = 0 + \frac{7}{10} + \frac{2}{100} + \frac{1}{1000}\left(\frac{20}{9}\right)$$

$$= 0 + \frac{7}{10} + \frac{2}{100} + \frac{1}{1000}\left(2 + \frac{2}{9}\right) = 0 + 0{,}7 + 0{,}02 + 0{,}002 + \ldots\ldots = 0{,}72222\ldots\ldots .$$

Referencias

Verástegui, T. (1996). *Introducción a la teoría de números*. Lima, Perú. Edit. Moshera.

Vinogradov I. M. (1971). *Fundamentos de la teoría de números*. Moscú. Edit. MIR.

Serre, J. P. (1973). *A course in arithmetic*. New York. Springer–Verlag.

Samuel, P. (1972). *Teoría algebraica de números*. Barcelona. Ediciones Omega.

Andrews, G. E. (1971). *Number theory*. Philadelphia. W. B. Saunders Co.

Pollard, H. H. (1965). *The theory of algebraic numbers*. The mathematicss assoc. of America.

Volver al índice de autores

4.1.4. Cónicas en las geometrías del taxista y euclideana (Conferencia especial)

Mg. Nélida Salomé Medina García de Correa
Pontificia Universidad Católica del Perú-IREM, Perú

Resumen

Para mejorar la comprensión de las cónicas, consideramos la circunferencia, elipse, hipérbola en la geometría euclideana y la geometría del taxista. Se define cada cónica como un lugar geométrico, como un conjunto de pares ordenados de números reales que satisfacen una ecuación y como figuras que las representan en el plano tanto en la métrica euclideana como en la métrica del taxista

Geometrías Métricas en el plano

. Consideremos un conjunto de puntos X en el plano con la estructura de espacio vectorial.

Definición 1. Una distancia o métrica d en X es una aplicación

$$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

con las propiedades siguientes: para todo punto $P, Q, R \in X$

1. $d(P,Q) \geq 0$, $d(P,Q) = 0$ si y sólo si $P = Q$
2. $d(P,Q) = d(Q,P)$
3. $d(P,R) \leq d(P,Q) + d(Q,R)$.

Un par (X, d) se llama espacio métrico.

Consideremos $X = \mathbb{R}^2 = \{P = (x,y): x, y \in \mathbb{R}\}$ con la estructura de espacio vectorial.

La función d_E definida por

$$d_E\left((x_1,\ y_1),(x_2,\ y_2)\right) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

cumple las condiciones de la definición 1, así que es una distancia. Es llamada distancia euclidiana. Es motivada por la longitud de un vector en el plano obtenida usando el Teorema de Pitágoras. El par $(\mathbb{R}^2,\ d_E)$ se denomina geometría métrica euclidiana.

La función d_T dada por

$$d_T\left((x_1,\ y_1),(x_2,\ y_2)\right) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$$

También cumple las condiciones de la definición 1. Es llamada distancia del taxista o de Manhattan. Es una distancia usada en espacios métricos.

Para todo par de puntos $(x_1,\ y_1), (x_2,\ y_2)$ del plano $\mathbb{R}^2$ se cumple la desigualdad

$$d_E\left((x_1,\ y_1),(x_2,\ y_2)\right) \leq\ d_T\left((x_1,\ y_1),(x_2,\ y_2)\right)$$

muy útil en topología.

Cónicas en las Geometrías Euclidiana y del Taxista

Definición 2. Una circunferencia $\mathcal{C}$ es el lugar geométrico de los puntos de un plano equidistantes de un punto fijo llamado centro.

Circunferencia con centro el punto $C = (a, b)$ y radio r

$$C = \{\, P : d(P, C) = r\}.$$

En la geometría euclidiana,

$$\mathcal{C}_E = \left\{P(x,y): \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r \right\}.$$

En la geometría del taxista

$$\mathcal{C}_T = \{P(x,y): |x-a| + |y-b| = r\}.$$

Trazamos la gráfica de $\mathcal{C}_T$.

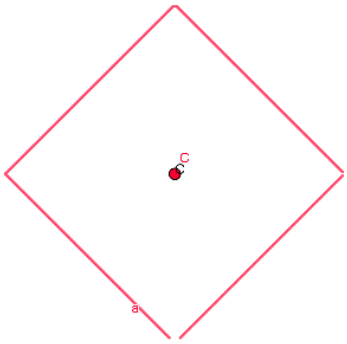


Figura 1. Circunferencia $\mathcal{C}_T$.

La longitud de la circunferencia $\mathcal{C}_T$ es $4\sqrt{2}$ r y el área de la región limitada por $\mathcal{C}_T$ es $2r^2$.

Mostramos las gráficas de una circunferencia de centro $C(1,1)$ y radio 3 en G_T y G_E, cuyas ecuaciones son

$$\mathcal{C}_T: \ |x-1| + |y-1| = 3$$

$$\mathcal{C}_E: \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = 3.$$

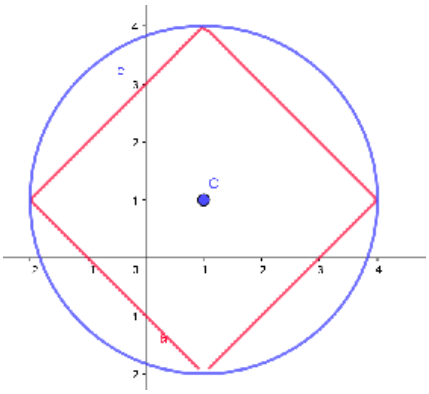


Figura2. Circunferencias $\mathcal{C}_T$ y $\mathcal{C}_E$.

Definición 3. Dados una recta L y un punto $F \notin L$, la parábola $\mathcal{P}$ con foco F y directriz L es el lugar geométrico de los puntos P del plano cuyas distancias a F y L son iguales. Es decir,

$$\mathcal{P} = \{P:\ d(P,F) = d(P,L)\}.$$

las ecuaciones de las parábolas con foco $F = (a,b)$ y directriz $L: mx + ny + c = 0$ en la métrica del taxista y euclidiana son, respectivamente,

$$\mathcal{P}_T : |x-a| + |y-b| = \frac{|mx+ny+c|}{\max\{|m|,|n|\}}$$

$$\mathcal{P}_E:\ \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = \frac{|mx+ny+c|}{\sqrt{m^2+n^2}}.$$

.

Mostramos las gráficas de las parábolas con $F = (-4,-1)$ y directriz $L: 2x + y = 0$, con ecuaciones

$$\mathcal{P}_T : |x+4| + |y+1| = \frac{|2x+y|}{2}$$

$$\mathcal{P}_E\colon \sqrt{(x+4)^2+(y+1)^2} = \frac{|2x+y|}{\sqrt{5}}.$$

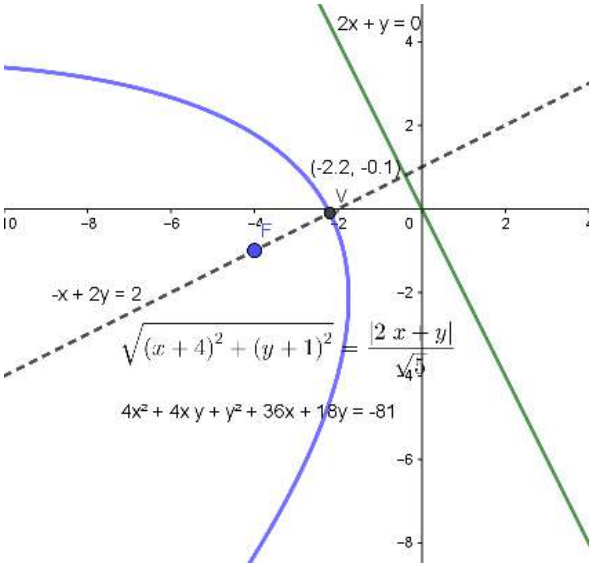


Figura 3, Parábola $\mathcal{P}_E$

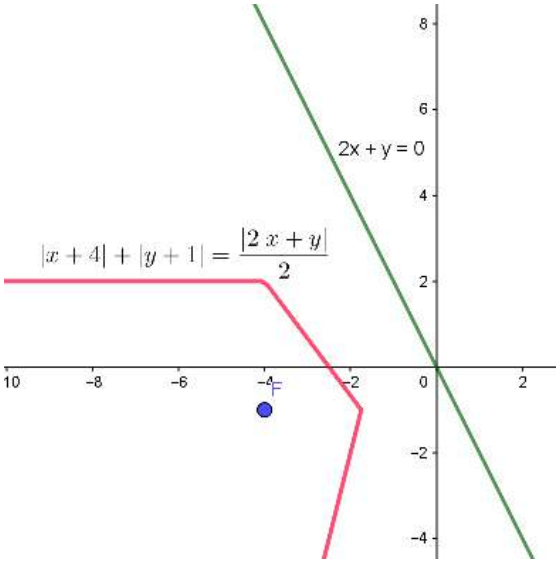


Figura 4, Parábola $\mathcal{P}_T$

Definición 4. Una elipse $\mathcal{E}$ es el lugar geométrico de los puntos de un plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos es igual a una constante mayor que la distancia entre los focos.

Dados los focos $F_1 = (a_1,\ b_1)$, $F_2 = (a_2,\ b_2)$ y constante $2a,\ a > 0$,

$$\mathcal{E} = \{P:\ d(P, F_1) + \ d(P, F_2)\ = 2a\ \}.$$

Una elipse en la geometría del taxista es el conjunto de puntos

$$\mathcal{E}_T = \{P(x, y):\ |x - a_1| + |y - b_1| + |x - a_2| + |y - b_2| = 2a\}.$$

Y en la geometría euclidiana

$$\mathcal{E}_E = \left\{P(x, y): \sqrt{(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2}\ + \sqrt{(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2}\ = 2a\right\}$$

donde $2a$ es la distancia entre los vértices.

La figura siguiente muestra una elipse con centro el origen, focos $F_1 = (-a_1,\ 0_1)$, $F_2 = (a_2,\ 0)$ y constante 6.

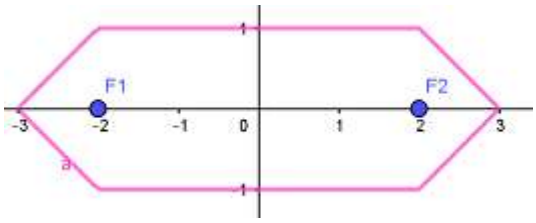


Figura 5. Gráfica de $\mathcal{E}_T$ con centro $(0,0)$ y focos en el eje X.

Las ecuaciones de la elipse con focos los puntos fijos $F_1 = (2, 6)$, $F_2 = (4, 1)$ y $2a = 9$ en la geometría del taxista y euclidiana son

$$\mathcal{E}_T : |x - 2| + |y - 6| + |x - 4| + |y - 1| = 9$$

$$\mathcal{E}_E:\ \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 6)^2}\ + \sqrt{(x - 4)^2 + (y - 1)^2} = 9,$$

respectivamente. Sus gráficas se muestran en las Figuras 6 y 7.

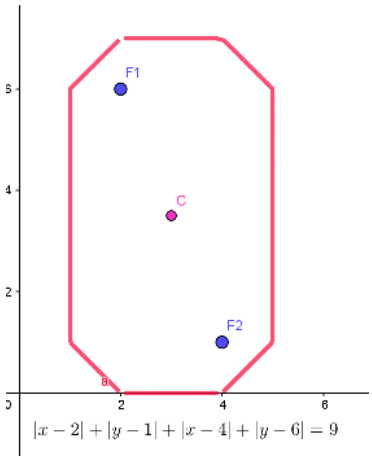


Figura 6. Gráfica de $\mathcal{E}_T$.

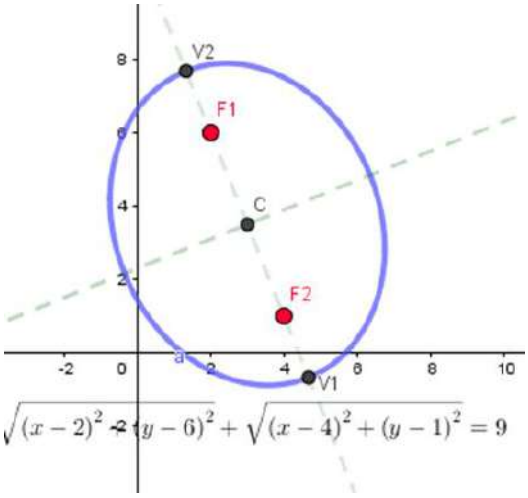


Figura7. Gráfica de $\mathcal{E}_E$.

Notamos que el área de $\mathcal{E}_T$ es $26\ u^2$. En $\mathcal{E}_E$, $a=\frac{9}{2}$, $c=\sqrt{\frac{29}{4}}$ y en consecuencia $b=\sqrt{13}$. El área de $\mathcal{E}_E$ es $\frac{9\sqrt{13}}{2}\ u^2$.

Definición 5. Una hipérbola $\mathcal{H}$ es el lugar geométrico de los puntos de un plano tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos es una constante positiva

Si los focos son $F_1 = (a_1,\ b_1),, F_2 = (a_2,\ b_2)$ y la constante positiva es $2a$, entonces

$$\mathcal{H}\ = \{P\colon\ |d(P,F_1) -\ d(P,F_2)| = 2a\}.$$

Una hipérbola $\mathcal{H}_T$ en la geometría del taxista es el conjunto de puntos

$$\mathcal{H}_T\ = \{P(x,y)\colon |(|x-a_1| + |y-b_1|) - (|x-a_2| + |y-b_2|))| = 2a\}.$$

Y en la geometría euclidiana,

$$\mathcal{H}_E = \left\{P(x,y)\colon \left|\sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2} - \sqrt{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2}\ \right|\right\} = 2a\,.$$

La distancia entre los vértices de $\mathcal{H}_E$ es $2a$.

Por ejemplo, la ecuación de una hipérbola cuyos focos son los puntos $F_1 = (-2,0),\ F_2 = (2,1)$ y constante 3 es

$$\mathcal{H}_T\colon \big|\ |x+2| + |y| - |x-2| - |y-1|\big| = 3.$$

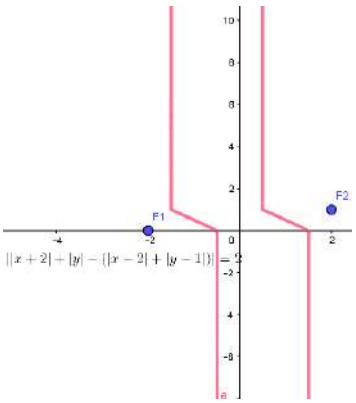


Figura 8. Gráfica de $\mathcal{H}_T$

Las ecuaciones de una hipérbola con focos $F_1 = (-2, 3),\ F_2 = (1, 1)$ y constante 3 en la geometría del taxista y euclidiana, respectivamente, son:

$$\mathcal{H}_T\colon \big|\, |x+2| + |y-3| - |x-1| - |y-1| \big| = 3$$

$$\mathcal{H}_E\colon \left| \sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2} \ - \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} \ \right| = 3.$$

Mostramos las gráficas correspondientes en las Figuras 9 y 10..

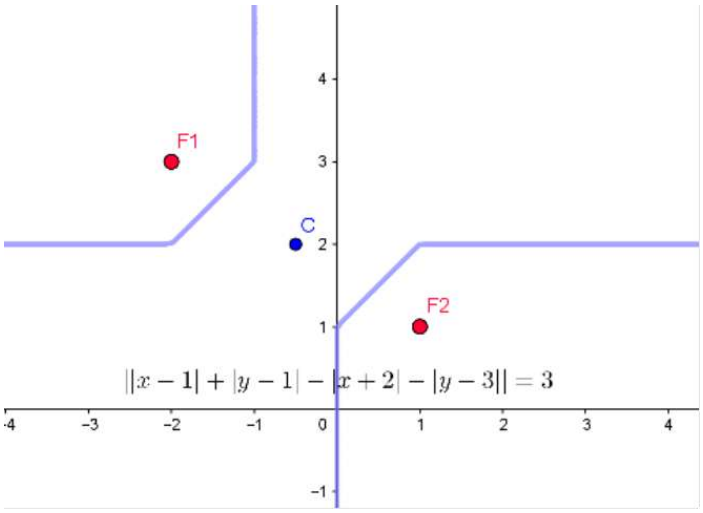


Figura 9. $\mathcal{H}_T$ con focos $(-2, 3), (1, 1)$.

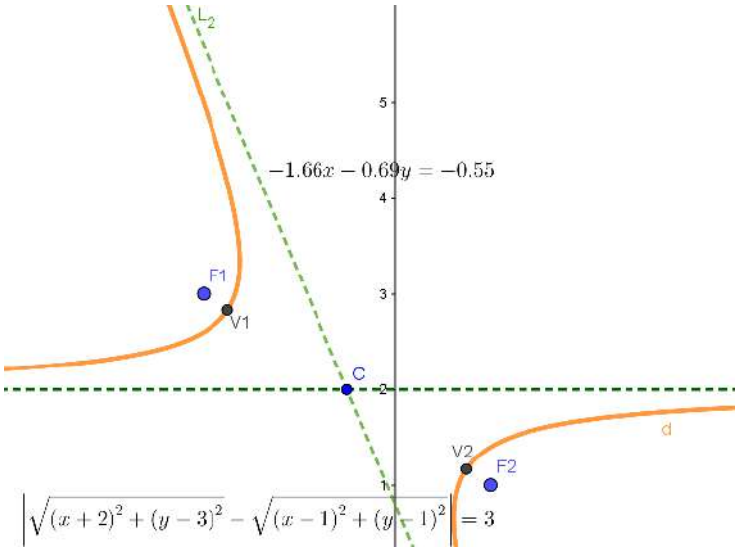


Figura 10. $\mathcal{H}_E$ con focos $(-2, 3), (1, 1)$

En la geometría euclidiana, la ecuación de la hipérbola es $12\,xy + 5y^2$-24x- 14y+17=0 y las de sus asíntotas son $y = 2$ y 1.66 x + 0.69 y=0.55.

Referencias

Aroca, J. M., Fernández, M. J. & Ortiz, M. (2013). *Geometría.* .España.

Lima. E., (1981*). Curso de Análise, Volume 2*. Instituto fr Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro..

Geometria do taxista. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Disponible en:

http://repositorio.roca.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/479/1/CM_ESPMAT_II_2012_07.pdf. Consultado el 20/04/2018.

Volver al índice de autores

4.2. Reportes de investigación

4.2.1. Una organización y modelización matemática aplicado en el caso de las sucesiones en un texto de primaria

Elvis Bustamante Ramos
Francisco Javier Ugarte Guerra
Pontificia Universidad Católica del Perú-IREM, Perú

Resumen

Este trabajo forma parte de una investigación más amplia enmarcada en el ámbito de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), cuyo objetivo fue construir un modelo epistemológico de referencia (MER) asociado a la sucesión. En lo que sigue mostraremos la reconstrucción de una organización matemática (OM) asociada a sucesión y, a continuación, la construcción de otra OM por medio de la modelización matemática. Ello nos permitirá evidenciar la desarticulación de la OM reconstruida con las otras OM en la educación primaria y proponer una modelización matemática para el caso de las sucesiones en un texto oficial de primer año de la educación primaria

Antecedentes

Reconocer la forma de organizar un conocimiento matemático es una herramienta sumamente importante, por ejemplo, para identificar cómo se entiende un objeto matemático en una institución. Existen trabajos que se han dedicado a este problema, como los de Chevallard (1999) que presenta una herramienta, llamada praxeología u organización matemática, que puede describir toda actividad humana regularmente realizada. Asimismo, existen otros trabajos significativos cuyo foco de investigación están en la descripción e identificación de un conocimiento matemático específico. Uno de estos trabajos es el de Gascón (1994), el cual identifica el álgebra como una prolongación unilateral de la aritmética.

Luego, en Bolea (2002) se muestra una concepción del álgebra como un instrumento para modelizar u organizar las praxeologías presentes en una institución de un tema concreto, el cual toma el nombre de proceso de modelización algebraica. Bajo esta perspectiva una organización matemática es el resultado de este proceso de modelización y, si además

articulamos organizaciones matemáticas de un mismo objeto, en una institución dada, obtenemos lo que se denomina un modelo epistemológico de referencia (MER). Un aporte importante para comprender lo que conlleva un MER, es el trabajo de Sierra (2006), quien señala que una manera de construir un MER es a través de una sucesión de praxeologías, en donde cada praxeología surge como una ampliación o desarrollo de la praxeología anterior para dar respuestas a las cuestiones planteada en la praxeología anterior y no tenia respuesta en ella.

Por ello, el Modelo Epistemológico de Referencia representa un instrumento importante para analizar las organizaciones matemáticas y didácticas, además de proponer una organización alternativa o referencial, como lo señala Navarro (2007).

Por otra parte, la sucesión es un tema importante en la EBR pues en el Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular del Perú (2009) indica que "Es necesario que los estudiantes internalicen, comprendan y utilicen varias formas de representar patrones" (p. 317). Por lo cual, la sucesión se encuentra en todo el nivel primario y algunos años de nivel secundario. Y si revisamos los textos oficiales del Perú, las sucesiones se encuentran en todos los textos oficiales de la educación Primaria y un texto de la educación Secundaria.

Reconstrucción de la Organización matemática (OM)

Desde el ámbito de TAD, nos indica que toda actividad humana regularmente realizada puede describirse con un modelo, el de la praxeología u organización matemática (OM) (praxis+logos), como indica Chevallard (1999), en particular se constituye en una herramienta fundamental para modelizar la actividad matemática.

La OM vista como un primer escalón, nos lleva a revisar o describir textos, lo cual consiste en identificar los elementos de cada bloque de la praxeología de un texto o textos de un tema para describir la organización existente en la institución elegida.

Esto se realiza con la identificación de las tareas que existen en el texto y agrupándolas en tipos de tareas, por ejemplo, en la tabla 1 extraída de Bustamante (2017), se muestra las tareas encontradas en texto de Matemática 1 Primaria, en el caso de la sucesión.

Tabla 1

Tareas presentes en el texto oficial: Matemática 1 Primaria

	Primaria 1	**Página**
a	A Jorge le faltan semillas para terminar su pulsera (foto). ¿Qué semillas debe poner para seguir con la secuencia?	40
b	Nora hizo secuencias con sus útiles escolares (foto). ¿Qué patrón siguió en cada caso?	41
c	¿Qué útiles debo colocar en cada secuencia para continuarla? (foto)	41
d	Observa la recta numérica (foto). ¿Qué patrón siguen los números?	46
e	¿Qué figura sigue? (foto)	50

En este caso, y a manera de ejemplo, se puede agrupar estas tareas en dos tipos:

T1: Dada una sucesión, indicar el elemento que continua.

T2: Dada una sucesión, indique el patrón de la sucesión.

Las tareas *a, b, c* y *e* corresponden a **T1** y la tarea *d* corresponden a **T2**.

Luego, en el texto Matemática 1 Primaria, no se observa una técnica en forma explícita, pero a partir de los ejemplos desarrollados se desprende la siguiente técnica:

- Observar los objetos (figuras) y encontrar un patrón.
- Completar la secuencia en base del patrón hallado.

En este caso, el bloque tecnológico y teórico no aparece en forma explícita en el texto, lo que Bolea (2002) llama una OM no bien delimitada, como se muestra en la siguiente cita: "El *álgebra escolar no* aparece explícitamente en la ESO, ni como una organización

matemática bien delimitada" (Bolea, 2002, p. 108). Pero se puede considerar que la tecnología es el *conteo* y la teoría, los *números naturales*.

Además, la OM asociada a sucesión presente en el texto Matemática 2 Primaria, declara que la técnica consta de dos pasos a seguir:

- Observar si la secuencia aumenta o disminuye.
- Definir el patrón, es decir, cuanto aumenta o disminuye.

Observamos que esta técnica, aunque similar a la anterior técnica, no es la misma técnica ni una ampliación de la primera, pues no resuelve tareas relacionadas con figuras las cuales son consideradas en la primera OM. Es decir, estas dos OM existentes en la educación Primaria no se articulan.

Por otro lado, se puede considerar que la tecnología es el *conteo* y la teoría, los *números naturales*, para las OM revisadas, aunque no aparezca en forma explícita en los dos textos de primaria.

Este análisis es de utilidad para evaluar la OM, por ejemplo, en Bustamante (2017) se realizo este mismo análisis en los textos de primaria y uno de secundaria en el tema de sucesión, evidenciando que las organizaciones encontradas no están articuladas entre sí, aún más, existe una OM aislada de las demás.

Como hemos visto en este primer escalón, la reconstrucción de una OM en un texto, consiste en la presentación y el análisis de los elementos de la OM, aunque no esté forma explícita pero que podemos evidenciarlos, y así reconstruirlo. Existen trabajos de este tipo, por ejemplo, Carrillo (2013), Gonzales (2014), Quentasi (2015), Valentin (2016) y Tiburcio (2017).

Un segundo escalón, es construir una OM de un objeto determinado, que consiste en proponer los elementos de la praxeología que sean acorde en la institución elegida y que articule las OM existentes en la institución. Para realizar este objetivo la TAD, nos ofrece la modelización matemática.

Construcción de una OM por medio de la Modelización Matemática

Desde la TAD, una problemática es la modelización de los conocimientos matemáticos, por la cual Bolea (2002) indica que dicha modelización matemática se desarrolla teniendo en cuenta cuatro etapas o estadios fundamentales.

En el *primer estadio*, consiste en tomar una situación problemática de índole intramatemática o extramatemática y las cuestiones que surgen en el sistema inicial y que en un primer momento no tienen respuesta inmediata. Por ejemplo, en Bustamante (2017), se toma como sistema inicial: problemas aritmético-figural, en la institución: primer año de primaria, donde surge el siguiente problema:

s0*: Completa la secuencia.*



Fuente: Libro de texto Matemática 1 (Perú, 2012b, p. 40)

En esta primera etapa, los estudiantes no tienen herramientas para da solución al problema. Por esa razón, debemos construir una forma para da solución al problema, entonces identificaremos y definiremos las variables involucradas en el problema y las relaciones entre ellas, esto es el s*egundo estadio* (construcción del modelo). En Bustamante (2017) identifica y define el primer elemento y el patrón de la sucesión para obtener el siguiente término de la sucesión, por ejemplo, en la tarea ***s0***:

$t_2 = t_1 + r$.

Siguiendo esta idea, el autor propone la técnica que consiste de discursos verbales que, partiendo de los términos conocidos y mediante el patrón permiten calcular el término desconocido. Esto es el *tercer estadio (trabajo del modelo)*, pues en esta parte se basa en la manipulación e interpretación de las relaciones establecidas y buscar responder las cuestiones formuladas inicialmente. Por ejemplo, en la manipulación del primer elemento y sumarlo 100 nos lleva al segundo elemento, es decir, el trabajo del modelo sería:

La resolución aritmética (verbal) de este problema sería:

De 0 a 100, la diferencia es 100 y de 100 a 200 también es 100, entonces el patrón es sumar 100.

Entonces los elementos que siguen de la sucesión son: 300 y 400. (Bustamante, 2017, p. 58).

Podemos interpretar que el trabajo del modelo propuesto consiste en partir de términos conocidos y mediante el patrón, que está formada por operaciones aritméticas de una cantidad fija o "movimientos" de una figura, permiten calcular el término desconocido Para justificar la técnica consideraremos las propiedades físicas que se puedan medir y el principio de contar, y la teoría de números naturales.

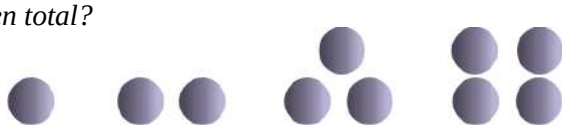
Con esta técnica podemos da solución a otros problemas que surge en este sistema inicial, y podemos indicar que estamos en el c*uarto estadio (producción de problemas nuevos),* que es enunciar nuevos problemas que antes no tiene solución respecto al sistema inicial, pero con el nuevo modelo encontramos solución. Por ejemplo, los siguientes problemas:

q0: ¿Cuál es la figura que sigue?



Fuente: Bustamante (2017, p. 58)

c0**:** *¿Cuántas bolitas hay en total?*



Fuente: Bustamante (2017, p. 60)

Por lo tanto, los problemas anteriores son ilustraciones de las tareas que componen la OM que se obtuvo del sistema inicial y que denominaremos **S**:

S= OM en torno a problemas de sucesión aritméticos-figural + aplicación de PAF (forma retórica).

Figura 5. Organización Matemática: S.

Fuente: Bustamante (2017, p. 60)

En resumen, S es la culminación de la modelización matemática del sistema inicial, como se muestra en la Figura 2.

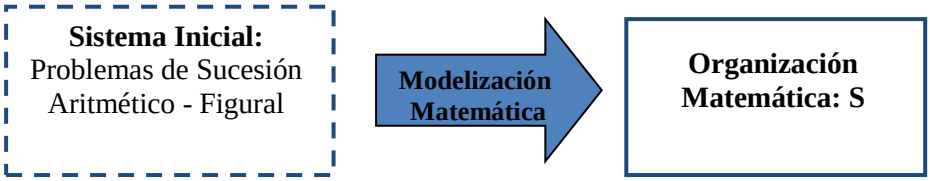


Figura 6. Organización Matemática: S

Fuente: Bustamante (2017, p. 58)

Además, se consideró como el bloque *tecnológico–teórico* las propiedades físicas que se puedan medir y el principio de contar, y la teoría de números naturales.

Conclusiones

Se ha mostrado la reconstrucción de una OM existente en el texto de Matemática 1 Primaria, la cual no estaba bien delimitada, y la desarticulación de esta OM con otra OM existente en el texto de Matemática 2 Primaria en el caso de sucesiones, pues la técnica de la segunda OM no es la ampliación ni adjunta la técnica de la primera OM.

Además, se muestra una construcción de una OM que articula las dos OM encontradas en los textos revisados, la cual se realizó desde el marco de la TAD que nos ofrece herramientas para el estudio de un conocimiento matemático.

Referencias

Bolea, P. (2002). *El Proceso de Algebrización de Organizaciones Matemáticas Escolares* (Tesis doctoral). Universidad de Zaragoza, España.

Bustamante, E. (2017). *Un modelo epistemológico de referencia asociado a las sucesiones en la educación básica regular del Perú.* (Tesis de Maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima.

Carrillo, F. (2013). *Un estudio de las organizaciones matemáticas del objeto funcion cuadrática en la enseñanza superior*. (Tesis de Maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didáctique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.

Gascón, J. (1994). Un nouveau modele de l'algebre elementaire comme alternative à l' «arithmétique généralisée». *Petit 10*(37), 43-63.

Gonzales, C. (2014). *Una praxeología matemática de proporción en un texto universitario.* (Tesis de Maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima. Recuperado de http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/5225

Navarro, P. C. (2007). *Un Estudio sobre la Desarticulación entre la Semejanza y la Trigonometría en el Bachillerato.* (Tesis de Maestría). Universidad de Sonora, México.

Perú, Ministerio de Educación (2009a). *Diseño curricular nacional de la educación básica regular*. Lima.

Perú, Ministerio de Educación (2012b). *Matemática 1 Primaria.* Lima: Norma.

Perú, Ministerio de Educación (2012c). *Matemática 2 Primaria*. Lima: Norma.

Quentasi, E. (2015). *Análisis de una organización matemática de la función y la proporcionalidad directa en un libro de texto de matemáticas de educación secundaria.* (Tesis de Maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima.

Sierra, T. (2006). *Lo Matemático en el diseño y análisis de Organizaciones Didácticas. Los Sistemas de Numeración y la Medida de Magnitudes Continuas.* Tesis Doctoral. Universidad Complutense de Madrid.

Tiburcio, J. (2017). Organización matemática de la función lineal y función afín en un libro de texto de segundo año de educación secundaria. (Tesis de Maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima.

Valentin, M. (2016). *Organización praxeológica del objeto gráficos estadísticos en el texto de tercer grado de educación primaria del ministerio de educación.* (Tesis de Maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima.

Volver al índice de autores

4.2.2. Los sistemas de ecuaciones lineales como instrumento de modelización en la secundaria

Magaly Ethel Campos Motta
Rosa Cecilia Gaita Iparraguirre
Pontificia Universidad Católica del Perú-IREM, Perú

Resumen

El presente reporte forma parte de un trabajo más amplio, cuyo objetivo fue construir un modelo epistemológico de referencia para que los sistemas de ecuaciones lineales cumplan el rol de instrumento de modelización en la educación secundaria y verificar además si satisfacen los rasgos característicos en el sentido de Bolea. En esta presentación nos centraremos en mostrar qué significa adoptar el álgebra como instrumento de modelización algebraica, a través de un caso concreto como son los sistemas de ecuaciones lineales. El presente reporte se enmarca en el ámbito de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), de la que se consideran algunos elementos teóricos como son la modelización algebraica y los rasgos que la caracterizan. Asimismo, consideraremos a la TAD como método de investigación. Como resultado se obtuvo que es posible realizar una modelización algebraica a través del tratamiento de los sistemas de ecuaciones lineales

Introducción

En las tres últimas décadas diversos investigadores del ámbito de la didáctica de la matemática, se han dedicado a estudiar las diferentes posturas del álgebra. Chevallard (1994) hizo un estudio de lo que es el álgebra, encontrando así que en un inicio esto era concebido como todo aquello que no era geometría. Con el pasar del tiempo, esta idea fue cambiando y más bien el álgebra era entendida como todo lo que giraba en torno a la teoría

de ecuaciones. Posteriormente, Gascón (1994) admite la presencia de una nueva forma de ver el álgebra, el mismo que resultaba de la generalización de las prácticas aritméticas.

Por otro lado, Bolea, Bosch y Gascón (2001) conciben el álgebra como un instrumento de modelización, el mismo que pasa a ser el nuevo modelo del álgebra elemental en el ámbito de la TAD. En esta misma línea, Bolea (2002) establece los rasgos para caracterizar este nuevo modelo.

Siguiendo la misma idea, es preciso señalar que nuestro reporte va considerar el álgebra como instrumento de modelización, lo que significa trabajar con una organización matemática inicial para que posteriormente esta sea ampliada en el sentido de Chevallard, según lo manifiesta Sierra (2006).

En el presente reporte, mostraremos los pasos necesarios para llevar a cabo una modelización algebraica tomando en cuenta los sistemas de ecuaciones lineales visto en el trabajo de Campos (2017).

Asimismo, cabe señalar que Bolea (2002) considera cuatro estadios para llevar a cabo una modelización algebraica, los cuales detallaremos a continuación según lo manifiesta la autora. El ***primer estadio*** trata de la problemática inicial, el cual consiste en tomar una situación problemática de índole intramatemática o extramatemática, con las cuestiones que surgen acerca del sistema inicial y que en un primer momento no tienen respuesta inmediata. El ***segundo estadio***, se encarga de la construcción del modelo matemático en sí, en donde se define el sistema, así como las variables y las relaciones que existen entre ellas. En este estadio, la investigadora señala que las técnicas empleadas para poder construir dicho modelo pueden organizarse por niveles de complejidad creciente.

El ***tercer estadio***, está relacionado al trabajo del modelo; esto significa que ahora pueden ser resueltas las diversas cuestiones que en un inicio no tenían respuesta inmediata. Finalmente, la autora señala que el ***cuarto estadio***, tiene que ver con la posibilidad de enunciar problemas nuevos, cuya solución no hubiese sido posible si no hubiésemos ampliado el sistema inicial.

Asimismo, consideramos que los sistemas de ecuaciones lineales son importantes como objeto de estudio, ya que de acuerdo al Currículo Nacional de la Educación Básica Regular del Perú (Ministerio de Educación del Perú, 2016), su estudio ocupa un lugar significativo

dentro del nivel secundario de nuestro país, ya que éste tema es transversal a lo largo de la educación secundaria. Dicho todo esto, podemos afirmar que este es un tema relevante en el desarrollo de los contenidos específicos de las ciencias. Debido a ello, tiene sentido hacer nuestro estudio en torno al objeto matemático sistemas de ecuaciones lineales, ya que hay una serie de investigaciones en la educación matemática que avalan la importancia de su estudio desde los diferentes enfoques tanto del nivel secundario como del nivel universitario, según lo manifiesta Arenas (2013).

Dicho todo esto, es preciso señalar que en este reporte vamos a usar a los sistemas de ecuaciones lineales como tema para ejemplificar la concepción del álgebra como instrumento de modelización algebraica.

La Modelización Algebraica:

La modelización algebraica se desarrolla teniendo en cuenta los estadios ya descritos anteriormente, según lo manifiesta Bolea (2002); lo cual va ser ejemplificado con la modelización algebraica llevada a cabo en el trabajo de Campos (2017) de la siguiente manera:

Primer estadio

a) El sistema a modelizar:

Primero debemos establecer una organización matemática, pues la modelización algebraica actúa sobre una organización matemática y no sobre cualquier sistema inicial.

Sistema Inicial: Organización Matemática S

Esta organización matemática S es generada por los tipos de tareas cuyo planteamiento puede ser representado de la siguiente manera:

$$\begin{cases} AX + Y + C = 0 \\ Y + F = 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} AX + Y + C = 0 \\ X + F = 0 \end{cases}$$

donde $A, C, F \in \mathbb{R}$ y son constantes conocidas, tal que $A \neq 0$. Por ejemplo, el siguiente tipo de tareas:

T_1 : Dada la ecuación de la recta L y un punto $P \in L$. Si se conoce una de las coordenadas del punto P, determine el valor de la otra coordenada.

t_1 : Sea la ecuación de la recta $L: y = -x - 2$. Si el punto $P(a,1) \in L$, determine el valor de a.

La técnica asociada al sistema inicial S se basa en una cadena de operaciones aritméticas y en la sustitución. Con respecto al bloque tecnológico-teórico podemos ver que se reduce esencialmente al empleo de las magnitudes (longitud, ángulo plano, etc.), de las operaciones y relaciones que existen entre ellas; así como las propiedades que existen en un determinado marco o contexto de la matemática.

Observamos que esta OM no tiene la necesidad de usar la noción de sistema de ecuaciones lineales, pues la técnica de esta OM es a través de operaciones aritméticas y luego el empleo de la sustitución. Además, la técnica puede ser reducida al uso de la siguiente fórmula:

$$X = \frac{F - C}{A} \quad , \quad Y = -F \qquad (f1)$$

b) Las cuestiones generales

Vemos que en la OM inicial aparecen problemas en donde la técnica fracasa, por ejemplo, como no podemos determinar el valor de $"b"$ a través de operaciones aritméticas en el siguiente problema:

t_2 : En el monomio $M(x,y) = x^{2a-b}y^{5a+2b}$. Si $G.A. = 30$ y $G.R.(x) = 6$, determine el valor de $a + b$.

Esta tarea la podemos plantear de la siguiente manera:

$$\begin{cases} 7a + b - 30 = 0 \\ b + (-2a + 6) = 0 \end{cases}$$

en donde si aplicamos la técnica (f1) de la OM inicial S obtenemos:

$$a = \frac{36 - 2a}{7};\ b = 2a - 6.$$

con lo cual se puede observar que no podemos dar solución al problema.

Segundo estadio

c) – d) La definición del sistema y el establecimiento de las relaciones entre las variables.

En este estadio se define una serie de pasos para poder resolver el problema planteado, tal y como lo define Campos (2017) en su trabajo. Entre ellas, además se definen las restricciones que debe satisfacer el problema.

Tercer estadio

e) El trabajo manipulativo

Considerando el problema anterior, vamos a manipularlo para poder así obtener una técnica que nos permita dar solución a dicho problema.

Sea $M(x,y) = x^{2a-b}y^{5a+2b}$

Como $G.A. = 30$ y $G.R.(x) = 6$, se tiene:

$2a - b + 5a + 2b = 30$ y $2a - b = 6$

Esto es $7a + b = 30$ y $b - 2a = -6$

Entonces obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 7a + b - 30 = 0 \\ -2a + b + 6 = 0 \end{cases}$$

Luego $\begin{cases} 7a + b - 30 = 0 \\ b = 2a - 6 \end{cases}$

Luego $\begin{cases} 7a + 2a - 6 - 30 = 0 \\ b = 2a - 6 \end{cases}$

Entonces $\begin{cases} a = 4 \\ b = 2 \end{cases}$

Por lo tanto $a + b = 6$.

f) La interpretación del trabajo

A partir del trabajo manipulativo que se llevó a cabo obtenemos respuestas a las tareas cuyo planteamiento viene dado por un sistema que tiene la siguiente forma:

$$\begin{cases} AX + BY + C = 0 \\ DX + Y + F = 0 \end{cases} \quad ; \quad A \neq B.D \ .$$

Cuarto estadio

Entonces la tarea trabajada (En el monomio $M(x,y) = x^{2a-b}y^{5a+2b}$. Si $G.A. = 30$ y $G.R.(x) = 6$, determine el valor de $a + b$), se incorpora a la organización.

Dicho todo esto, nuestro objetivo es mostrar la modelización algebraica respecto a un sistema inicial. De aquí, podemos ver que surge la organización matemática S_1 generada por los tipos de tareas cuyo planteamiento puede ser representado de la siguiente manera:

$$\begin{cases} AX + BY + C = 0 \\ DX + Y + F = 0 \end{cases} \quad ; \quad A \neq B.D$$

donde $A,\ B,\ C,\ D,\ F \in \mathbb{R}$ y son constantes conocidas.

Técnica: Operaciones de expresiones algebraicas y sustitución de una expresión a otra.

Tecnología: Propiedades de las magnitudes y de las relaciones que existen entre ellas, teniendo presente las propiedades que existen en cada uno de los contextos de la matemática, así como las propiedades de expresiones algebraicas.

Teoría: Teoría de ecuaciones.

Esta modelización matemática es una ***modelización algebraica*** pues modeliza explícitamente y materializa la técnica de S_1, haciendo parte la técnica de S a S_1 para

provocar el rápido desarrollo de las mismas. Por ejemplo, en esta organización matemática S_1, podemos ver que la técnica puede ser reducida a la siguiente fórmula:

$$X = \frac{B.F - C}{A - B.D} \quad , \qquad Y = -F - DX \qquad (f2)$$

También observamos que no tan solo la técnica se incorpora a la nueva técnica sino también el bloque tecnológico-teórico, los cuales son los rasgos característicos de la modelización algebraica.

En el trabajo de Campos (2017) se efectúa este proceso de modelización algebraica hasta la organización matemática S_4.

Rasgos Característicos de la Modelización Algebraica

Una vez que se ha elaborado una propuesta de una organización matemática cada vez más amplia y de complejidad creciente, es necesario que sea validada. Para ello, vamos a apoyarnos en los rasgos característicos propios de una modelización algebraica según lo manifiesta Bolea (2002).

Primer Rasgo Característico

El primer rasgo característico tiene que ver con la modelización tanto explícita como materialmente de las técnicas matemáticas que forman parte de la organización matemática a modelizar. Esto significa que una vez que sea llevada a cabo dicha modelización, las técnicas pueden ser tratadas como nuevos objetos matemáticos lo cual sin lugar a dudas posibilitará y provocará incluso el rápido desarrollo de las mismas.

Con respecto al primer rasgo característico de nuestra propuesta, Campos (2017) señala que la técnica de S_3 permite modelizar la técnica del sistema inicial S, en el sentido de que la técnica en S_3 resulta de la generalización de la técnica dada en el sistema inicial S ya que resuelve así los tipos de problemas que pueden ser catalogados a lo largo de los diferentes sistemas que hemos considerado en nuestra propuesta para poder ir del sistema inicial S y llegar al sistema S_3.

Asimismo, en el sistema S_3 una vez aplicada la técnica, se puede establecer fórmulas, la cual se manipula como un objeto matemático independiente, lo cual permitirá el rápido desarrollo de las mismas. Por ejemplo, Campos (2017) indica que en el caso de la organización matemática S_2 se tiene que:

$$X = \frac{B.F - C.E}{A.E - B.D}.$$

Segundo Rasgo Característico

Bolea (2002) señala que el segundo rasgo característico se refiere a la modelización de todos los componentes de la organización matemática que hace el papel de sistema. La autora manifiesta que no solo se limitan a modelizar de manera aislada alguno de los componentes de la organización matemática.

Con respecto al segundo rasgo característico, las organizaciones matemáticas presentadas que han sido algebrizadas a lo largo de los diferentes sistemas, resultan de prolongar y extender la organización matemática inicial, donde el modelo final se basa precisamente en ampliar todos los componentes de la organización matemática:

Campos (2017) señala por ejemplo que:

S_2 : generado por los tipos de tareas cuyo planteamiento va ser representado de la siguiente manera:

$$\begin{cases} AX + BY + C = 0 \\ DX + EY + F = 0 \end{cases} \quad ; \quad AE - BD \neq 0$$

donde $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$, las cuales son constantes conocidas.

Técnica: Para materializar la nueva técnica, debemos utilizar ecuaciones equivalentes, en el último sistema y operaciones aritméticas, así, podemos escribirlo en términos de la organización matemática S_1 .

Tecnología: Relaciones y/o propiedades que existen en cada contexto de la matemática, así como las propiedades de expresiones algebraicas y las definiciones de las ecuaciones equivalentes.

Teoría: Teoría de las ecuaciones.

S_3: generada por los tipos de tareas cuyo planteamiento será representado de la siguiente manera:

$$\begin{cases} AX + BY + C = 0 \\ DX + EY + F = 0 \end{cases}$$

donde $A, B, D, E, F \in \mathbb{R}$, y son constantes conocidas, y C es el parámetro que toma valores en $\mathbb{R}$.

Técnica: La técnica que podemos emplear para la OM ampliada, S_3, se basa en la sustitución, las operaciones de expresiones algebraicas, el uso de las ecuaciones equivalentes y además encontrar un conjunto específico del cual se puede obtener los valores de los parámetros, o sea de los términos desconocidos.

Tecnología: Con respecto a la tecnología podemos decir que el uso de esta técnica está respaldado por las ecuaciones equivalentes, y las operaciones en los números reales, ya que $\mathbb{R}$ es un cuerpo.

Teoría: Teoría de ecuaciones y teoría de cuerpos.

Además, las características de la modelización como instrumento de modelización son las siguientes, las mismas que son presentadas en la modelización realizada en el trabajo de Campos (2017):

MA1: Como hemos podido ver, los sistemas de ecuaciones lineales es un instrumento para resolver problemas de sistemas conocidos matemáticos o extra matemáticos: aritméticos, geométricos, físicos, comerciales, de la vida cotidiana, etc.

MA3: El instrumento algebraico permite plantear y resolver problemas de diferentes ámbitos matemáticos (aritméticos, geométricos, combinatorios, comerciales, etc.) que son muy difíciles de plantear y resolver sin la noción de sistemas de ecuaciones lineales.

MA5: Algunas de las mejores situaciones para introducir los sistemas de ecuaciones lineales son los problemas en los cuales intervienen dos variables desconocidas o más y que, por ello, no pueden resolverse mediante técnicas directas aritméticas o geométricas.

MA6: Dado que los sistemas de ecuaciones lineales surgen inicialmente como herramienta de modelización de sistemas matemáticos o extra matemáticos, es necesario conocer mínimamente el sistema que se quiere modelizar y, en particular, las limitaciones del trabajo dentro de este sistema, que en este caso viene dado por las restricciones las cuales dependerán del ámbito en el que se trabaje.

Conclusiones y principales resultados

Por otro lado, podemos observar que nuestro objeto matemático sistemas de ecuaciones lineales es un instrumento de modelización, ya que ha funcionado como instrumento para modelizar los diferentes tipos de tareas en los diversos ámbitos de la matemática del nivel secundario, como lo hemos podido mostrar al hacer explícita la construcción de la organización matemática de complejidad creciente.

En este sentido, cabe mencionar que nuestro interés es modelizar los diferentes tipos de tareas que se encuentran relacionados a otros temas que nos generan sistemas de ecuaciones lineales y puedan ser reducidos a los diferentes sistemas que hemos considerado en nuestra propuesta, como por ejemplo dentro del ámbito de la geometría analítica, problemas relacionados a las funciones que nos obligan a usar finalmente los sistemas de ecuaciones lineales, etc.

Dicho esto, podemos finalmente concluir que los sistemas de ecuaciones lineales cumplen ese rol de instrumento modelizador.

Referencias

Arenas, B. (2013). *Las ecuaciones lineales, desde situaciones cotidianas* (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (2001). La Transposición Didáctica de Organizaciones Matemáticas en Proceso de Algebrización: El caso de la Proporcionalidad. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *21*(3), 247-304.

Bolea, P. (2002). *El Proceso de Algebrización de Organizaciones Matemáticas Escolares*. Tesis Doctoral. Universidad de Zaragoza. España.

Campos, M. (2017). *Los Sistemas de Ecuaciones Lineales como instrumento de modelización en la Secundaria*. Tesis de Maestría. Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima - Perú.

Chevallard, Y. (1994). Enseignement de l'algebre et transposition didáctique. *IREM d' Aix – Marseille, 52* (2), pp. 175-234.

Gascón, J. (1994). Un nouveau modele de l'algebre elementaire comme alternative à l' «arithmétique généralisée». *Petit x*, 37, 43-63.

Ministerio de Educación del Perú (2016). Currículo Nacional de Educación Básica Regular. Proceso de Articulación. Recuperado de:

http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-2016-2.pdf

Sierra, T. (2006). *Lo Matemático en el diseño y análisis de Organizaciones Didácticas. Los Sistemas de Numeración y la Medida de Magnitudes Continuas.* Tesis Doctoral. Universidad Complutense de Madrid. España.

Volver al índice de autores

4.2.3. Considerações merleau-pontyanas na educação matemática: os focos de investigação evidenciados entre 2013 e 2017

Elton de Andrade Viana
Ana Lucia Manrique
Pontificia Universidad Católica de São Paulo, Brasil

Resumen

Considerando uma discussão, sob o prisma da Fenomenologia da Percepção desenvolvida por Maurice Merleau-Ponty (1908-1961), é possível observar que a Educação Matemática tem demonstrado interesse pelos postulados deste filósofo por meio de pesquisas que estão sendo realizadas no território brasileiro. Com o objetivo de identificar o foco de investigação das pesquisas fundamentadas nos postulados de Merleau-Ponty e na área de Educação Matemática, elaboramos um estudo que permite a visualização do cenário de pesquisa dos últimos cinco anos no que se refere a utilização deste filósofo como referencial teórico. A pesquisa tem uma abordagem qualitativa e a produção de dados se dá por meio de uma análise documental. Os resultados demonstraram a existência de três focos investigativos: o aluno, o professor e o ensino, sendo o professor o foco de investigação com maior evidência nos trabalhos considerados até então

Introdução

Atualmente, as obras do filósofo Merleau-Ponty (1908-1961), têm contribuído para as pesquisas realizadas em diferentes áreas das ciências, sendo a Educação Matemática, um campo onde aos poucos tem emergido reflexões importantes sobre tais contribuições. Uma das principais contribuições de Merleau-Ponty é no que se refere a postura fenomenológica de pesquisa, uma abordagem que tem se tornado presente, mesmo que de forma ainda tímida, em algumas pesquisas desenvolvidas na Educação Matemática (BORBA, 2004; BICUDO 2010a; BICUDO, 2011).

A fenomenologia merleau-pontyana no campo da Educação Matemática, permite tomar a Matemática não como um fato, ou seja, como um dado enunciado em termos científicos, mas sim observar a Matemática como um campo em que precisamos compreender seu respectivo sentido como fato ou enunciado. Tal compreensão se dá em níveis diferenciados da experiência vivida, nos próprios atos realizados, em seus desdobramentos e expressões.

Como destaca Bicudo (2010), a postura fenomenológica, inspirada nas obras de Merleau-Ponty, permite que uma operação matemática seja percebia e compreendida tanto nos atos atualizados do movimento da consciência, de modo atendo e consciente, como também nos movimentos pelo qual reunimos elementos sem nos dar conta do que estamos fazendo, e que por sua vez, seria a denominada 'síntese passiva'.

É possível observar que as contribuições de Merleau-Ponty têm se constituído para alguns educadores matemáticos uma abordagem de pesquisa que se opõe a postura positivista/naturalista, onde se trabalha com fatos e não se questiona por exemplo o que é uma operação matemática, se limitando a apenas 'fazê-la'. As obras merleau-pontyanas permitiram a potencialização de uma postura fenomenológica nas pesquisas desenvolvidas em diferentes campos da ciência, e na Educação Matemática não tem sido diferente.

É neste novo movimento de reflexão e abordagem científica, o fenomenológico, que encontramos como zona de inquérito o seguinte questionamento: como os postulados do filósofo Maurice Merleau-Ponty estão sendo utilizados nas pesquisas desenvolvidas na área da Educação Matemática nos últimos cinco anos no que se refere ao foco de investigação?

Atualmente, temos como referencial teórico, tanto na investigação que culminou nos dados aqui analisados como nas discussões e estudos realizados no grupo de pesquisa brasileiro *Professor de Matemática: formação, profissão, saberes e trabalho docente* da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), e que é coordenado pela Profa. Dra. Ana Lúcia Manrique, a obra "Fenomenologia da Percepção", do filósofo Maurice Merleau-Ponty (1908-1961), tendo em vista a forma como tal referencial tem se evidenciado em alguns grupos de pesquisa em Educação Matemática e fundamentado a postura fenomenológica de pesquisa assumida por alguns educadores matemáticos.

Metodologia adotada

O trabalho aqui apresentado é compreendido como uma pesquisa de natureza qualitativa com um foco investigativo, já que busca traçar um perfil das pesquisas ocorridas nos últimos anos no âmbito da Educação Matemática. São as publicações de caráter científico indexadas na CAPES Periódicos ou no Repositório Científico de Acesso Aberto de Portugal (ACAAP), que se constituíram o universo de pesquisa que consideramos para a realização deste trabalho.

A trajetória metodológica se desenvolve com uma abordagem de análise documental, sendo os documentos considerados na pesquisa as publicações disponibilizadas no período para consulta online até o dia 08 de abril de 2018.

A partir dos documentos que constituem nosso universo de pesquisa, foram identificados os documentos que se constituem como objeto de análise no desenvolvimento das reflexões sobre como os postulados do filósofo Maurice Merleau-Ponty (1908-1961) têm contribuído para o desenvolvimento das pesquisas em Educação Matemática e com qual foco de investigação (o professor, o aluno ou o processo de ensino e aprendizagem). Para a identificação dos documentos que participaram das reflexões, são consideradas quatro etapas que a partir de parâmetros criteriosamente definidos, desembocam no objeto de análise que consideramos na produção deste trabalho (Diagrama 1).

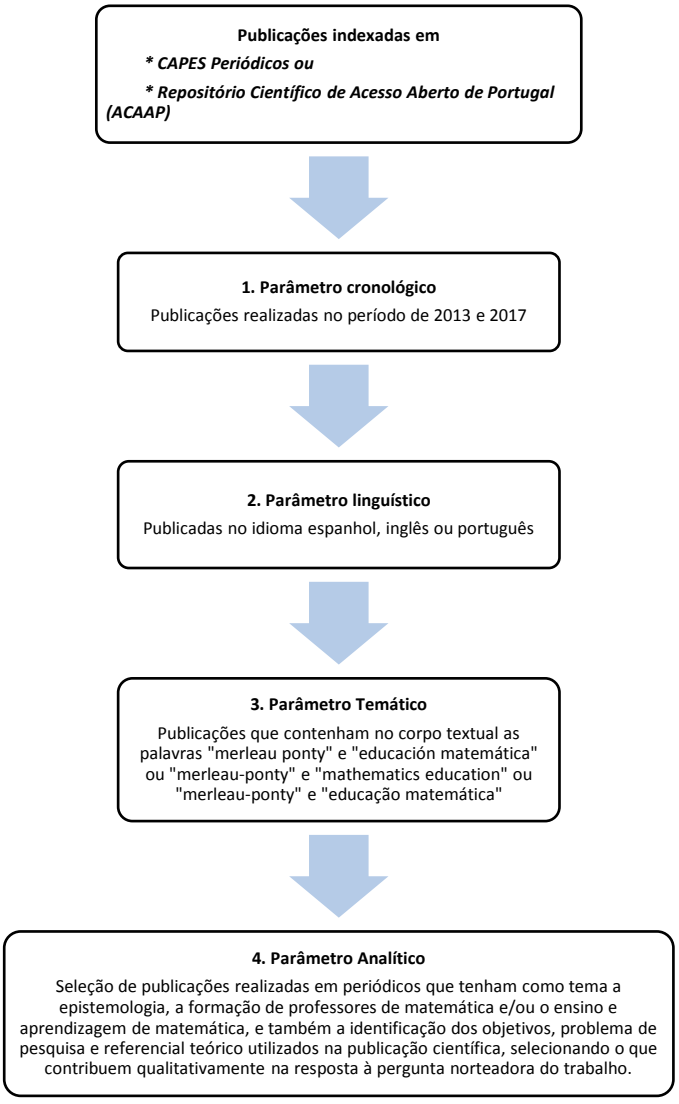


Diagrama 1: Etapas para identificação do objeto de análise.

Após a identificação do objeto de análise, foram considerados no desenvolvimento das reflexões, os cinco elementos propostos por Cellard (2008) em uma análise documental: o contexto, o autor, a autenticidade e a confiabilidade do texto, a natureza do texto, como também os conceitos-chave e a lógica interna do texto.

CÓD.	AUTOR	TÍTULO	ANO DE PUBLICAÇÃO	PERIÓDICO
A1	ROTH, Wolff-Michael; MAHEUX, Jean-François	The emerging and emergent presente: a view on the indeterminate nature of mathematics lessons	2014	Mathematics Education Research Journal, v. 26(2), p. 325-352
A2	SEIDEL, Denilson José; ROSA, Maurício	Possibilidades da percepção fenomenológica nos procedimentos investigativos da pesquisa qualitativa em Educação Matemática	2014	Educação Matemática Pesquisa, v. 16, n. 2, p. 407-428
A3	COLES, Alf	On enactivism and language: towards a methodology for studying talk in mathematics classrooms	2015	ZDM Mathematics Education, v. 47(2), p. 235-246
A4	KHAN, Steven; FRANCIS, Krista; DAVIS, Brent	Accumulation of experience in a vast number of cases: enactivism as a fit framework for the study of spatial reasoning in mathematics education	2015	ZDM Mathematics Education, v. 47(2), p. 269-279
A5	METZ, Martina; SIMMT, Elaine	Researching mathematical experience from the perspective o fan empathic	2015	ZDM Mathematics Education, v. 47(2), p. 197-209

		second-person observer		
A6	REID, David; MGOMBELO, Joyce	Survey of key concepts in enactivist theory and methodology	2015	ZDM Mathematics Education, v. 47(2), p. 171-183
A7	SANTOS, Marli Regina; BICUDO, Maria Aparecida Viggiani	Uma experiência de formação continuada com professores de arte e matemática no ensino de geometria	2015	Bolema, v. 29, n. 53, p. 1329-1347
A8	ZAGORIANAKOS, Andonis; SHVARTS, Anna	The role of intuition in the process of objectification of mathematical phenomena from a Husserlian perspective: a case study	2015	Educational Studies in Mathematics, v. 88(1), p. 137-157
A9	COLES, Alf; BROWN, Laurinda	Task design for ways of working: making distinctions in teaching and learning mathematics	2016	Journal of Mathematics Teacher Education, v. 19(2), p. 419-435
A10	MACKRELL, Kate; PRATT, Dave	Constructionism and the space of reasons	2017	Mathematics Educational Research Journal, v. 29, p. 419-435

Quadro 1: Publicações consideradas para a análise documental.

Análise dos dados

O referencial teórico utilizado nas publicações consideradas em nossa análise, foram os postulados sobre a fenomenologia da percepção segundo Merleau-Ponty, sendo este utilizado como ferramenta para a compreensão dos diferentes aspectos que constituem o movimento didático de ensino da matemática. Na análise, conseguimos observar que as pesquisas se concentram em três núcleos de investigação: o professor, o aluno e a dinâmica de ensino e aprendizagem. Cada um destes núcleos, se apresentaram nas publicações como o cerne da pesquisa que estava a ser realizada na educação matemática.

Partimos do critério de categorização que para constituir um núcleo de investigação, o fato de a publicação utilizar como referencial teórico a fenomenologia da percepção de Merleau-Ponty para entender as ações, o comportamento e/ou o processo do que estamos denominando como núcleo de investigação. Nesta categorização, foi possível observar que algumas publicações utilizaram o referencial teórico para o entendimento de mais de um núcleo de investigação, o que permitiu a identificação de diferentes conexões no procedimento de pesquisa adotado. A categorização a partir deste critério é o que apresentamos no diagrama 2.

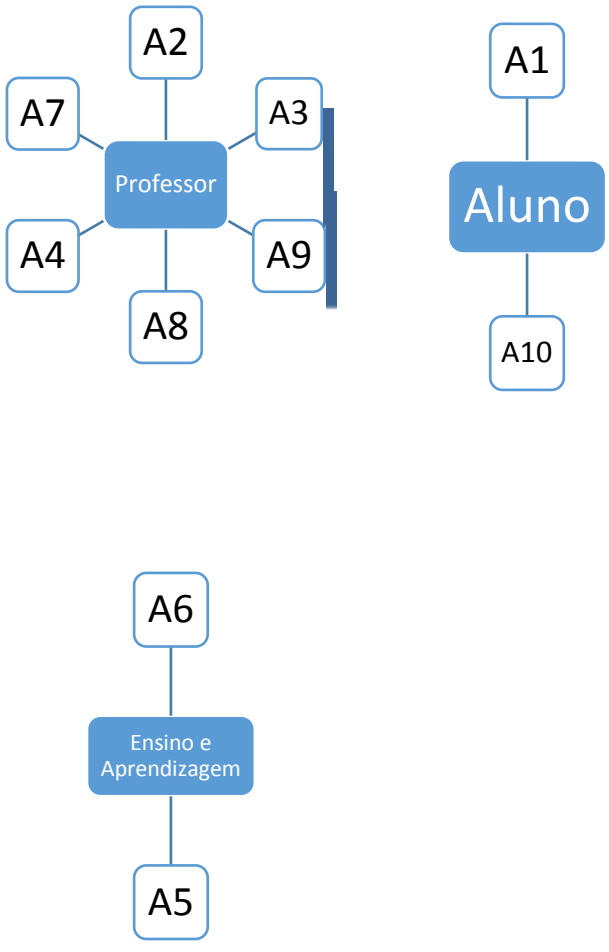


Diagrama 2: Distribuição das pesquisas nas três categorias

Nos trabalhos entendidos como tendo núcleo de investigação o Professor, foi possível observar que uma abordagem fenomenológica de pesquisa qualitativa e sob a perspectiva merleau-pontyana, se constituiu como a melhor forma de alcançar um entendimento das ações didática do professor não de forma isolada e individual, mas de forma articulada com o universo em que se dá tal ação. Observamos aqui a possibilidade de entender as práticas docentes dos professores de matemática e que são reveladas pelas diferentes formas de expressão, configurando assim a percepção de sentidos e significados que contribuem para responder a interrogação da pesquisa.

Quando as pesquisas que têm como núcleo de investigação o Aluno, as obras de Merleau-Ponty têm contribuído para a promoção de novas reflexões não apenas no âmbito investigativo com uma abordagem fenomenológica de pesquisa, mas também para o entendimento de como se dá o desenvolvimento escolar das crianças e adolescentes nas aulas de Matemática. A pesquisa identificada aqui como A1 por exemplo, tem no seu teor textual, uma discussão interessante e curiosa na esfera acadêmica sobre como Merleau-Ponty, permite um olhar mais avançado e atual sobre questões importantes do desenvolvimento cognitivo, indo além do que propõe Jean Piaget nos seus tratados epistemológicos. Observamos aqui um ponto digno de pesquisas que possam aprofundar o tema e potencializar uma discussão epistemológica própria para a Educação Matemática.

No núcleo de investigação Ensino e Aprendizagem, foi possível observar na leitura das pesquisas que neste núcleo se concentraram, uma preocupação em trazer as obras de Merleau-Ponty não como um marco referencial ou o cerne teórico da investigação, mas sim como um referencial importante que articulado com outros, permite uma melhor análise do processo de ensino de aprendizagem nas aulas de Matemática. Na pesquisa identificada como A6, por exemplo, foi realizada um entrelaçamento teórico entre os postulados merleau-pontyanos com práticas emergentes do mundo contemporâneo como mindfulness, e já na pesquisa A5, uma articulação entre os pensamentos de Merleau-Ponty com a filosofia do implícito postulada pelo filósofo Eugene Gendlin (1926-2017).

Considerações finais

Na análise das dez publicações selecionadas neste trabalho, foi possível observar que os postulados sobre percepção do filósofo Merleau-Ponty têm se constituído como um importante referencial teórico no desenvolvimento de pesquisas em Educação Matemática, no entanto, ao observarmos o universo de pesquisa adotado pelos pesquisadores nos

últimos cinco anos, ficou evidente a utilização de tais postulados principalmente no âmbito da formação inicial ou continuada de professores de matemática, tendo em vista que quando as pesquisas se concentram no processo de ensino e aprendizagem, se articulam com diferentes outras correntes teóricas ou referenciais.

Esta observação nos encaminha a alguns questionamentos que realizamos como últimas considerações neste trabalho: como os alunos estão percebendo (no sentido merleau-pontyano) a Matemática? Quais são as principais contribuições que a fenomenologia da percepção segundo postulada por Merleau-Ponty oferece para as atuais pesquisas em Educação Matemática, as quais se defrontam com alunos cada vez mais considerados na sua diversidade? Estas questões propõem uma reflexão sobre como a Educação Matemática pode dialogar com a filosofia merleau-pontyana nos próximos anos, pois acreditamos que uma necessidade é cada vez mais real atualmente: precisamos entender o aluno na sua individualidade, pois a sociedade mudou em diferentes aspectos, e junto a eles, a forma como cada ser humano vê, sente e percebe o que o cerca. Como educadores matemáticos, é nosso dever entender como se dá esta percepção dos objetos de conhecimento com os quais nos ocupamos no cotidiano escolar.

Referencias

Bicudo, M. A. V. (2010a). *Filosofia da educação matemática: fenomenologia, concepções, possibilidades didático-pedagógicas*. São Paulo: Editora UNESP.

Bicudo, M. A. V. (2010b) Filosofia da Educação Matemática segundo uma perspectiva fenomenológica. En BICUDO, M. A. V. Bicudo. (Org.), *Filosofia da educação matemática: fenomenologia, concepções, possibilidades didático-pedagógicas*. pp. 23-48. São Paulo: Editora UNESP.

Bicudo, M. A. V. (2011). Pesquisa qualitativa segundo a visão fenomenológica. São Paulo: Cortez.

Borba, M. C. & Araújo, J. L. (2004). Pesquisa qualitativa em educação matemática. Belo Horizonte: Autêntica.

Cellard, A. (2008). A análise documental. En J. Poupart (Eds.), *A pesquisa qualitativa: enfoques epistemológicos e metodológicos.* pp. 295-316. Petrópolis, RJ: Vozes.

Merleau-Ponty, M. (2006). Fenomenologia da Percepção. 3. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2006. Tradução de: Carlos Alberto Ribeiro de Moura.

Verissimo, D. S. (2012). A primazia do corpo próprio: posição e crítica da função simbólica nos primeiros trabalhos de Merleau-Ponty. São Paulo: Editora Unesp.

Volver al índice de autores

4.2.4. Análisis de gráficas de funciones y su incidencia en la interpretación del fenómeno en estudio

Leonardo Damián Sandoval, Universidad Nacional de Jaén, Jaén, Perú
Lenin Quiñones Huatangari, Universidad Nacional Toribio Rodríguez de Mendoza de Amazonas, Amazonas, Perú
Juan C. Damián Sandoval, Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo, Lambayeque, Perú.

Resumen

Esta investigación se centró en el análisis de los aciertos y dificultades que los estudiantes de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la Universidad Nacional de Jaén mostraron al realizar las actividades cognitivas de tratamiento y conversión en los diferentes registros de representación semiótica del objeto función real de variable real. Se utilizó como marco teórico la Teoría de Representación Semiótica propuesta por Raymond Duval y con respecto a la metodología, se consideró algunos aspectos de la Ingeniería Didáctica de Michéle Artigue. Con respecto a la experimentación y análisis se elaboró y aplicó un cuestionario exploratorio compuesto de seis situaciones, estas fueron elaboradas con el propósito de que los estudiantes apliquen sus conocimientos básicos de matemática traídos de la educación básica. Los resultados muestran que la mayoría de los estudiantes tiene dificultades al hacer el tratamiento y conversión de registros de representación semiótica, esto se evidencia en la situación N°1 donde los estudiantes no lograron la conversión del registro gráfico al registro algebraico, así mismo en las situaciones N°5 y N°6 los estudiantes no lograron realizar el tratamiento y la conversión de los distintos registros de representación semiótica.

I. Introducción

Dentro de la formación básica de un estudiante universitario en ciencias o ingeniería, juega un papel muy importante los conocimientos sobre matemática. Sin embargo, en la actualidad el aprendizaje de los estudiantes es diferente a la de hace quince o veinte años, debido a diversos factores, por ejemplo, el modo en que acceden al conocimiento. Por lo tanto, es imprescindible manejar tanto las metodologías como las teorías didácticas modernas de enseñanza aprendizaje, y la Matemática no escapa de este diagnóstico. Por ello, se requiere un cambio de enseñanza en el sistema universitario, en particular en los docentes que enseñan Matemática para ciencias e ingeniería, se requiere que tomen

conciencia y reflexionen en torno a la implementación de innovaciones metodológicas y pedagógicas en el aula, acordes a estos cambios (Malaspina, 2012).

La teoría de los registros de representación semióticos de Raymond Duval es una teoría que permite estudiar fenómenos para el desarrollo del pensamiento matemático, uno de los principales supuestos es que la actividad matemática se apoya en el empleo de diversas representaciones semióticas las cuales se organizan en torno a registros de representación; su estudio permitirá comprender la complejidad de la actividad matemática ya que en ella se realizan constantes transformaciones en el mismo registros y entre registros. (Duval)

La ingeniería didáctica, como metodología de investigación se caracteriza: primero por un esquema experimental basado en las "realizaciones didácticas" en la clase, es decir sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza, y segundo por el registro de los estudios de caso y por la validación que es esencialmente interna, basada en la confrontación entre el análisis a priori, lo que se planificó, y a posteriori, lo que realmente sucedió (Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. y Gómez, P., 1995).

El presente trabajo surge del interés de analizar cómo se produce la comprensión de la noción de función, a través de sus diversos tipos de representación semiótica. Además, por las dificultades que presentan los estudiantes en el primer año de estudios universitarios para resolver problemas sobre funciones. La investigación tuvo como objetivo realizar el diagnóstico sobre el nivel de análisis e interpretación de gráfica de funciones en los estudiantes del primer ciclo de la carrera profesional de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, se analizó y valoró los resultados basados en las teorías de los registros de representación semiótica de Raymond Duval y la metodología de la ingeniería didáctica respectivamente.

II. materiales y métodos

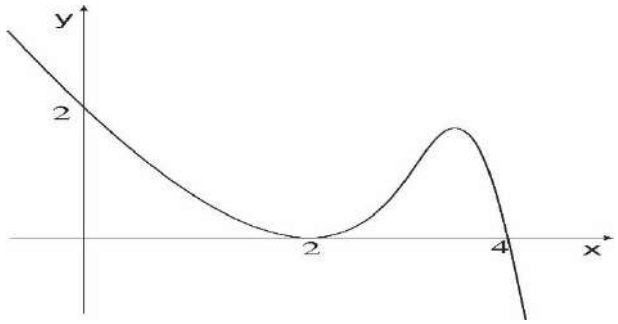
La población que se ha considerado para la presente investigación, está representada por los estudiantes del primer ciclo 2016-I de la carrera profesional de Ingeniería Mecánica y Eléctrica del curso de Matemática Básica, de la Universidad Nacional de Jaén que representan un total de 39 estudiantes.

Para la recolección de información se diseñó y validó un cuestionario de exploración compuesto de cuatro situaciones, estas fueron tomadas y validadas de los textos de (Stewart, J., Redlin, L. y Watson, S., 2012), (Zill, D. y Wright, W. , 2011) (Lages, 1998),

(Larson, R. y Edwards, B., 2010), (Duval), (Flores, J. y Ugarte, F. , 2016), (Arce, M. y Ortega, T., 2013), (Guzman, 1998) y (Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. y Gómez, P., 1995). Las situaciones planteadas permitieron extraer información de las ideas de los estudiantes al analizar el cambio de los distintos registros de representación de las funciones a través de sus gráficas. En seguida se realiza el análisis a priori de cada situación planteada.

SITUACIÓN N°1

A continuación se muestra la gráfica que corresponde a un polinomio $P(x)$ de grado 3.



1. Con la información presentada en la gráfica halle:

i. Para qué valores de x las imágenes $P(x)$ del polinomio son positivas.

ii. Para qué valores de x las imágenes $P(x)$ de polinomio son negativas.

2. Halle el polinomio $P(x)$.

En esta situación se quiere investigar ¿cómo realizan la conversión del registro gráfico al algebraico de una función polinomial de tercer grado, dada? específicamente se espera que los estudiantes identifiquen en el mismo gráfico cuando una función es positiva o negativa, y que con los puntos dados en el gráfico puedan obtener la expresión algebraica de la función polinomio de grado tres.

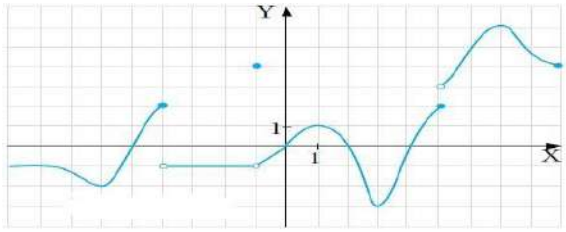
En la **pregunta 1** se quiere que el estudiante realice la conversión del registro gráfico al algebraico identificando que la función es positiva sí $f(x)>0$, para

$x \in \langle -\infty, 2\rangle \cup \langle 2, 4\rangle$, y la función es negativa sí $f\ x < 0$, para $x \in \langle 4, +\infty\rangle$, que identifique los intervalos del eje χ donde la gráfica está en el primer y segundo cuadrante para la parte 1.i y para 1.ii respectivamente, se requiere que identifique los intervalos donde la gráfica está en el tercer o cuarto cuadrante, o que al menos realice un tratamiento en el mismo registro gráfico, marcando sobre la gráfica donde la función es positiva o negativa. En este caso se pueden presentar algunas dificultades debido a que no es lo mismo identificar algunos puntos x_0 para el cual la función es positiva o negativa, que identificar los intervalos para x en el cual la función es positiva o negativa. Esto quedará evidenciado cuando los estudiantes realicen la conversión entre registros.

En la **pregunta 2** se requiere que los estudiantes a partir de los interceptos de la gráfica con el eje x, en los puntos $2,0$ y $4,0$, y con el eje y en el punto $0,2$, determinen la representación algebraica de la función polinomial de grado tres con coeficiente principal diferente de 1. Deben analizar que para usar la representación general $f(x) = a x^3 + b x^2 + c x + d$ deberán conocer cuatro puntos sobre la gráfica, no necesariamente interceptos con los ejes coordenados, también puede usar la representación $f(x) = m(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$ cuando se conocen tres raíces diferentes y otro punto cualquiera en la gráfica. Como los anteriores no es el caso, deben considerar la representación $f(x) = m(x - r_1)^2 (x - r_2)$ ya que la gráfica dada presenta sólo dos interceptos con el eje χ y uno con el eje y , es decir el estudiante debe tener en cuenta que la función presenta una raíz de multiplicidad dos, y un intercepto con el eje y. Para lograr su objetivo deben hacer la conversión del registro gráfico al registro tabular y luego del registro tabular al registro algebraico, o pueden hacer directamente la conversión del registro gráfico al algebraico.

SITUACIÓN N°2

La figura muestra la gráfica de la función $y = f(x)$.



Con la información presentada en la gráfica:

1. Encontrar: $f(-4),\ f(-1),\ f(0),\ f(6).$

2. ¿Para qué números x es $f(x)=0$?

3. ¿Cuál es el dominio de f ?¿Cuál es el rango de f ?

4. ¿Cuáles son los intersectos con el eje x?

5. ¿Para qué números de x es $f(x)>0$?

6. ¿Encuentre los intervalos de crecimiento de f ?

7. ¿Encuentre los intervalos de decrecimiento de f ?

8. ¿Encuentre el (los) intervalo (s) donde la función es constante?

9. ¿Encuentre los valores máximos y mínimos de f ?

En esta situación se presenta la gráfica de una función seccionada y se espera que los estudiantes tengan conocimientos básicos para analizar e interpretar la gráfica de la función real de variable real, contestando correctamente las preguntas propuestas, a partir de algunos puntos dados sobre el gráfico. Para esto deberán hacer la conversión del registro gráfico al registro numérico y luego del registro numérico al analítico.

Específicamente se espera que los estudiantes identifiquen: valores numéricos, intersección con los ejes de coordenadas, dominio y rango, intervalo o puntos donde la función es positiva, intervalos de monotonía y valores relativos.

En la **pregunta 1** se requiere que los estudiantes identifiquen los valores numéricos $f(-4)$, $f(-1)$, $f(0)$ y $f(6)$ con los pares ordenados $(-4,2)$, $(-1,4)$, $(0,0)$ y $(6,5)$, sin ningún inconveniente. Esto pretende que los pares ordenados en la gráfica de la forma (x_0, y_0) lo deberán identificar con el par ordenado $(x_0, f(x_0))$ que arrojará el valor numérico deseado $f(x_0) = y_0$. Aquí se presenta un fenómeno de congruencia trivial (se da en el mismo registro) entre el par ordenado (x_0, y_0) y el par ordenado $(x_0, f(x_0))$, esta congruencia le proporcionará al estudiante encontrar los valores pedidos.

En la **pregunta 2** se requiere que los estudiantes identifiquen el valor numérico $f(x) = 0$ con el par ordenado $(x_0, 0)$ y que a su vez deberá identificar con los valores $x_0 = -5, 0, 2\ y\ 4.1$ que son los intercepto de la gráfica con el eje x. Aquí se presenta un fenómeno de congruencia trivial entre el par ordenado $(x_0, 0)$ y el valor x_0. Pueden que se presente algunas dificultades al hacer este cambio de registro.

En la **pregunta 3** se requiere que los estudiantes identifiquen el recorrido de la variable independiente x y la variable dependiente $y = f(x)$ sin ningún inconveniente, es decir, identifique el intervalo $(-\infty, 9]$ que representa el dominio de la función y el intervalo $[-3,2] \cup (3,6]$ que representan rango de la función. Esta identificación está adjunta al cambio del registro gráfico al algebraico.

En la **pregunta 4** se espera que los estudiantes identifiquen los puntos de intersección de la gráfica de la función con el eje x, de la misma forma como se hicieron en la pregunta 2 de acuerdo a su respuesta estos deben ser $(-5,0), (0,0), (2,0)$ y $(4.1,0)$. Aquí se presenta un fenómeno de congruencia entre la pregunta 2 y la pregunta 4.

En la **pregunta 5** se espera que los estudiantes puedan identificar las propiedades de cuando una función es positiva, es decir a partir de los pares ordenados (x_0, y_0) que se localizan en el primer y segundo cuadrante identifiquen que los valores de $f(x_0)$ son positivos.

Para este caso específico se desea que los estudiantes no tengan obstáculos y procedan como lo hicieron en la pregunta 1.

En la **pregunta 6** se espera que los estudiantes identifiquen los intervalos de crecimiento $[-6,-4],(-1,1]$ y $[3,7]$. Aquí se presenta un fenómeno de congruencia entre la representación gráfica de la función dibujada y la apreciación de la noción de crecimiento con el hecho de que la gráfica sube.

En la **pregunta 7** se espera que los estudiantes identifiquen los intervalos de decrecimiento $(-\infty,-6],[1,3]$ y $[7,9]$. Aquí se presenta un fenómeno de congruencia entre la representación gráfica de la función dibujada y la apreciación de la noción de decrecimiento con el hecho de que la gráfica baja.

En la **pregunta 8** se espera que los estudiantes identifiquen el intervalo donde la función es constante $]-4,-1[$. Aquí se presenta un fenómeno de congruencia entre la representación gráfica de la función dibujada y la apreciación de la noción de función constante con el hecho de que la gráfica no sube ni baja.

En la **pregunta 9** se espera que los estudiantes identifiquen el mayor valor y el menor valor en la gráfica de f, es decir, deberán identificar el punto más alto de la gráfica $(7,6)$ con el valor numérico $f(7)=6$ y el punto más bajo de la gráfica $(3,-3)$ con el valor numérico $f(3)=-3$, estos valores numéricos $f(7)=6$ y $f(3)=-3$ representan el máximo y mínimo valor de la gráfica de la función f.

SITUACIÓN N°3

La tarifa de energía eléctrica es de S/ 0.49 por cada kWh hasta los primeros 200 kWh. Luego, por cada kWh adicional por encima de los 200, la tarifa es de S/ 0.58.

1. Si se consume 250 kWh en un mes, cuál es el pago mensual.

2. Si en la UNJ se consume x kWh en un mes, exprese algebraicamente el pago $P(x)$ por consumo de energía eléctrica en función de x.

3. Graficar la función obtenida en 2.

4. Hallar el pago del recibo del mes de junio en la UNJ si el consumo es de 2481 kWh.

En esta situación, se espera que los estudiantes comprendan el problema contextualizado, poniendo en juego sus capacidades de interpretación, describir y conjeturar gráficamente situaciones descritas de la vida real.

En la **pregunta 1** se espera que los estudiantes realicen el cálculo de acuerdo a la información dada sin ninguna dificultad.

En la **pregunta 2** se espera que los estudiantes con la información dada, puedan expresar la forma analítica de la función que representa a la mencionada situación. Esto se verá plasmado cuando los estudiantes respondan a esta pregunta.

En la **pregunta 3** se espera que los estudiantes no tengan dificultad en construir la gráfica de la función obtenida en la pregunta 2 o independiente de está, para este caso específico se desea que los estudiantes no tengan obstáculos y procedan como el caso anterior.

En la **pregunta 4** se espera que los estudiantes realicen el cálculo de acuerdo a la información dada o reemplazando los datos en la expresión analítica obtenida en la pregunta 2, sin ninguna dificultad. Para este caso específico se desea que los estudiantes no tengan obstáculos y procedan como lo hicieron en la pregunta 1

SITUACIÓN N°4

Durante una colisión, la fuerza F (en newton) que actúa sobre un objeto varía con el tiempo t de acuerdo con la ecuación $F = 87t - 21t^2$, donde t está dado en segundos.

1. ¿Para qué valor de t se obtiene una fuerza máxima?

2. ¿Cuál fue el valor máximo de la fuerza?

3. Graficar la función F .

En esta situación, se espera que los estudiantes tengan conocimientos básicos de función cuadrática y recuerde que su representación gráfica es una parábola.

En las **preguntas 1 y 2** se espera que los estudiantes completen cuadrados en la expresión dada para obtener una expresión de la forma $f(x)=a(x-h)^2+k$ y a partir de esto identificar el vértice (h,k) lo cual daría repuesta a lo pedido de estas dos preguntas, también puede que los estudiantes puedan encontrar los valores del vértice usando las siguiente expresiones $h=\frac{-b}{2a}$ y $k=\frac{-b^2+4ac}{4a}$, donde estas expresiones son resultados de realizar un tratamiento en el mismo registro analítico o algebraico. Esto se verá plasmado cuando los estudiantes respondan a estas preguntas.

En la **pregunta 3** se espera que los estudiantes recuerden que la gráfica de la función presentada es una parábola y reconociendo el vértice con el coeficiente principal de dicha función no tendrá dificultad de construir la mencionada gráfica. Esto se verá modelado cuando los estudiantes respondan a esta pregunta.

III. Resultados

Aquí se hace el análisis a posteriori de cada situación planteada, clasificando las respuestas descritas por los estudiantes en: respuestas correctas, incorrectas y abstenciones. Se considera que una respuesta es correcta cuando está conforme con la teoría científica, incorrectas es aquella que es diferente a la teoría científica y abstención es la pregunta que no ha sido respondida por el estudiante, a esta última se le da esa jerarquía por que la solución a cada pregunta fue voluntaria

Análisis de la situación N°1:

En general, con relación al cambio de registro de representación gráfica al numérico y luego del registro gráfico al registro algebraico, se observó que: en la **pregunta 1.i.** el 5.13% de los estudiantes pudieron determinar los intervalos pedidos, es decir, que identificaron los valores donde la función es positiva o que están en el primer y segundo cuadrante. En términos de la teoría de registros significa que estos estudiantes pueden realizar el cambio

del registro gráfico al algebraico. Mientras que el 64.10% de los estudiantes no pudo ser la conversión del registro gráfico al registro analítico, esto significa que algunos dieron como respuesta valores enteros positivos del eje de la abscisa y otros el semieje positivo que lo representaron por $x > 0$, otros estudiantes redactaron que si la gráfica del polinomio está a la derecha del eje y es positiva, mientras que otros dieron como respuestas algunos intervalos donde la función es positiva como por ejemplo $(0,2)$, $(0,3)$, $(0,4)$ etc., y que 30.77% se abstuvo a responder.

En la **pregunta 1.ii** el 5.13% de los estudiantes pudieron determinar los intervalos pedidos, es decir, que identificaron los valores donde la función es negativa o que están en el tercer y cuarto cuadrante. En términos de la teoría de registros significa que estos estudiantes pueden realizar el cambio del registro gráfico al algebraico. Mientras que el 61.54% de los estudiantes no pudo hacer la conversión del registro gráfico al registro analítico, algunos estudiantes dieron como respuesta valores negativos del eje de la abscisa y otros lo representaron por $x < 0$, otros estudiantes redactaron que si la gráfica del polinomio está a la izquierda del eje y es negativa, mientras que algunos dieron como respuestas solo algún intervalo que no cumple con la condición como por ejemplo $(-\infty, -1]$, y el 33.33% se abstuvo de responder.

En la **pregunta 2,** ningún estudiantes llego a obtener correctamente la expresión algebraica de la función polinomio de grado tres, esto se debió a que, de los 51.28 % de estudiantes que respondieron consideraron la expresión algebraica de la forma $f(x) = a x^3 + b x^2 + c x + d$ y su dificultad fue hallar los coeficientes ya que identificaron sólo tres puntos como pares ordenados, de acuerdo la teoría de cambio de registros, significa que estos estudiantes no tomaron en cuenta las raíces y su multiplicidad para ser el cambio del registro gráfico al algebraico. Mientras que el 48.72% se abstuvo de responder.

En conclusión, en esta situación, la mayoría de los estudiantes que respondieron a las preguntas, no realizaron correctamente la conversión entre registros de representación como se planificó en el análisis a priori.

Análisis de la situación N°2

En general, con relación al cambio de registro de representación gráfica al numérico y luego del registro numérico al registro algebraico, se observó que: en la **pregunta 1** el 23.08% de los estudiantes pudieron identificar los valores pedidos, es decir pudieron identificar los valores de $f(-4), f(-1), f(0)$ y $f(6)$ con los pares ordenados $(-4,2),(-1,4),(0,0)$ y $(6,5)$, sin ningún inconveniente. Esto nos muestra que lo estudiantes no tiene dificultad al momento de identificar los pares ordenados en la gráfica de la forma (x_0, y_0) con los pares de la forma $(x_0, f(x_0))$, así esta identificación permite obtener el valor numérico requerido $f(x_0) = y_0$. De acuerdo con la teoría de registros se dice que hay una correspondencia entre (x_0, y_0) con $(x_0, f(x_0))$, y que la conversión es trivial. Esta correspondencia es llamada de congruencia. Por otro lado, se observó que el 53.85% presentaron dificultades para determinar los valores numéricos y el 23.08% se abstuvo de responder.

En la **pregunta 2** se observó que el 12.82% de los estudiantes lograron identificar el valor numérico $f(x) = 0$ con los pares ordenados $(-5,0)$, $(0,0)$, $(2,0)$ y $(4.1,0)$ que a su vez lo identificaron con los valores $x \in \{-5, 0, 2, 4.1\}$. Según las respuestas ninguno dejó constancia que esto equivale hallar los interceptos de la gráfica con el eje X o interceptar la recta horizontal $y = 0$ con la gráfica de f. Por otro lado, el 53.85% presentaron dificultades para obtener los valores de X para el cual $f(x) = 0$ y el 33.33% se abstuvo de responder.

En la **pregunta 3** se observó que el 7.69% de los estudiantes identificaron el recorrido de la variable X y la variable dependiente $y = f(x)$ sin ningún inconveniente, es decir, identificó los intervalos $(-\infty, 9]$ que representa al dominio y $[-3,2] \cup (3,6]$ que representan el rango de la gráfica de la función, esto muestra que este grupo de estudiantes pueden ser el cambio del registro gráfico al analítico como se planifico en el análisis a priori. Mientras que el 38.46% tuvieron dificultades al representar el dominio y rango de la función mostrada gráficamente y el 53% se abstuvo de responder.

En la **pregunta 4** se observó que el 17.95% de los estudiantes no tuvieron dificultad de identificar los puntos de intersección de la gráfica con el eje X, pensamos que, lo hicieron de la misma forma como en la pregunta 2 y así llegaron a sus respuesta $(-5,0),(0,0),(2,0)$ y $(4.1,0)$. En términos de la teoría de registros significa que los estudiantes hacen el cambio de registro como se planifico en el análisis a priori. Mientras que el 48% de los estudiantes presentaron dificultades, puesto que tuvieron las mismas dificultades como en la pregunta 2, y el 33.33% de los estudiantes se abstuvo de responder.

En la **pregunta 5** se observó que ningún estudiante pudo identificar a partir de la gráfica los intervalos donde la función es positiva, esto en la teoría de registro el estudiante no hace correctamente el cambio de registro gráfico al analítico, de los 64.10 % que respondieron incorrectamente se puede observar que algunos estudiantes identificaron pares ordenados que están en el primer cuadrante pero no fue suficiente como para dar una respuesta correcta los intervalos como se planificó en el análisis a priori, pensamos que una dificultad fue, por la forma como se redactó la pregunta ya que quizás pensaron valores de X como puntos aislados y no como intervalo. Finalmente, el 35.9% de los estudiantes se abstuvo de responder.

En la **pregunta 6** se observó que sólo el 7.69% de los estudiantes no tuvo dificultad para identificar los intervalos de crecimiento $[-6,-4],(-1,1]$ y $[3,7]$. Esto significa en término de la teoría de registro el estudiante puede hacer el cambio del registro gráfico al analítico. Aquí se presenta un fenómeno de congruencia entre la representación gráfica de la función dibujada y la apreciación de la noción de crecimiento con el hecho de que la gráfica sube. Esta afirmación está basada en que el estudiante ha remarcado la gráfica indicando a donde la función crece. Lo que no se aprecia en las respuestas es que el estudiante haya deducido el crecimiento a partir de la definición de función creciente. Por otro lado, el 48. 72% de los estudiante no respondieron como se planifico en el análisis a priori, pensamos que una de las dificultades es, los estudiantes tiene la dificultad en el cambio de registro, ya que algunos identifican los pares ordenados desde donde empieza a subir la gráfica (puntos abajo) hasta donde deja de subir (punto arriba), otros estudiantes identifican los pares ordenados y los escriben por ejemplo; la gráfica crece : de $(-5,-2)$ a $(-4,2)$, $[(-5,-2),(-4,2)]$, o $\{-5,2\}$, esto en la teoría de intervalo no está de acorde

con la definición científica, de acuerdo a la teoría de registro el estudiante tiene la noción cuando crece o sube la gráfica, pero esto lo hacen en el mismo registro gráfico, esto significa que tienen dificultad al hacer el cambio del registro gráfico al analítico. Mientras que el 43.59 % de los estudiantes se abstuvo de responder.

En la **pregunta 7** se observó que el 5.3% de los estudiantes no tuvo dificultad para identificar los intervalos de decrecimiento $(-\infty,-6],[1,3]$ y $[7,9]$. Esto significa en término de registro el estudiante puede hacer el cambio del registro gráfico al analítico. Aquí se presenta un fenómeno de congruencia entre la representación gráfica de la función dibujada y la apreciación de la noción de decrecimiento con el hecho de que la gráfica baja. Esta afirmación está basada en que el estudiante ha remarcado la gráfica indicando a donde la función decrece. Lo que no se aprecia en las respuestas es que el estudiante haya deducido el decrecimiento a partir de la definición de función decreciente. Por otro lado, el 41.03% de los estudiantes no respondieron como se planificó en el análisis a priori, pensamos que una de las dificultades es que, los estudiantes tienen la dificultad en el cambio de registro, ya que algunos identifican los pares ordenados desde donde empieza a bajar la gráfica (punto arriba) hasta donde deja de bajar (punto abajo), los mismos estudiantes de la pregunta 6 identifican los pares ordenados y los escriben de forma análoga como lo hicieron en la pregunta 6. Mientras que el 53.85 % de los estudiantes se abstuvo de responder.

En la **pregunta 8** se observó que el 33.33% de los estudiantes no tuvo dificultad para identificar el intervalo donde la función es constante $]-4,-1[$. Esto significa en término de registro el estudiante puede hacer el cambio del registro gráfico al analítico. Aquí se presenta un fenómeno de congruencia entre la representación gráfica de la función dibujada y la apreciación de la noción de función constante con el hecho de que la gráfica no sube ni baja. Esta afirmación está basada en que el estudiante ha remarcado la gráfica indicando a donde la función es constante. Lo que no se aprecia en las respuestas es que el estudiante haya deducido donde la función es constante a partir de la definición de función constante. Por otro lado, el 35.90% de los estudiantes no respondieron como se planificó en el análisis a priori, pensamos que una de las deficiencias es, los estudiantes tienen la dificultad en el cambio de registro, ya que algunos identifican los pares ordenados desde donde empieza la gráfica como recta horizontal hasta donde termina, los mismos estudiantes que respondieron la pregunta 6 identifican los pares ordenados y los escriben de forma análoga

como lo hicieron en la referida pregunta. Mientras que el 30.77 % de los estudiantes se abstuvo de responder.

En la **pregunta 9** se observó que el 20.51% de los estudiantes identificó el mayor valor y el menor valor en la gráfica de f , es decir, identificaron el punto más alto de la gráfica $(7,6)$ con el valor numérico $f(7)=6$ y el punto más bajo de la gráfica $(3,-3)$ con el valor numérico $f(3)=-3$, estos valores numéricos $f(7)=6$ y $f(3)=-3$ representan el máximo y mínimo valor de la gráfica de la función f . Algunos de estos estudiantes simplemente anotaron los valores 6 y -3. En términos de la teoría de registros significa que estos estudiantes pueden realizar el cambio del registro gráfico al analítico. Mientras que el 33.33% de los estudiantes no respondieron como se planificó en el análisis a priori, pensamos que una de las dificultades es, los estudiantes tienen la dificultad en el cambio de registro, ya que algunos identifican los pares ordenados, pero no representaron el valor máximo como la altura máxima en la gráfica de acorde con la definición de valor máximo, de forma análoga sucede para valor mínimo. Por otro lado, el 46.15 % de los estudiantes se abstuvo de responder.

En conclusión, en esta situación, la mayoría de los estudiantes que respondieron a las preguntas, tiene dificultad en la conversión de registro, esto se evidencia cuando quiere pasar del registro gráfico al numérico como al registro algebraico.

Análisis de la situación N°3

En general, con relación al cambio de registro de representación verbal al registro numérico y luego al algebraico, en la **pregunta 1,** se observó que el 51.28% de los estudiantes no tuvo dificultad en identificar las variables que intervienen en la situación y diferencian el costo de cada kWh de acuerdo al consumo, en términos de la teoría de registro estos estudiantes realizaron en forma apropiada el cambio de registro verbal al numérico. Por otro lado, el 38.46% de los estudiantes presentaron dificultad para encontrar el pago de los 250 kWh, pensamos que se debe a que realizaron una lectura poco analítica e interpretativa del enunciado. Mientras que el 10.26% se abstuvo de responder.

En la **pregunta 2,** se observó que el 2.56% de los estudiantes no tuvo dificultad en el cambio de registro del verbal al algebraico, esto significa que expreso el pago mensual de consumo como una función seccionada. Por otro lado, el 64.10% de los estudiantes tuvo

dificultad en el cambio de registro, esto se evidencia ya que los estudiantes tienen dificultad en generalizar el número de kWh estos sólo hacen el cálculo con valores numéricos, mientras que el 10.26% se abstuvo de responder.

En la **pregunta 3**, se observó que ningún estudiante realizó en forma correcta la gráfica que modele al problema contextualizado, en términos de la teoría de registro, los 51.28% de los estudiantes que respondieron a esta pregunta no lograron hacer el cambio de registro del algebraico al gráfico, notamos que esto se debe, a la forma algebraica encontrada en la pregunta 2 para la función $P(x)$. Por otro lado, el 48.72% de los estudiantes se abstuvo de responder.

En la **pregunta 4**, se observó que el 33.33% de los estudiantes no tuvo dificultad en encontrar el valor pago por consumo indicado como lo hicieron en la pregunta 1, se evidencia que los estudiantes realizaron el cálculo independiente de la función obtenida en la pregunta 2. Por otro lado, el 35.90% de los estudiantes tuvieron la dificultad para responder a la pregunta, esto se evidencia que en su mayoría de estos realizaron una lectura poco analítica e interpretativa del enunciado, mientras que el 30.77% se abstuvo de responder.

En conclusión, en esta situación, la mayoría de los estudiantes que respondieron toda la situación, no realizaron correctamente la conversión del registro verbal al registro numérico y luego del registro numérico al analítico y por lo tanto al registro algebraico como se planificó en el análisis a priori.

Análisis de la situación N°4

En general, con relación al cambio de registro de representación algebraica al registro numérico y luego al gráfico, en las **preguntas 1 y 2,** se observó que ningún estudiante contesto como se planificó en el análisis a priori. Por otro lado el 64.10% y 53.85% estudiantes presentaron dificultad para responder a ambas preguntas, se evidencia en su proceso, ya que para obtener el punto máximo de la parábola han recurrido al registro tabular dando valores a la variable t y luego compararon los valores de la imágenes y deducen el valor máximo para la fuerza F, pero esto lo hicieron con valores enteros lo cual de acuerdo a la ecuación no llegaron al vértice correcto, ninguno de estos estudiante intento trabajar haciendo el tratamiento en el registro de representación algebraica para

expresar la función cuadrática en su forma estándar $f(x)=a(x-h)^2+k$ y a partir de esto identificar el vértice (h,k) lo cual daría repuesta a lo pedido de estas dos preguntas, tampoco aplicaron la fórmula las siguiente expresiones $h=-\frac{b}{2a}$ y $k=\frac{-b^2+4ac}{4a}$, para hallar el vértice. Mientras que el 35.90% y 46.15% de los estudiantes se abstuvo de responder.

En la **pregunta 3**, se observó que ningún estudiante hizo el gráfico de la parábola correctamente como se planificó en el análisis a priori, por otro lado, el 48.72% de los estudiantes tuvo dificultad para hacer el cambio de registro, del registro analítico al gráfico, como se evidencia algunos estudiantes no tiene la noción de parábola puesto que la mayoría de estos graficaron dos rectas que se interceptan y culminan en el vértice. Mientras que el 51.28% se abstuvo de responder.

En conclusión, en la situación, los estudiantes que respondieron toda la situación, no realizaron correctamente la conversión del registro algebraico al registro numérico y luego del registro numérico al gráfico como se planificó en el análisis a priori.

IV. Discusión

El estudio exploratorio realizado a los estudiantes de la escuela profesional de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la Universidad Nacional de Jaén, arroja que ellos poseen escaso análisis e interpretación de las funciones a través de sus gráficas, además que hay evidencia en que la utilización del cambio de registro de representación es muy pobre en la mayoría de estudiantes. Por otro lado muestran dificultades en el tratamiento de los distintos registros de representación semiótica del objeto función, y además presentan mayores dificultades en la conversión de un registro de representación semiótica a otro registro de representación semiótica del objeto función, estos resultados es contrario a los de (Guzmán, 1998) quien concluye que las respuestas eran dadas en un solo registro, sin coordinar explícitamente dos o más, por otro lado se coincide con (Arce, M. y Ortega, T., 2013) quien concluye que las deficiencias identificadas pueden estar causadas por problemas del alumno al reproducir, a través de un deficiente trazado en la representación gráfica de la función sobre el papel, o el comportamiento o propiedades de la función o

sus elementos, que el alumno tiene correctamente interiorizados en sus esquemas conceptuales.

En las respuestas dadas, se observó que los estudiantes recurren al registro algebraico para intentar resolver la situación, y esto sucede porque así le enseñaron en clase, quedando de esta manera evidenciada la enseñanza algorítmica tradicional.

V. Referencias

Arce, M. y Ortega, T. (2013). Deficiencias en el trazado de gráficas de funciones en estudiantes de bachillerato. *PNA*, 61-73.

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. y Gómez, P. (1995). Ingeniería didáctica. *Ingeniería didáctica en educación matemática* , 33-60.

Duval, R. (s.f.). Registro de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. *Didáctica: Investigaciones en matemática educativa II*, 173-201.

Flores, J. y Ugarte, F. . (2016). *Investigaciones en educación matemática.* Lima: Fondo editorial Pontificia Universidad Católica del Perú.

Guzman, R. (1998). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. *Relime*, 5-21.

Lages, L. (1998). *Curso de análise volumen 1 (6° ed.)* . Brasil: IMPA.

Larson, R. y Edwards, B. (2010). *Cálculo 1 de una variable.* México: McGraw-Hill/Interamericana Editores, S. A de C. V.

Malaspina, U. (2012). *Didáctica de las matemáticas: avances y desafios actuales.* Lima : Pontificia Universidad Católica.

Stewart, J., Redlin, L. y Watson, S. (2012). *Precálculo: Matemáticas para el Cálculo* . México: Cengage Learning Editores, S.A. de C.V.

Zill, D. y Wright, W. . (2011). *Cálculo. Trascendentes tempranas.* México: McGraw-Hill/Interamericana Editores, S. A. de C. V.

Volver al índice de autores

4.2.5. Análisis de una situación didáctica para la enseñanza del valor absoluto en alumnos de educación secundaria

Sahara Doria Rodríguez
Francisco Javier Ugarte Guerra
Pontificia Universidad Católica del Perú-IREM, Perú

Resumen

Diversas investigaciones han reportado que la enseñanza del valor absoluto desde un contexto aritmético constituye un obstáculo didáctico, modelo que actualmente se emplea en el currículo peruano, así como en otros países, en vista de ello, diseñamos y analizamos una situación didáctica para la enseñanza del valor absoluto desde el contexto funcional. Nuestra base teórica es la teoría de situaciones didácticas y, como metodología, empleamos principios de la ingeniería didáctica, incorporando el análisis cohesitivo para el diseño de la situación didáctica. Los resultados muestran que los estudiantes resolvieron ecuaciones del tipo $|x|=a$ y $|x+a|=b$, recurriendo a la solución gráfica y evitando los errores de origen epistemológico y didácticos mencionados

Antecedentes y Justificación

Investigaciones como las de Chiarugi, Fracazina & Furinghetti (1990) y Gagatsis & Panaoura (2014) dan cuenta de las dificultades y errores que presentan los estudiantes cuando resuelven ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto.

Por otro lado, Wilhelmi, Godino & Lacasta (2007) sostienen que, el modelo aritmético constituye un conocimiento resultante de una transposición didáctica que restringe al valor absoluto a un simple juego de símbolos, por lo que enfatizan la necesidad de diseñar un sistema adecuado para la introducción de la noción de valor absoluto, y además sugieren que el modelo preponderante debería ser el funcional.

Gagatsis y Panaoura (2014), realizaron una investigación en estudiantes de nivel secundaria de la República de Chipre con la finalidad de conocer las concepciones que tienen los estudiantes acerca del valor absoluto y cómo se relacionan estas concepciones con su rendimiento al resolver ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto. Como parte de los resultados de su investigación, identificaron el obstáculo epistemológico que consiste en interpretar la noción de valor absoluto de un número como "el número sin signo", un error

asociado a este obstáculo, es que algunos estudiantes consideraron que $|x|$ es igual a x, sin tener en cuenta el signo de la variable, otro error también de tipo epistemológico se presenta cuando se les pide resolver $|x+3| = 2$ y algunos estudiantes responden que $x+3= 2$.

Gagatsis y Panaoura (2014), también identificaron el obstáculo didáctico que consiste en la creencia de que el valor absoluto es sólo "un símbolo que se debe eliminado mecánicamente", debido a que en la enseñanza del valor absoluto, el símbolo es inicialmente introducido pero a continuación, en el contexto de resolver ecuaciones o inecuaciones, el símbolo es rápidamente eliminado con la finalidad de obtener ecuaciones e inecuaciones sin valor absoluto. Este error se presenta comúnmente en preguntas con "ecuaciones imposibles", por ejemplo $||x-5|-12|=-5$, en este caso la mayoría de estudiantes resolvió mecánicamente la ecuación sin verificar la solución, del mismo modo, ante la pregunta: resolver $|x+2|+|x+6|=0$, la respuesta común fue $x= -2$ ó $x= -6$.

En la propuesta curricular peruana, la introducción del valor absoluto se realiza en el contexto métrico y aritmético, es decir, no hay una reflexión funcional ni tampoco una visión gráfica en el plano que favorezca la manipulación algebraica del valor absoluto. En ese sentido, nuestra investigación propone el diseño, implementación y análisis de una situación didáctica para la enseñanza del valor absoluto en el contexto funcional, a manera de evitar el obstáculo didáctico que consiste en entender al valor absoluto como "un símbolo que debe ser eliminado mecánicamente".

A partir de lo descrito y teniendo en cuenta los resultados obtenidos en otras investigaciones, surge la necesidad de responder a la siguiente pregunta:

¿La enseñanza del valor absoluto como función, favorece el desempeño de los estudiantes en la resolución de ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto?

Marco Teórico

La teoría de situaciones didácticas ha sido nuestro marco teórico de referencia. El supuesto principal de esta teoría definida por Brousseau (2007) es que todo conocimiento matemático tiene al menos una situación fundamental que permite abordarlo a través de un conjunto de variables didácticas. Partimos de una situación problema ubicada dentro de un contexto geométrico, esto en base al análisis epistemológico realizado por Gagatsis y Thomaidis (1995) el cual muestra que, el valor absoluto surgió dentro de la misma

matemática como una necesidad de evitar operaciones imposibles, relacionadas al trabajo con los números negativos y no como una respuesta a un problema extra matemático.

Método

La situación didáctica diseñada se aplicó a estudiantes de tercer grado de secundaria cuyas edades oscilan entre los 13 a 14 años de edad. La metodología que seguimos sigue principios de la ingeniería didáctica para el diseño, implementación y análisis de la situación didáctica, pero además incorpora el análisis cohesitivo para el diseño de la secuencia didáctica, así como para el análisis de las respuestas. El análisis cohesitivo, de acuerdo a Almouloud (2008), es una herramienta estadística creada con la finalidad de evidenciar la dinámica de los comportamientos de alumnos o profesores en situaciones de resolución de problemas. "El análisis implicativo, como todos los métodos de análisis estadístico de datos multidimensionales, permite visualizar, organizar, construir modelos y explicar fenómenos asociados a los datos" (Almouloud, 2008, p.304).

Primero, se realizó el análisis cohesitivo de las respuestas de los estudiantes, donde se identificaron los errores que presentan, y las implicancias que hay entre ellos, estos resultados en conjunto con los del análisis preliminar se usaron para el diseñó la situación problema. Luego de aplicar la secuencia de actividades, se realizó el análisis cohesitivo, el cual evidenció las implicancias que hay entre comportamientos de los alumnos en términos de estrategias de solución cuando resuelven ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto y la noción que tienen acerca de este objeto matemático.

En la siguiente figura se muestra una representación de la articulación entre el análisis estadístico implicativo y la ingeniería didáctica, métodos que se utilizaron en esta investigación:

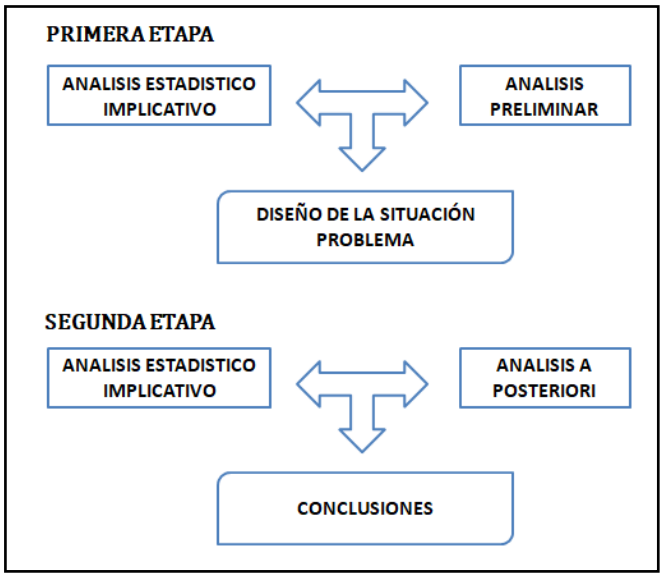


Figura 1. Esquema de la metodología de trabajo

Fuente: Propio

Situación Problema

La situación problema está diseñada, para que los alumnos hallen indirectamente la regla de correspondencia de la función por partes del valor absoluto, al intentar hallar el área del triángulo ABC que se muestra en la siguiente figura, en función del valor que tome la abscisa de los vértices B y C, representada por *x*, sabiendo que el área es una unidad de medida y siempre positiva.

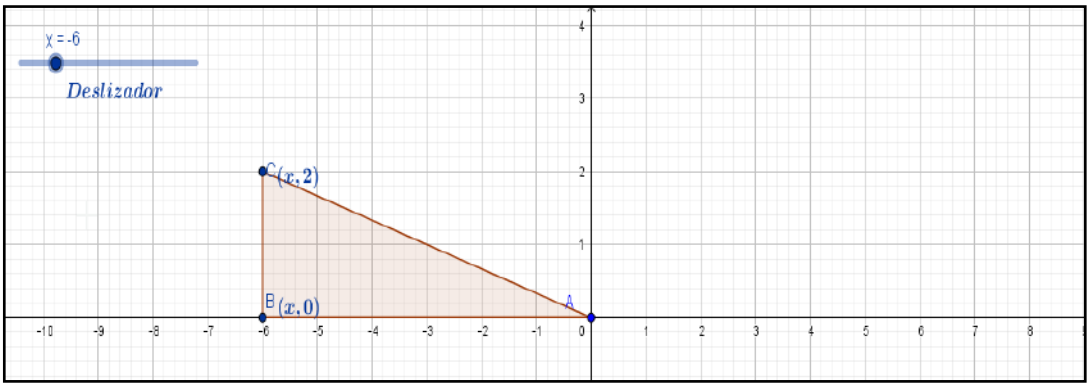


Figura 2. Situación problema en contexto geométrico

Fuente: Propio

Como se observa en la figura 2, se hará uso de un deslizador, esto con la finalidad de que los alumnos trabajen con la noción de variable, de manera que finalmente puedan expresar el área del triángulo en términos de x.

Se decidió trabajar con deslizadores debido a que el análisis cohesitivo evidenció que la ausencia de una concepción correcta de valor absoluto implicó que muchas de las preguntas donde los estudiantes tenían que expresar el valor absoluto de una variable en términos de la variable quedaran sin respuesta. Además, buscamos que los alumnos se familiaricen con el tipo de preguntas donde deben expresar sus resultados en términos de una variable.

Resultados

Los principales resultados fueron los siguientes:

La interacción en términos de estrategia de solución que se han identificado al enseñar el valor absoluto desde el contexto funcional es la solución gráfica. Por lo que, podemos establecer que un grupo de estudiantes determinaron correctamente el conjunto solución de ecuaciones del tipo $|x+a|=b$, utilizando la solución gráfica como estrategia de solución.

Otra interacción observada al enseñar el valor absoluto desde el contexto funcional, fue que un grupo de estudiantes expresó que aquellas ecuaciones con valor absoluto que tomaban valores negativos no tenían solución. Esto quiere decir, que mucho de los estudiantes no cometieron el error de tipo regla mecánica al resolver ecuaciones sin solución, percatándose de la imposibilidad de que el valor absoluto de un número tome valores negativos.

De acuerdo al análisis cohesitivo, hay una implicancia directa entre el concepto funcional del valor absoluto y las respuestas correctas de los estudiantes al resolver ecuaciones del tipo $|x|=b$ y ecuaciones del tipo $|x+a|=b$, es decir la enseñanza desde el contexto funcional evita la presencia de errores característicos de los obstáculos epistemológicos y didácticos asociados a la enseñanza del valor absoluto desde el contexto aritmético.

Conclusiones

La enseñanza desde el contexto funcional, evitó el obstáculo didáctico que consiste en considerar al valor absoluto como un símbolo que debe ser eliminado mecánicamente, además favoreció el desempeño de los estudiantes al resolver ecuaciones con valor

absoluto, debido a que se evitan errores del tipo epistemológico y didáctico asociados a la enseñanza del valor absoluto desde un contexto aritmético.

Referencias

Almouloud, S. (2008). Análise e mapeamiento estatístico de fenómenos didácticos con CHIC. En Okada, A., Santos, E, & Okada, S. (Ed.), *Cartografía Cognitiva. Mapas do Conhecimento para pesquisa, aprendizagem e formcâo docente* (pp.303-324).Cuiabá: KCM.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de situaciones didácticas.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Chiarugi, I., Fracazina, G. & Furinghetti, F. (1990). Learning difficulties behind the notion of absolute value. *Proceeding Fourteenth PME Conference*, *3*(28), 231-238. Recuperado de http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED411137.pdf

Gagatsis, A. & Panaoruma, A. (2014). A multidimensional approach to explore the understanding of the notion of absolute value. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *45*(2), 159-173.

Gagatsis, A. & Thomaidis J. (1995). Eine Studie zur historischen Entwicklung und didaktischen Transposition des Begriffs absoluter Betrag. *Journal fur Mathematik Didaktik,16*(1-2), 3-46.

Wilhelmi, M., Godino, J. & Lacasta, E. (2007). Didactic effectiveness of mathematical definitions the case of the absolute value. *Electronic Journal of Mathematics Education*, *2*(2), 73-90. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/didactic_effectiveness.pdf

Volver al índice de autores

4.2.6. La didáctica de la matemática y el álgebra lineal

María Angelita Aredo Alvarado, Universidad Nacional de Piura, Piura, Perú
Francisco Javier Ugarte Guerra, Pontificia Universidad Católica del Perú-IREM, Perú

Resumen

Presentaremos una síntesis del estado del arte de las investigaciones realizadas, desde la Didáctica de la Matemática, sobre la enseñanza y el aprendizaje del álgebra lineal. Observamos que un grupo de ellas se resalta la importancia de las conversiones entre diferentes registros de representación, mientras que otros grupos de investigaciones resaltan los niveles de descripción, los puntos de vista y los modos de razonamiento. En segundo lugar, presentaremos investigaciones basadas en análisis históricos y epistemológicos. Todo ello prueba la riqueza del álgebra lineal como un campo de investigación en Didáctica de la Matemática.

1. Estado del arte de la investigación en didáctica de las matemáticas del álgebra lineal

Dorier (1998) presenta una síntesis de varios trabajos realizados sobre la enseñanza y aprendizaje del Álgebra Lineal y afirma que la investigación de Harel (1985) constituye uno de los componentes esenciales para comprender la vasta reforma de la enseñanza del Álgebra Lineal, en la década de los ochenta en los Estados Unidos. El Grupo de Estudio del Currículo Linear Algebra (LACSG), comité de profesores de todo Estados Unidos, reflexionan sobre una reforma de la educación universitaria en álgebra lineal (Carlson y al., 1993). Este grupo elaboró un documento, en forma de recomendaciones, que se organizan en torno a cuatro ejes: La demostración, un tiempo suficiente para la enseñanza del álgebra lineal, nuevas tecnologías educativas y los contenidos que deberían incluirse.

Harel (1985) utiliza tres principios de concretización, necesidad y generalización para explicar las dificultades que enfrentan los estudiantes para tratar con ejercicios elementales de álgebra lineal en los que los vectores son funciones, por el hecho de que el concepto de función como vector no es concreto para ellos. En otras palabras,

los estudiantes no construyen el concepto de función, como un objeto matemático, como una entidad en un espacio vectorial.

Un requisito previo para la realización del principio de concretización es que los estudiantes construyan la comprensión de un concepto en un contexto concreto para ellos. Este requisito es la base de un programa de álgebra lineal que Harel (1985) desarrolló para estudiantes de secundaria.

Por el principio de necesidad, "para que los estudiantes aprendan lo que pretendemos enseñarles, deben tener una necesidad de ello, donde "necesidad" se refiere a la necesidad intelectual, no la necesidad social o económica" (Harel, 2000, pag 185).

Como ha observado Harel en experimentos, los estudiantes no sólo no ven la necesidad del concepto de espacio vectorial, sino por ejemplo que tampoco comprenden la afirmación de los axiomas del espacio vectorial.

Mientras que los dos primeros principios se refieren al aprendizaje, el principio de generalización está más ligado a la enseñanza del álgebra lineal.

En consecuencia, el trabajo de Harel se basa explícitamente en una progresión gradual en la generalización. La posible confusión entre el objeto vector y su representación analítica prácticamente no se aborda. Sin embargo, varios estudios han demostrado que la necesidad de separar los objetos de sus diferentes representaciones es uno de los problemas esenciales del aprendizaje del álgebra lineal, particularmente en América del Norte (trabajo de Hillel y Sierpinska). En esa misma línea, Dorier (1998), comenta que el concepto de espacio vectorial es central en el álgebra lineal, un curso de álgebra lineal en el primer año de la universidad, no puede abordar directamente la presentación axiomática de la estructura del espacio vectorial. El vector elemento de un espacio vectorial puede representar varios objetos matemáticos de muy diferentes naturalezas. Un curso de álgebra lineal debe hacer frente a la generalidad del tipo de representación. En Francia y en países como Marruecos, por ejemplo, la tradición es que uno introduce desde el primer año de universidad la teoría más general (axiomática) con ejemplos geométricos, mientras que en América del Norte o Brasil, el marco de las tuplas y el cálculo de la matriz siguen siendo predominantes en la educación temprana. Sin embargo, cualquiera que sea la elección de los programas, todos los estudios, llevados a cabo en estos países, muestran que en el centro de las

dificultades se encuentran los problemas para manejar la generalidad de los objetos introducidos y la naturaleza formal y abstracta de los nuevos conceptos, vinculándolos con los conocimientos ya adquiridos en la educación secundaria. Así Dorier concluye que el formalismo asociado a esta teoría parece ser una fuente de dificultades. Los estudiantes tienen dificultad para poner significado de ciertos conceptos, por falta de una conexión más visible con sus conocimientos previos.

Dorier concluye que, bajo diversos marcos analíticos, aparecen la riqueza de las interacciones y los posibles juegos entre los diferentes modos de razonamiento o representación tanto en el funcionamiento del conocimiento como en el proceso de aprendizaje y las dificultades que genera.

Asimismo, Dorier comenta el trabajo de Investigación Raymond Duval (1993 y 1995) que se basa sobre registros de representación semiótica y el funcionamiento cognitivo. Según Duval "representaciones semióticas son producciones realizadas por el uso de señales que pertenecen a un sistema de representación que tiene sus propias limitaciones y la importancia operativa" (Duval, 1993, p.39). La tesis apoyada por el autor es que "las representaciones semióticas no son sólo medios de exteriorizar las representaciones mentales con fines de comunicación, sino que son también esenciales para la actividad cognitiva del pensamiento". Se distingue la Semiosis como la aprehensión o la producción de representación semiótica. Noesis, aprehensión conceptual de un objeto.

En su tesis, Pavlopoulou (1994), presentó un análisis de cuatro investigaciones realizadas durante dos años, en una sección de primer año de Diploma de Estudios Universitarios Generales (DEUG) en Estrasburgo. Este análisis demuestra muy claramente que el nivel de competencia de los estudiantes en las actividades de conversión es generalmente muy bajo y que la presencia de registro simbólico es un factor importante de fracaso. Sin embargo, una pregunta planteada por el delicado análisis, sin resolver lo que realmente es que, la comprensión conceptual del vector como parte de un espacio formal del vector y la capacidad de convertir al registro simbólico es la causa o efecto.

Para Joel Hillel y Anna Sierpinska (1995), la comprensión del álgebra lineal requiere que los estudiantes empiecen a pensar en objetos y operadores de álgebra no en términos de relaciones entre matrices, vectores u operadores particulares, sino en

términos de estructuras enteras de objetos como: espacios vectoriales sobre álgebras y clases de operadores lineales, que pueden ser transformados, representados de diferentes maneras y considerados como o no isomorfos. Los autores utilizan el enfoque de Piaget y García (1989) Intra, inter y trans-nivel de pensamiento.

Hillel y Sierpinska asocian esta dificultad con la complejidad de los vínculos entre varios tipos de lenguajes. El lenguaje de la teoría general (espacio vectorial, subespacio, dimensión, operadores, kernel, etc.) llamado lanzamiento abstracto. El lenguaje de la teoría más específica de K"(tupla, matriz, rango, soluciones de un sistema de ecuaciones, etc.) llamado lenguaje algebraico. El lenguaje geométrico del espacio bidimensional o tridimensional (vector geométrico, puntos, líneas, planos y transformaciones geométricas) denominado lenguaje geométrico.

Anna Sierpinska, Asrtrid Defence, Tsolaire Khatcherian y Luis Saldanha , estos autores distinguen tres modos de razonamiento (o pensamiento) en el trabajo conjunto en álgebra lineal; los describen como sintéticos-geométricos, analíticos-aritméticos y analíticos-estructurales.

Así, Sierpinska et al. no consideran los modos de pensamiento geométrico, analítico, aritmético y estructural como etapas en la evolución del pensamiento algebraico, sino como formas de razonar y ver cosas que son útiles especialmente cuando están en interacción. Así es como se proponen ver su papel en la enseñanza.

Sin embargo, algunos ejemplos también muestran que los estudiantes no siempre prefieren un argumento analítico-aritmético para un argumento estructural o un argumento aritmético-geométrico sintético analíticamente argumento. El análisis de los autores sugiere que los estudiantes pueden ser muy creativos en el razonamiento.

Alves Dias se centra en los problemas de articulación entre diferentes representaciones simbólicas de los sistemas de álgebra lineal, (Alves - Dias. 1993) y (Alves - Dias y Artigue, 1995), muestran que las primeras nociones son por lo general introducidas algebraicamente: la representación simbólica intrínseca, la representación por coordenadas, la representación por ecuaciones y matrices.

Mostraron una dificultad fuerte para que los estudiantes usen los conceptos de álgebra lineal en marcos formales fuera de las tareas rutinarias donde se puede poner en

práctica una técnica precisa. Estos análisis han permitido especificar la naturaleza de lo que los autores han llamado el obstáculo del formalismo. Muestran que, más que cualquier otro contenido enseñado al mismo nivel, la teoría de espacios vectoriales aparece como un dominio abstracto y formal para los estudiantes que se sienten ahogados por las nuevas definiciones y les resulta difícil relacionarse con lo que tienen previamente aprendido (Dorier, 1998).

Los primeros estudios históricos (1990a Robinet 1986 Dorier, parte 1) mostraron que la teoría de espacios vectoriales era muy reciente. Aunque los primeros intentos de axiomatización datan de finales del siglo XIX, la teoría de los espacios vectoriales no comenzó hasta 1930. Durante más de 40 años, los enfoques analíticos (predominantemente basados en la teoría determinante) han prevalecido. Así, el análisis histórico muestra las complejidades epistemológicas relacionadas con la adopción de la teoría axiomática de espacios vectoriales como marco para el tratamiento de problemas lineales.

El formalismo es, por su parte, intrínseca a la misma teoría, y aparece como un requisito previo para la unificación y generalizar aspectos.

Las condiciones descritas anteriormente sugieren la dificultad didáctica. De hecho, ¿cómo explicar esta dimensión epistemológica del álgebra lineal en su enseñanza? Más precisamente, ¿cómo podemos mostrar en un solo problema, o incluso en varios, el interés de tal teoría, que es justamente hacer posible unificar varios promoviendo generalizaciones? Esta dificultad fue examinada al principio de la investigación de Dorier-Robert-Robinet-Rogalski.

Fue en este proceso dialéctico de reflexión epistemológica entre análisis histórico y análisis didáctico que se constituyó un enfoque basado en la noción de apalancamiento meta. Esta noción había sido introducida por Robert y Robinet (1993 y 1996).

Los primeros análisis didácticos revelaron dificultades en el uso de la definición formal de este concepto de dependencia lineal. Por otra parte, al pedirle a los estudiantes que han dado una respuesta falsa ilustrar la geometría propuesta, la mayoría se dan cuenta inmediatamente de que hay un error, sin embargo, no son capaces de identificarlo.

En las principales etapas del desarrollo histórico, la dependencia lineal se basa en el estudio de sistemas de ecuaciones lineales. Uno de los primeros textos que ponen explícitamente este concepto hacia adelante se debe a Leonhard Euler y se titula: *Sur une Contradiction Apparente dans la Doctrine des Lignes Courhes*, que data de 1750. Euler analiza la llamada paradoja de Cramer. El estudio del problema lleva a cuestionar el hecho de que un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas siempre determina una solución única, que es, al parecer, era el momento implícitamente admitido por todos.

Ousman (1996), en su trabajo ha demostrado que los estudiantes universitarios (antes de la enseñanza del álgebra lineal) tienen concepciones similares de dependencia inclusiva en las ecuaciones lineales. Pero las dificultades de los estudiantes no muestran que una resistencia de su concepción de dependencia inclusiva impida un buen uso de la definición formal.

Esta observación los lleva a la hipótesis de que la dificultad didáctica es en realidad más global, procede del proceso de generalización en el trabajo en la transición a la teoría de los espacios vectoriales.

Desde un punto de vista lógico, existe una equivalencia de concepciones primitivas con el concepto formal en cada uno de sus campos de aplicación. Este doble análisis histórico-didáctico muestra que la dificultad consiste en acceder al concepto formal a través de un proceso que tenga en cuenta las concepciones primitivas y las características epistemológicas de este tipo de generalización unificadora.

Se trata básicamente de introducir un «salto cualitativo» desde el comienzo de la formación universitaria del álgebra lineal, en sustitución de la resolución de problemas por la del estudio más teórico de los sistemas.

2. La enseñanza del algebra lineal a nivel universitario. Análisis didáctico y epistemológico

Lalaude (2016), en su investigación comenta experiencias que ha tenido al desarrollar su investigación con estudiantes de nivel universitario precisamente en la asignatura de álgebra lineal, presenta una síntesis de varios trabajos realizados sobre didáctica de

la matemática en la enseñanza y aprendizaje del Álgebra Lineal.

Al respecto dice, que la linealidad aparece como un concepto esencial en matemáticas (Ellenberg, 2014) y por su enseñanza (Rouche, 2002). Desempeña un papel decisivo en la enseñanza de álgebra.

Así mismo comenta que, a nivel de la educación superior, el álgebra lineal es un dominio o campo matemático en el currículo de la mayoría de las materias matemáticas que se enseñan. Este es el caso de las Clases de Preparación con las Grandes Escuelas (CPGE) en el que basa su trabajo.

El propósito de Lalaude, en su obra es tratar las transformaciones lineales en espacios vectoriales finito-dimensionales mediante los métodos de las teorías más generales. (Halmos, 1942, prefacio, pag. V).

Por lo tanto, su trabajo de investigación en didáctica se refiere a este objeto de aplicación como un objeto de enseñanza dentro del CPGE.

La investigación de Lalaude, tiene su origen en las dificultades que los estudiantes encuentran cuando, en situaciones de resolución de problemas de álgebra lineal, utilizan ciertas nociones matemáticas abstractas para realizar un cálculo o para elaborar un razonamiento algebraico. En particular, los objetos del álgebra lineal parecen ser un obstáculo en el marco institucional del CPGE que Dorier (1997) llama “el obstáculo del formalismo”, donde los estudiantes tienen dificultad para poner significado de ciertos conceptos, por falta de conexión con sus conocimientos previos. Como resultado, la conducta, la observación y el análisis de numerosas sesiones de preguntas orales realizadas en diferentes niveles de clases de CPGE los llevaron a encontrar dificultades recurrentes para hacer frente a problemas de álgebra lineal.

Al principio, surgen interrogantes acerca de los diferentes enfoques considerados en la educación superior para introducir y facilitar la apropiación y el uso de las cosas "espacio vectorial" y "aplicaciones lineales". Surgieron dos prácticas epistemológicas distintas de abordar en la enseñanza de álgebra lineal:

- Un enfoque, que Lalaude, le llama por ahora digital y basado en la noción de sistema lineal y matriz asociada. Este enfoque, iniciado por Mc Duffee en 1943, se destaca en los años 70 por la literatura anglosajona, entre ellas la de Anton publicó en 1973 y

promovida en 1993 por el currículo de Álgebra Lineal Recomendaciones del Grupo de Estudio (recomendaciones LACSG): Un curso orientado a la matriz debe proceder de ejemplos concretos, y en muchos casos prácticos, al desarrollo de conceptos generales (...) (Carlson et al., 1992, p.42)

- Un método más formal y estructural en el que los espacios vectoriales definidos axiomáticamente, se hereda Noether y Van Der Waerden popularizaron entre otros por Birkho y Mac Lane (1941) y Bourbaki (1947) es un enfoque "tradicional" a la enseñanza de álgebra lineal.

  Asimismo, Lalaude encuentra una presentación axiomática en la mayoría de los libros franceses destinados a los estudiantes de educación superior en licenciatura y CPGE en particular. Más específicamente, para entender las nociones de aplicaciones lineales y matriciales, dos caminos parecen concebibles: basándose en el cálculo matricial para introducir nociones de aplicación lineal o incluso espacio vectorial o, por otro lado, construir el objeto matriz después de definir aplicación lineal. En relación con estas discusiones, esboza algunas preguntas que motivan su investigación didáctica. Luego se propone definir los contornos de un breve estado del arte del trabajo relacionado con su problemática. Sus preguntas se refieren a ciertas nociones del álgebra lineal y la enseñanza durante los dos primeros años de CPGE. Además de las preguntas relacionadas con los conceptos mismos, hay fenómenos de transición que enfrentan los estudiantes cuando pasan de la educación secundaria a la educación superior, o incluso entre el primer y segundo año de CPGE. El trabajo previo que presenta al menos uno de estos temas, los conceptos de álgebra lineal o las preguntas de transición.

  Por lo tanto, de las reflexiones sobre la enseñanza de álgebra lineal, se encuentra ante un reflejo de naturaleza didáctica. De hecho, para dar respuestas a las preguntas que se plantea, primero debe determinar cómo mostrar las prácticas, los razonamientos y los procesos de aprendizaje involucrados en las situaciones de enseñanza que desea estudiar. Luego, en un segundo paso, analiza cuidadosamente lo que se observa estrictamente de acuerdo con las habilidades y conocimientos de los estudiantes, así como con sus modos de razonamiento.

  La enseñanza de las matemáticas, como ciencia de las condiciones específicas de la difusión del conocimiento matemático (Brousseau, 1994, p.52), proporciona un marco

de trabajo. “para evaluar la capacidad de un estudiante para movilizar su conocimiento de un problema, para evaluar su comprensión de los objetos matemáticos, debemos proceder a un análisis del razonamiento complejo que él produce. Para llevar a cabo un análisis de razonamiento complejo, hay que contar con herramientas teóricas de aprendizaje para el nivel de educación y la complejidad de los objetos matemáticos estudiados, así como en experimentos diseñados para responder específicamente a las preguntas planteadas” (Lalaude, 2016).

Así mismo, explica como estructura su investigación. Para abordar las preguntas de su investigación, procede hacerlo en dos partes. En una primera parte, más bien teórica, comienza proporcionando una visión general del trabajo educativo sobre preguntas relacionadas con álgebra lineal, relativas a la transición entre los fenómenos secundarios y superiores. En la segunda parte se presenta la metodología que adopta para proporcionar respuestas a las preguntas didácticas, aquí es más experimental, tiene la intención de llevar a cabo un análisis de razonamiento para identificar dificultades producidos por los estudiantes en una situación de preguntas orales.

A través del análisis de los libros y programas de estudio, aclara el razonamiento, el conocimiento que se puede esperar de un estudiante CPGE sobre aplicaciones lineales. Luego, utiliza entre otros la noción de organización matemática de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Hace un análisis semiótico de una situación matemática priori basándose en un patrón semántico. Utiliza el modelo terminado Bloch y Gibel (2011), que analizan el razonamiento de la situación. Hace hincapié en lo que lo que la Teoría de Situaciones Didácticas con la Semiótica de Peirce.

En conclusión, desde los diversos enfoques teóricos, el análisis del conocimiento en su dimensión histórica y epistemológica nos permite comprender mejor ciertas dificultades a las que se enfrentaban los estudiantes con el objetivo de introducir los conceptos de álgebra lineal.

Referencias

Dorier, J. (1998). État de L'art de la Recherche en Didactique à Propos de L'enseignement de L'algèbre Linéaire. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. I8, n°2.pag. 191-230. 1998.

Dorier, J. (2000). Epistemological Analysis of the Genesis of the Theory of Vector Spaces. The Teaching of Lineur Algebra in Question. Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.

Lalaude, M. (2016). L'enseignement de L'algèbre Linéaire au Niveau Universitaire. Analyse Didactique et Épistémologique. Thèse Didactique des Mathématiques. Laboratoire de Mathématiques et de Leurs Applications. Université de Pau et des Pays de l'Adour. UMR CNRS 5142.

Volver al índice de autores

4.2.7. Dificultades presentes en la enseñanza y aprendizaje del teorema fundamental del cálculo: un estado del arte

Brian Valenzuela Pagaza
Katia Vigo Ingar
Maestría en Enseñanza de las Matemáticas, Pontificia Universidad Católica del Perú-IREM, Perú

Resumen

El Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) es una importante herramienta de cálculo en cursos de formación del ingeniero, dicha relevancia también se da por la relación que establece entre el cálculo diferencial e integral la cual motivó la presente investigación, que tiene por objetivo realizar un Estado del arte de las investigaciones empleadas en nuestra tesis de Maestría cuyo foco es el estudio TFC. Este trabajo tiene como finalidad conocer las dificultades que se presentan al abordar la enseñanza y aprendizaje del TFC. El estudio realizado evidenció que las nociones de función, continuidad y variación son dificultades que se presentan en el aprendizaje del TFC, por tal motivo son conocimientos previos importantes que debe tener en cuenta el docente al llevar a cabo este tema

Introducción

La enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial e integral es un asunto discutido en distintas investigaciones realizadas en el área de la Educación Matemática, siendo esta una de las problemáticas más abordadas por los investigadores. Con la finalidad de aportar a la comunidad investigadora realizaremos un estudio bibliográfico de los trabajos que tienen como foco de estudio la enseñanza y aprendizaje del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC), las cuales serán clasificadas y analizadas según el criterio, dificultades presentes en la enseñanza y aprendizaje del TFC, como lo indica la metodología empleada, Estado del arte.

El estudio realizado nos permitirá tener un panorama de las dificultades que se presentan al abordar este objeto de estudio, así como estudiar algunas propuestas de solución planteadas por diversos investigadores a la problemática mencionada anteriormente lo cual es el objetivo de nuestra investigación. Las investigaciones consideradas fueron los

antecedentes de nuestra Tesis de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas realizada la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP).

Las dificultades que se presentan en la enseñanza y aprendizaje del TFC es el criterio que emplearemos para sistematizar y organizar las tesis y artículos considerados. Afirmamos, que las nociones función, continuidad y razón de cambio son dificultades que se presentan al abordar el TFC los cuales son conceptos importantes del cálculo.

Metodología

Para realizar un estado del arte consideramos dos procedimientos generales, en primer lugar debemos hacer una búsqueda, selección, clasificación y disposición de fuentes de información y en segundo lugar, debemos realizar una integración de la información obtenida, esto es, hacer un análisis de la misma la cual nos permite tener un panorama global e integrador del área del conocimiento en cuestión. En este sentido para Fiorentini y Lorenzato (2006) una investigación que sigue la metodología Estado del arte se caracteriza porque "procura inventariar, sistematiza y evaluar la producción científica en una determinada área (o tema) del conocimiento buscando identificar tendencias y describir el estado de conocimiento de una determinada área de estudio" (p.103).

La finalidad de realizar un estado del arte de un determinado objeto de estudio es descubrir la concepción e interpretación que tienen los investigadores sobre el objeto en cuestión, esto es, hacer explícita la postura teórica y metodológica que presentan sus investigaciones.

Realizar un estado de arte es equiparable con la revisión de antecedentes, pues nos permitirá tener un panorama actual del objeto de estudio en cuestión. Por ejemplo, en nuestra tesis de maestría realizamos un estado del arte de las investigaciones que empleaban tecnologías al abordar la enseñanza y aprendizaje del TFC.

Según Gómez, Galeano y Muñoz (2015) con respecto a los objetivos de realizar una investigación bibliográfica siguiendo esta metodología se pueden establecer cuatro niveles los cuales son denominados por los autores de la siguiente manera: nivel 1, este consiste en explorar y obtener conocimiento del objeto de estudio en cuestión para poder vislumbrar a donde se quiere llegar con la investigación; nivel 2, construir un saber, esto es, delimitar el estado actual en el que se encuentra el desarrollo teórico lo cual puede ser empleado más

adelante como referencial teórico para futuras investigaciones; nivel 3, comprender un fenómeno, con respecto a este nivel los investigadores plantean que elaborar un estado del arte consiste en elaborar un elaborar un documento, instrumento o metodología que permita ser una guía para perfeccionar una determinada temática; nivel 4, este nivel consiste en crear un marco conceptual o un balance documental, esto es, elaborar marcos conceptuales que amplíen la comprensión del objeto de estudio mostrándolo desde diferente enfoques del conocimiento. A continuación, en la Figura 7 mostramos los niveles mencionados.

Figura 7. Finalidades del estado del arte.



Fuente: Gómez et al (2015, 433)

En relación a los procedimientos metodológicos, la información recolectada en las tesis y artículos fue organizada y sistematizada. Los datos considerados fueron recolectados principalmente de revistas de divulgación científica, como Scielo, Latindex y las tesis fueron investigadas en direcciones electrónicas de Universidades y en bibliotecas, con el auxilio del portal electrónico de la CAPES (Coordinación de Perfeccionamiento de Personal de Nivel Superior de Brasil) y el banco de tesis de la PUCP.

Análisis de las investigaciones

Las dificultades que se presentan al abordar la enseñanza y aprendizaje del TFC, es el criterio que emplearemos para analizar las investigaciones seleccionadas, entre ellas encontramos la noción de función, la continuidad, la variación.

Según Godino, Batanero y Font (2003) distinguir las dificultades y los errores de los estudiantes durante el proceso de aprendizaje, determinar las causas que los provocan y estructurar la enseñanza considerando esta información, es el común denominador de las teorías sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Entiéndase por error, la acción o práctica realizada por un estudiante que no es válida en referencia a un determinado conocimiento matemático; el termino dificultad muestra el mayor o menor grado de acierto de los estudiantes ante una determinada tarea, se dirá que el índice de dificultad es elevado cuando el porcentaje de aciertos es bajo, mientras que, si el porcentaje es alto, la dificultad es baja.

Con respecto a las dificultades que se presentan en el proceso de enseñanza y aprendizaje los investigadores Godino et al (2003) destacan las siguientes:

- Dificultades relacionadas con los contenidos matemáticos, estas son una posible consecuencia cuando se pretende abstraer y generalizar las matemáticas. Por ello se recomienda realizar un análisis del conte

- nido matemático a enseñar con la finalidad de saber el grado de dificultad que presenta dicho contenido, además identificar las variables a tener en cuenta para su enseñanza.

- Dificultades causadas por la secuencia de actividades propuestas, estas se manifiestan cuando la propuesta didáctica que presenta el docente no es significativa lo cual se origina cuando: los contenidos que se quiere enseñar no están bien estructurados; los materiales como libros y actividades, ejercicios y problemas, no están claros o mal diseñados; el enfoque del tema realizado por el profesor no es claro ni está bien organizado por ejemplo, no se le entiende cuando habla o el empleo de la pizarra es el adecuado, caótico, no pone suficiente énfasis en los conceptos clave del tema, etc.

- Dificultades que se originan en la organización del centro, estas se manifiestan cuando el horario del curso es inapropiado, la cantidad de alumnos no es la apropiada, no se dispone de materiales o recursos didácticos, etc.

- Dificultades relacionadas con la motivación del alumnado, este tipo de dificultades está relacionado con la autoestima y la historia escolar del alumno.

- Dificultades relacionadas con la falta de dominio de los contenidos anteriores, esto se da cuando el estudiante no tiene los conocimientos previos necesarios para aprender el nuevo conocimiento.

A continuación, analizaremos los trabajos considerados haciendo uso del criterio mencionado. La investigación de Grande (2013) es una tesis doctoral en la cual el investigador realiza una experimentación en clase con la finalidad de que emerja la relación entre las operaciones de integración y de derivación; además, bajo qué condiciones se establece esa relación. Las actividades diseñadas por el investigador están basadas en la noción de acumulación de una función y son desarrolladas con el apoyo del software GeoGebra.

Para ello realizó un cuestionario piloto con 14 alumnos, de la facultad pública de Tecnología en el Estado de Sao Paulo, en el que se analiza los conocimientos que tienen los estudiantes al abordar tópicos como, acumulación, funciones, razón de cambio, relaciones entre la función y su primitiva, los cuales influyen en el aprendizaje del TFC. Posteriormente, se realiza una actividad con otros estudiantes, de la misma institución, desarrollada con el GeoGebra.

Con respecto a los resultados obtenidos, el cuestionario piloto evidenció en un principio que los estudiantes tuvieron dificultades al interpretar la función representada por

$F(x) = \int_a^x f(t)dt$, pues, no realizaron la interpretación de la integral, la acumulación. La interpretación que tenían los estudiantes de la integral definida, una herramienta para calcular áreas; también, se evidenció que la derivada no era interpretada como una razón de cambio, sino como la pendiente a una curva; por último, se observó que la noción de función y continuidad no estaban muy desarrollados.

En el segundo cuestionario se realizaron dos tareas en el aula, las cuales permitieron relacionar conceptos tratados anteriormente por los estudiantes con el TFC, como la noción de función, continuidad, variación y acumulación, la continuidad de una función resultó ser una condición necesaria para aplicar el TFC, esto se evidenció en la primera tarea al calcular el volumen del sólido planteado. Además, la idea de acumulación estuvo presente en las dos tareas, al igual que la noción de variación entre dos cantidades.

Para el investigador abordar el TFC usando la noción de acumulación produjo una mejora significativa en la comprensión del concepto de integral, además, de permitir que logren articular los procesos de derivación e integración. Motivo por el cual Grande (2013) afirma que el uso del GeoGebra facilita el aprendizaje e interpretación de las nociones de acumulación y variación de una función, pues estos son conceptos dinámicos, siendo una herramienta que permite interpretar y observar patrones de ciertas cantidades, como la sección del sólido, la acumulación al calcular las integrales, entre otras, las cuales les permiten desarrollar las nociones mencionadas.

Por otro lado, la investigación desarrollada por Picone (2007) muestra los registros de representación semiótica que son empleados por los profesores de diversas instituciones, públicas y privadas en Sao Paulo, de Brasil. Los docentes de Cálculo que participan en la investigación cuentan con una amplia experiencia de más de 10 años a excepción de uno que sólo cuenta con dos años de experiencia, entre los grados académicos tenemos que un profesor es PhD, cinco profesores tienen el grado de Doctor y sólo dos presentan el grado de Magister, los grados mencionados son en Matemáticas, Educación Matemática, Física y Educación.

La metodología empleada por la investigadora es cualitativa, está consiste en realizar cuestionarios y entrevistas, las cuales permitieron responder a las preguntas planteadas, los cuestionarios se desarrollan en tres etapas: en la primera, se realizan ocho preguntas que tienen la finalidad de identificar el perfil profesional de los profesores, la experiencia que tienen en el cálculo, además de conocer cómo abordan el TFC en su práctica en el aula, si lo hacen de manera gráfica, en forma algebraica o si plantean ambos, además, del uso de algún libro guía para desarrollar sus clases o si recomiendan libros de consulta para los estudiantes.

En la segunda, se realizaron nueve preguntas con la finalidad de conocer el significado que tienen los profesores sobre el TFC, saber la opinión y las respuestas que tienen ante algunas situaciones planteadas en investigaciones realizadas en Educación Matemática, en las cuales se emplea la noción de acumulación y variación. Podemos notar que en las dos primeras etapas se busca verificar si los profesores en realidad transitan entre dos o más registros de representación, o sólo realizan tratamientos en sólo registro.

En la tercera etapa, se desarrollan las entrevistas, las cuales mostraron que los profesores están de acuerdo en que el transitar en diversos registros, como el gráfico, algebraico y

verbal, es importante para abordar el TFC además señalan que las nociones de acumulación y variación son buenas alternativas para mejorar la comprensión del TFC, pero no todos los ponen en práctica, lo cual se evidencia cuando el investigador afirma que sólo tres profesores movilizan los registros mencionados en su práctica. Otro resultado, son las sugerencias que brindan para mejorar el desarrollo del TFC, entre las que se destaca realizar la interpretación geométrica del mismo, usar funciones que sean discontinuas para generar conflicto en los estudiantes, además, plantear evaluaciones o ejemplos en las cuales las funciones no posean antiderivadas con la finalidad de lograr que los estudiantes evidencien la conexión que establece el TFC entre los procesos de integración y derivación.

La investigación realizada por Anacleto (2007) consiste en analizar los conocimientos que retienen los estudiantes que han asistido a las asignaturas de cálculo diferencial e integral (CDI) en Matemáticas sobre el TFC teniendo en cuenta su importancia y relación con los conceptos de derivación e integración. En un principio el estudio muestra que los conocimientos que retienen los estudiantes de Ciencias de la Computación en una Universidad Particular de Sao Paulo, sobre el TFC está incompleto dado que no articulan las nociones de derivadas, integrales y continuidad. Esto es consecuencia de que sólo memorizaron los procedimientos y algoritmos de aplicación, mas no hubo una reflexión de los aspectos conceptuales del TFC lo que evidenció en la prueba a la que fueron sometidos, la cual es denominada por el investigador prueba piloto. Por tal motivo, el investigador cambio a los sujetos de estudio por estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas, de la misma Universidad, pues debido a su formación recibieron mayor cantidad de horas de clase en relación con el TFC.

El estudio realizado por la investigadora tiene como objetivo investigar el conocimiento que moviliza a los estudiantes que asistieron a la disciplina previamente CDI, así como evidenciar la interrelación entre la derivación y la integración, y en qué nivel se da esta. Para ello el investigador analiza si el conocimiento de los estudiantes es mayor en relación a los evaluados inicialmente para lo cual considera los siguientes puntos:

Primero, la derivada de la integral es el integrando; segundo, la integral indefinida de la derivada de una función es la función original; tercero, la integral definida de una función resulta ser la diferencia entre el valor de una función primitiva evaluada en el límite superior y el límite inferior de la integración; por último, los procesos de diferenciación e

integración son inversos entre sí. Además, de observar cómo los estudiantes manipulan los conceptos relacionados con el TFC, como la continuidad y la integrabilidad.

El cuestionario estaba compuesto por ocho preguntas y se realizó con trece parejas de estudiantes en las horas de clase regulares en dos períodos de 45 minutos, con un intervalo de aproximadamente 10 minutos; esto muestra que los estudiantes pueden calcular la integral definida de funciones polinómicas sin problemas y que esta es interpretada como el área. En la segunda pregunta se evidencia que tienen algunos problemas para calcular la integral definida cuando la función es discontinua en un punto, es decir, no manejan bien las condiciones para aplicar la integral; en las preguntas 3 y 4 se evidencia que los estudiantes obtienen la integral definida, en la cual el límite superior es variable, de manera geométrica, se espera que realicen cálculos como en la primera pregunta. En la pregunta 5 tienen problemas al calcular la integral definida de una función con dominio partido; luego en la pregunta 6 los estudiantes tienen problemas con identificar el gráfico de la antiderivada a partir del gráfico de la función; en la pregunta 7 es el típico problema de derivar a la integral aplicando el TFC, en esta parte se evidencia que hay estudiantes que realizan la integral y luego derivan el resultado, esto muestra que algunos no aplican el TFC; por último en la pregunta 8 se pide a los estudiantes que planteen la importancia del TFC y que muestren un ejemplo donde se puede aplicar el mismo, es una pregunta abierta en la cual los estudiantes responden que la importancia radica en la relación que se establece con la derivada y la integral.

Hasta aquí hemos presentado seis investigaciones donde se evidencia la evolución del TFC a lo largo de la historia y el proceso de formación que ha tenido hasta hoy, considerado como un objeto matemático de estudio. El trabajo histórico-epistemológico de Grande (2013) muestra las dificultades que han tenido los matemáticos al estudiar y lograr formalizar el TFC, lo cual nos hace suponer que esta misma dificultad se encuentra en los estudiantes, motivo por el cual Picone (2007) y Anacleto (2007) afirman que estas dificultades presentes en el TFC hacen que los estudiantes fracasen y reprueben los cursos donde se desarrolla en el TFC.

Las investigaciones muestran que las dificultades que presentan los estudiantes al abordar el TFC son diversas, primero Grande (2013) y Picone (2007) afirman que no tener conceptos sólidos de función, evita que los estudiantes interpreten la siguiente expresión $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ y peor aún que estos realicen ciertas operaciones relacionadas con tal

expresión, por ello en las operaciones se manifiestan muchos cálculos repetitivos lo cual se debe a la algebrización. Segundo, Picone (2007) afirma que cuando los profesores no muestran la relación que hay entre las derivadas y las integrales mediante el TFC los estudiantes no logran entender ciertas conclusiones que brinda la tesis del teorema, lo cual se manifiesta al calcular la derivada de la función $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, los estudiantes realizan la integral para luego derivar, por ello el investigador recomienda usar funciones que carezcan de primitiva. Tercero no abordar el TFC de manera geométrica ocasiona en los estudiantes la creencia de que la integral sólo sirve para calcular áreas, lo cual ocasiona que se pierda una oportunidad de generar en los estudiantes nuevos conocimientos referentes a la integral y las derivadas.

Para Grande (2013), plantear actividades usando el concepto de acumulación genera que los estudiantes relacionen la derivada con la integral en situaciones contextualizadas, además de mostrar que la continuidad no es una condición necesaria para aplicar el TFC. Este investigador recomienda que para superar estas dificultades se deben emplear herramientas tecnológicas como el GeoGebra. A modo de resumen presentamos las dificultades que se presentan en la enseñanza y aprendizaje del TFC en la Figura 8.

Figura 8. Dificultades presentes en la enseñanza y aprendizaje del TFC



Fuente: Realizado por el investigador.

Consideraciones finales

Las dificultades que se presentan al abordar la enseñanza y aprendizaje del TFC estan relacionadas con los contenidos matemáticos lo cual se da al querer generalizar el teorema a todo tipo de funciones, evidencia de ello es cuando intentan utilizar el teorema con funciones discontinuas.

Las dificultades que también se muestran son las causadas por la secuencia de actividades propuestas lo cual se evidencia en la investigación de Picone (2007) en la cual los profesores de cálculo recomiendan realizar actividades que promuevan la formación de conjeturas y el empleo del registro gráfico.

Las dificultades relacionadas con la falta de dominio de los contenidos anteriores, esto se da cuando el estudiante no tiene los conocimientos previos necesarios para aprender el nuevo conocimiento, lo cual se evidencia con los conceptos de función y razón de cambio.

La noción de acumulación permitió contextualizar las actividades, también permitió a los estudiantes articular los procesos de derivación e integración, además de emplear sus conocimientos de función y razón de cambio. Esto se pudo observar en la investigación de Grande (2013).

En las investigacioón de Grande (2013) el concepto de acumulación resulto un elemento clave para la comprensión y manipulación de la función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Además, este concepto resulto de mucha ayuda para que los estudiantes se desprendan de la interpretación geométrica de la integral definida como área bajo la curva.

El uso del GeoGebra facilitó la exploración de las actividades planteadas por los investigadores además de promover la conjetura, la identificación de patrones y la coordinación de representaciones algebraica, gráfica y tabular.

Referencias

Anacleto, G. (2007). Uma investigação sobre a aprendizagem do teorema fundamental do cálculo. (Dissertação de mestrado en Educación Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil.

Fiorentini, D.y Lorenzato, S. Investigação em Educação Matemática: percursos técnicos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2006.

Grande, A. (2013). Um estudo epistemológico do Teorema Fundamental do Cálculo voltado ao seu ensino. (Tesis doctoral en Educación Matemática), Pontificia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, Brasil.

Godino, J. (2003). Matemáticas y su didáctica para maestros. En J. Godino, C. Batanero y V. Font. *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Capítulo 2, pp. 53-82. Granada.

Gomez, M., Galeano, C. y Jaramillo, D. El estado del arte: una metodología de investigación. Revista Colombiana de Ciencias Sociales, 6(2), 423-442. (julio-diciembre,2015)

Picone, D. (2007) Os registros de representação semiótica movilizados por professores no ensino do teorema fundamental do cálculo. (Dissertação de mestrado en Educación Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil.

Volver al índice de autores

4.2.8. Características del modelo epistemológico dominante de la proporcionalidad en textos de educación secundaria

Luigi Najarro Alcócer
Cintya Gonzales Hernández
Maestría en Enseñanza de las Matemáticas, Pontificia Universidad Católica del Perú-IREM, Perú

Resumen

El presente artículo tiene por objetivo describir las características del modelo epistemológico dominante de la proporcionalidad presente en los textos de Matemática de Educación Secundaria. Desarrollamos una investigación cualitativa con enfoque bibliográfico utilizando aspectos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), por ello consideramos modelos epistemológicos construidos en torno a la proporcionalidad para poder describir la organización matemática (OM) a enseñar. Revisamos cómo se presenta la proporcionalidad en los documentos curriculares en los cinco grados de secundaria. Luego describimos la OM en los textos oficiales otorgados a los estudiantes. Esta descripción la hacemos a través de los componentes de una OM. El análisis muestra 6 tipos de tareas, 11 tareas, 17 técnicas y 8 discursos tecnológicos. Las modelizaciones dominantes son la modelización discursiva y la proporcional, que en su conjunto es denominada como organización clásica de la proporcionalidad. Asimismo, en cuanto a los objetos ostensivos se evidencia una presencia notable de las tablas de proporcionalidad.

Introducción

El trabajo describe las características del modelo epistemológico dominante en torno a la proporcionalidad presente en los textos escolares de Matemática, que fueron distribuidos a estudiantes de instituciones públicas del Perú por el Ministerio de Educación en el año 2016. Estos materiales fueron diseñados teniendo en cuenta los indicadores de desempeño descritos en las Rutas de Aprendizaje (2015). Este análisis nos permitió identificar las características del modelo epistemológico dominante presente.

Utilizamos las herramientas de la TAD para llevar a cabo nuestro análisis de la OM a enseñar. Según la transposición didáctica, esta organización tiene influencia en la organización matemática enseñada y en la organización matemática aprendida.

La importancia del objeto matemático proporcionalidad se evidencia en que desde la antigüedad es considerada en diferentes ámbitos de la vida. Asimismo, es tomado en cuenta en diferentes currículos a nivel mundial, como por ejemplo en la ESO de España, por otro lado, es común encontrarla en los sílabos de los diferentes programas de educación superior, como en Facultades de Ciencias y Humanidades. Por ello, consideramos relevante y necesario realizar un estudio exploratorio del modelo epistemológico dominante teniendo en cuenta el Modelo Epistemológico de Referencia (MER) propuesto por García (2005), las organizaciones matemáticas presentes en los textos escolares de Secundaria y la normativa curricular.

Finalmente, es importante señalar que la relevancia de este objeto en las Evaluaciones Censales de Estudiantes, como por ejemplo en la ECE 2015 y ECE 2016 para alumnos de II de secundaria. Asimismo, es común encontrar tareas vinculadas a la proporcionalidad en los diferentes exámenes de admisión de casas de estudio de nivel superior.

Marco teórico

Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD)

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) propuesta por Chevallard (1999) sitúa la actividad matemática en el conjunto de actividades humanas y de instituciones sociales, considera a la didáctica de la matemática como una actividad humana y admite que "toda actividad humana regularmente realizada puede describirse con un modelo único" denominado praxeologías.

Praxeologías

La noción de praxeología constituye una herramienta fundamental para modelizar la actividad matemática, que son construcciones institucionales, como toda obra humana surge como respuesta a un conjunto de cuestiones y como medio para llevar a cabo determinadas tareas problemática. Esta presenta la siguiente estructura [T/τ/θ/Θ].

- ✓ **Tipos de tareas T**: Conjunto de ejercicios, problemas, o actividades propuestas.
- ✓ **Técnica τ**: Es un saber -hacer una determinada tarea. Una técnica τ es una manera de dar solución efectiva a una tarea. En nuestra investigación, consideraremos la

reducción a la unidad y la *regla de tres simple* como técnicas que permiten resolver tareas específicas.

- ✓ **Tecnología θ:** Discurso que justifica racionalmente la técnica τ para asegurarse de que pueda realizar las tareas. La definición de razones y proporciones es la tecnología que justifica, por ejemplo, la técnica "regla de tres" para nuestra investigación.

- ✓ **Teoría Θ:** Justifica el discurso tecnológico. Por ejemplo, la teoría de las magnitudes variables podría justificar la tecnología que respalde la técnica de "regla de tres".

1.Ostensivos en la TAD

Según Bosh (1994) se denomina ostensivo a todo objeto dotado de una naturaleza sensible, de cierta materialidad, y que, por ello, puede presentarse al sujeto como una realidad perceptible y manipulable. Podemos considerar como ostensivos a los sonidos (morfemas lingüísticos), los grafismos (grafemas que componen la escritura de las lenguas naturales y formales), los gestos, entre otros.

Los objetos ostensivos permiten evocar objetos no ostensivos, es decir, nociones matemáticas que no se pueden manipular (conceptos, definiciones, ideas, etc.). Teniendo en cuenta esta afirmación, por ejemplo, la notación $f(x)=kx$ evoca a la proporcionalidad directa. Según Bosch (1994) los objetos ostensivos tienen una valencia instrumental y una valencia semiótica dentro de una institución, un periodo de tiempo y con ciertos objetos matemáticos.

Modelo Epistemológico de Referencia (MER)

Es un modelo teórico básico construido para analizar la transición y evolución de los saberes entre diferentes instituciones. También para describir y analizar, los modelos epistemológicos dominantes en determinadas instituciones. Según Gascón (2014) permite fijar la amplitud del problema de investigación, identificar fenómenos didácticos y elaborar explicaciones tentativas y tipos de soluciones. Un MER tiene carácter relativo, asimismo, ayuda a construir modelos alternativos didácticos en una institución dada. Este puede expresarse en forma de una sucesión de praxeologías elaboradas en base a respuestas parciales de una cuestión problemática inicial. Cada una de estas surge de la ampliación o

desarrollo de la anterior ante las limitaciones de ésta para aportar respuestas a las cuestiones que se plantean.

2. Metodología

Adoptamos un enfoque cualitativo según Hernández et al (2010) puesto que se observa, describe e intenta comprender los fenómenos tal como se presentan en su medio natural.

Asimismo, consideramos que es una investigación de tipo bibliográfica, porque, analizamos los documentos y también libros de texto. A continuación, presentaremos la secuencia de pasos que realizamos para la realización de nuestros objetivos.

1) Identificamos en las Rutas de Aprendizaje el objeto matemático proporcionalidad.

2) Identificamos y describimos los elementos de la OM proporcionalidad.

3) Identificamos las características del modelo epistemológico dominante presente en la OM descrita teniendo en cuenta el MER de García (2005).

3. Estudio de la proporcionalidad

Modelización de sistemas de variación entre magnitudes

García (2005) reformula y completa los niveles de algebrización propuestos por Bolea, Bosch y Gascón (2001), y elabora un MER teniendo en cuenta las siguientes modelizaciones:

Modelización discursiva: La describe como una OM puntual, generada en torno a la técnica de "reducción a la unidad", que permite la realización de una actividad matemática bastante limitada para sistemas lineales e lineales inversos (proporcionalidad directa e inversa). Su marco tecnológico - teórico explícito es casi inexistente, limitándose a la descripción oral de las propiedades.

Modelización proporcional: Esta modelización es conocida también como "clásica" y estará formulada en términos de razones y proporciones. Se evidencia la ausencia de una teoría del álgebra de magnitudes que justifique la realización de operaciones entre cantidades de magnitudes de diferente naturaleza (razones heterogéneas), por lo que solo se considera proporciones con razones homogéneas en la técnica de la regla de tres.

Modelización ecuacional: Puede considerarse como una organización matemática local, porque contiene cierta variedad de técnicas y de tipos de cuestiones problemáticas, más allá de la mera determinación de nuevos estados, y porque lleva a cabo ciertos cuestionamientos en el nivel tecnológico. La ampliación del marco teórico justifica las operaciones entre magnitudes y permite establecer razones heterogéneas.

Modelización funcional: En esta modelización la teoría evoluciona hasta la teoría de las funciones reales de variable real, esta da lugar a una variación ostensiva en las tecnologías, que considera la correspondencia entre M y M' como una correspondencia unívoca entre conjuntos numéricos.

La proporcionalidad en Rutas de Aprendizaje

Fueron publicadas por el Ministerio de Educación (MINEDU) en el año 2012 y se fueron reestructurando hasta su última versión en el año 2015. Considera orientaciones para el área e indicadores de desempeño para cada grado y/o ciclo y sirvieron de insumos para la elaboración de los textos escolares de Secundaria que analizamos en el presente trabajo de investigación. La proporcionalidad es identificada en los cinco grados en la competencia de cantidad y en I y II en la competencia de regularidad, equivalencia y cambio

4. Análisis de los textos escolares

En la tabla 1 identificamos las tareas presentes en cada uno de los textos de Matemática de Secundaria. Podemos observar que el tipo de tareas que más situaciones presenta en los textos es el de determinar el término desconocido en una relación de magnitudes proporcionales.

Tabla 1: Tareas presentes en los textos de Matemática de Secundaria

TIPO DE TAREA	**TAREA**	**CANTIDAD DE PROBLEMAS RESUELTOS**				
		I SEC	**II SEC**	**III SEC**	**IV SEC**	**V SEC**
(T_1): Determinar el término desconocido en una relación de magnitudes proporcionales	Tarea ($t_{1,1}$): Calcular el término desconocido de dos magnitudes directamente proporcionales	10	5	3	3	
	Tarea ($t_{1,2}$): Calcular el término desconocido en una relación de dos magnitudes inversamente proporcionales	4	4	3	3	

	Tarea ($t_{1,3}$): Calcular el término desconocido en una relación de más de dos magnitudes proporcionales		1	3	3	
(T_2): Identificar magnitudes proporcionales	Tarea ($t_{2,1}$): Identificar magnitudes directamente proporcionales en una tabla	1	1			
(T_3): Distribuir una cantidad en partes proporcionales a números dados	Tarea ($t_{3,1}$): Distribuir una cantidad en partes inversamente proporcionales a números dados	1			3	
	Tarea ($t_{3,2}$): Distribuir una cantidad en partes directamente proporcionales a números dados				3	
(T_4): Interpretar la relación de dos magnitudes proporcionales como una función	Tarea ($t_{4,1}$): Interpretar la relación de dos magnitudes directamente proporcionales como una función lineal	3	5			
	Tarea ($t_{4,2}$): Interpretar la relación de dos magnitudes inversamente proporcionales como una función de proporcionalidad inversa		1			
(T_5): Analizar la razón entre dos magnitudes	Tarea ($t_{5,1}$): Determinar la razón entre dos cantidades en un mismo espacio de medidas		1			1
	Tarea ($t_{5,2}$): Determinar una cantidad teniendo el valor de la razón					2
(T_6): Aplicar propiedades de razones y proporciones	Tarea ($t_{6,1}$): Aplicar propiedades en una serie de razones					1

Autoría propia

A continuación, en la tabla 2 se muestran los ostensivos identificados en los textos escolares analizados.

Tabla 2: Ostensivos presentes en los textos de Matemática de Secundaria

TEXTOS ESCOLARES	Ostensivos										
	a/b = c/d	**Tabla**	K: constante de proporc.	Repres. Cartes.	a:b :: c:d	y= kx;y=k/x	f(x) =mx;f(x)=m/x	Oper	→ →	Repres Sagital	Oral
I SECUNDARIA	9	**13**	6	6	1	1	2	1	1	1	11
II SECUNDARIA	8	**13**		6		1	5		2		7
III SECUNDARIA	6	**8**	1			1		1			8
IV SECUNDARIA	9	**9**	7	2							8
V SECUNDARIA	4		1								

Autoría propia

Observamos que la mayor recurrencia de ostensivos es la tabla de proporcionalidad. Este es a la vez un registro de representación de datos y un ostensificador. Cuando los datos se representan en una tabla, las cantidades proporcionales son distinguidas; hay una mejor organización del trabajo, en particular al determinar si el valor a calcular es una imagen o un antecedente. Además, permite la materialización de la constante de proporcionalidad y de los operadores internos (adición y multiplicación) que intervienen en la situación. Asimismo, la tabla de proporcionalidad tiene una valencia instrumental ya que la técnica del producto cruzado o del producto lineal se puede utilizar para el cálculo de la cuarta proporcional si estamos trabajando problemas de proporcionalidad directa o inversa respectivamente.

Según Hersant (2001, citada en Najarro, 2018) Los ostensivos utilizados para resolver problemas de proporcionalidad tienen diferentes valencias semióticas e instrumentales. La elección de uno u otro determina la actividad matemática a realizar.

Otro de los ostensivos recurrentes es el lenguaje oral con expresiones del tipo "a más, menos" y "a menos, más". Estos ostensivos tienen un valor instrumental porque pueden servir para el tratamiento oral de un problema de proporcionalidad inversa, aunque también pueden llevar al error de tipo conceptual si es que no se acompaña del concepto de constante de proporcionalidad, pudiendo generar así un obstáculo didáctico.

El análisis de los documentos curriculares, así como la identificación y descripción de los elementos de las organizaciones matemáticas en torno a la proporcionalidad en los textos escolares, nos permitió conocer cómo vive y/o pervive nuestro objeto de estudio en la noosfera e identificar las características del modelo epistemológico dominante.

1. Con respecto a las Rutas de Aprendizaje (2015), documento guía para la elaboración de los textos escolares, la proporcionalidad de manera explícita es considerada en los cinco grados de Educación Secundaria en la competencia: Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de cantidad. Los indicadores de desempeño están referidos a que el estudiante identifique magnitudes proporcionales y resuelva problemas utilizando como técnicas la reducción a la unidad, la regla de tres simple y la regla de tres compuesta. Asimismo, en la competencia: Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de regularidad, equivalencia y cambio, la proporcionalidad se presenta solo en los grados de primero y segundo. Algunos indicadores de desempeño en esta competencia buscan articular la proporcionalidad directa con la función lineal y la proporcionalidad inversa con la función de proporcionalidad inversa lo que correspondería, según García (2005), a la modelización funcional de sistemas lineales y lineales inversos.

2. Con respecto al análisis de los textos escolares haciendo uso de las herramientas de la TAD, identificamos 6 tipos de tareas, 15 tareas, 23 técnicas y 8 discursos tecnológicos. Teniendo en cuenta los resultados obtenidos, podemos decir que la organización matemática es local (formado por organizaciones puntuales) y que las modelizaciones dominantes son la discursiva y la proporcional, que corresponden a la organización clásica de la proporcionalidad. En la organización clásica, se describe la proporcionalidad como una relación de dos series de números, pero los problemas y

técnicas utilizadas en su mayoría siempre están relacionadas a la regla de tres, este fenómeno lo denomina la "evitación del álgebra". Comin (2000) denomina a este fenómeno como la "numeralización de la proporcionalidad", esto debe ser considerado como una consecuencia de la algebrización desigual de los componentes de la OM. En efecto dado que la algebrización no alcanza las técnicas, los problemas de la proporcionalidad son considerados como aritméticos y la relación de proporcionalidad pasa de una relación funcional entre variables (continuas) a ser simplemente una relación aritméticas entre números

3. En los grados de primero y segundo de secundaria se identifica una presencia de las tareas, técnicas y discursos tecnológicos correspondientes, según García (2005), a una modelización funcional de sistemas lineales y lineales inversos, siendo la constante de proporcionalidad un elemento de articulación entre la proporcionalidad y la función. Sin embargo, la actividad matemática en torno a esta modelización no llega a cimentarse pues es diluida por las tareas clásicas en torno a las funciones como, por ejemplo, encontrar dominio y rango, crecimiento, interceptos, entre otros. En tercero, cuarto y quinto de secundaria la posibilidad de articulación de la proporcionalidad y las relaciones funcionales está descartada.

4. La gran mayoría de problemas presentes en los textos escolares ya se suponen proporcionales y se define la relación de proporcionalidad de manera implícita o como una convención social y a partir de ello se utiliza las técnicas de la organización clásica.

5. En cuanto al uso de los ostensivos podemos indicar que se identifica con mayor presencia el uso de tablas para representar relaciones de proporcionalidad directa, inversa y compuesta. Asimismo, la notación clásica para representar razones y proporciones, es decir, a través de la pequeña línea horizontal que se utiliza para las fracciones, tiene también una presencia fuerte en los materiales analizados. En los textos de primero y segundo de secundaria se identifica también como ostensivos la representación cartesiana y la notación $f(x)$, que permiten articular la proporcionalidad con la función.

6. El discurso coloquial y cultural "a más, más" y "a menos, menos" aún persiste en los textos escolares. Aunque se trata siempre de complementar con la definición de constante de proporcionalidad, a veces no se logra. Esto podría afianzar una tecnología

espontánea de los docentes en torno a la proporcionalidad y generarles confusión al momento de programar sus sesiones de aprendizaje.

5. Conclusiones

La TAD ha sido oportuna pues brinda las herramientas para describir y analizar cuestiones relativas al estudio del objeto matemático proporcionalidad en los documentos curriculares y materiales educativos. El modelo epistemológico dominante en torno a la proporcionalidad en los materiales educativos escolares difundidos a nivel nacional por el Ministerio de Educación no es el del álgebra como instrumento de modelización pues las tareas y técnicas de la modelización discursiva y de la modelización proporcional se presentan de manera dominante en todos los grados de la Educación Secundaria.

El tipo de tarea dominante en los materiales es el de determinar el término desconocido en una relación de magnitudes proporcionales, en donde la reducción a la unidad, regla de tres simple y regla de tres compuesta se convierten generalmente en las técnicas empleadas en la mayoría de grados. Aunque la presente investigación no pretende describir las características del modelo docente en torno a la proporcionalidad, es importante tener presente el modelo epistemológico dominante pues podría tener una influencia significativa.

Referencias

Bosch, M.; Fonseca, C.; Gascón, J. (2004). Incompletitud de las Organizaciones Matemáticas Locales en las Instituciones Escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 24 (2), 205-250.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.

Comin, E. (2000). *Proportionnalité et fonction linéaire: caractères, cause et effets didactiques des évolutions et des réformes dans la scolarité obligatoire*. (Tesis de doctorado, Universidad de Bordeaux I, Bordeaux, Francia). Recuperado de http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00827905/

García, F. (2005). *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales*. (Tesis Doctoral). Universidad de Jaén, España.

Gonzales, C. (2014). *Una praxeología matemática de proporción en un texto universitario.* (Tesis de Maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú. Recuperado de http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/5225

Hernández, R., Fernández, C., & Batista, P. (2010). *Metodología de la Investigación*. McGraw-Hill Interamericana. México.

Hersant, M. (2005). La proportionnalité dans l'enseignement obligatoire en France, d'hier à aujourd'hui. *Repéres*, IREM, *59*, 5-41.

Najarro, L. (2018). *Caracterización del modelo epistemológico dominante de la proporcionalidad en los textos de matemática de educación secundaria.* (Tesis de Maestría en proceso de sustentación). Pontificia Universidad Católica del Perú.

Perú. Ministerio de Educación. *Rutas de aprendizaje* (2015). Lima.

Volver al índice de autores

4.3. Socialización de experiencias

4.3.1. Una mirada a las competencias de modelación matemática de estudiantes universitarios de carreras de letras: el caso de artes escénicas

Rosa Eulalia Cardoso Paredes, Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú
Norma Rubio Goycochea, Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú
Maritza Luna Valenzuela, Pontificia Universidad Católica de São Paulo, Brasil
Ana Sofía Aparicio Pereda, Universidad São Paulo, Brasil

Resumen

El trabajo muestra algunas condiciones para el logro de competencias matemáticas en estudiantes universitarios del primer ciclo de Estudios Generales de la carrera de Artes Escénicas, matriculados en el curso de Matemática Básica. El análisis se realiza desde la concepción de la modelización matemática de Blomhøj y Højgaard (2003) y el Enfoque Ontosemiótico en la faceta cognitiva de la idoneidad didáctica de Godino (2011). Es decir, evidenciamos algunas condiciones que siguen contenidos matemáticos para desarrollar la competencia de modelización matemática de los futuros profesionales, no matemáticos, logradas desde un trabajo sobre la aplicación de las matemáticas

Introducción

En Cardoso, Rubio & Luna (2017a), se ubica a la didáctica de la matemática como un área o rama de la matemática aplicada, coincidiendo con D´Ámore y Fandiño-Pinilla (2017) quien comenta lo siguiente:

> "…hace tiempo sugerimos que se puede interpretar la DdM como una disciplina interna a la matemática misma, una matemática aplicada, precisando aún más, aplicada a la problemática de la enseñanza – aprendizaje de la matemática" (D´Ámore y Fandiño-Pinilla, 2017, p. 5)

Al respecto, desde las evidencias en la práctica pedagógica universitaria, consideramos que una de las tareas con la cual contribuye y se nutre la matemática, es a la de encontrar formas de resolver problemas que todo ciudadano profesional o no enfrentará en su vida; y para ello, los didactas de la matemática o profesionales en matemáticas deben proveer las

herramientas matemáticas necesarias; compromiso que, de cumplirse, permite el desarrollo de las condiciones para que dicho ciudadanos y/o profesionales en situación laboral puedan desempeñarse eficientemente. Es decir, estos deben saber hacer uso de los modelos matemáticos que le permitirán la solución de sus problemas y sobre todo ser competentes adecuando sus datos a los modelos que la matemática provee o encontrando otros; es decir, realizar la modelización de los datos para obtener la solución; para ello seguramente pone en acción, todos los cocimientos matemáticos que permitan ese logro.

Una de las recomendaciones que hacen los investigadores como Strauss y Cobin (2002), es que una realidad está llena de situaciones que no debemos dejar de percibirlas. Es por ello que, durante el desarrollo de cada periodo académico, nos proponemos observar a los integrantes del grupo clase, y en esta ocasión, fijamos nuestro ojo observador en el caso de un grupo de estudiantes de artes escénicas. Los estudiantes de estas carreras normalmente declaran que para ellos la matemática es muy difícil, que la experiencia de su nivel anterior es muy mala, que la enseñaron mal y la hicieron muy difícil (comentarios que podemos contrastar en Rubio (2012) con los desempeños poco óptimos de profesores de secundaria en servicio); a ello se une, la creencia de que no les será útil en sus actividades cotidianas. Sin embargo, como bien lo declara Blomhøj y Højgaard Jensen (2003), los docentes de cualquier nivel educativo debemos contribuir con escenarios adecuados para que todos los estudiantes logren tener la necesidad de usar el lenguaje matemático. En ese sentido, decidimos observar para conocer, cómo un curso de matemáticas básicas contribuía al desarrollo profesional de estudiantes de especialidades donde la matemática parece tener poca utilidad; para ello nos formulamos la pregunta: ¿De qué modo las condiciones que se propician en las clases de matemáticas permiten el desarrollo de la competencia de modelización matemática necesaria en la vida profesional de estudiantes de la carrera de artes escénicas?

Para responder a esta pregunta nos fijamos el objetivo de analizar la solución a la tarea "Trabajo sobre el uso de las Matemáticas (TSUM)" de un grupo conformado con 4 estudiantes de la carrera de artes escénicas que, al inicio del curso, cuando deben decidir el problema, se mostraron escépticos al reto, insistiendo que ellos no saben dónde utilizarían las matemáticas en su carrera. A partir de ese comentario negativo de los estudiantes, se realizó la conexión con la necesidad de los alumnos para lo cual se comenta nuestra asistencia a una obra teatral "El gran teatro del mundo" que se acaba de estrenar en el medio. Este comentario docente "acabo de estar en el estreno de la obra el gran teatro del

mundo y he visto la aplicación de mucha matemática allí". Los estudiantes captaron la idea y permitió que los estudiantes conectarán sus propias necesidades y organizarán su trabajo TSUM que hoy nos permite analizar en este reporte.

El análisis de nuestro reporte, se realiza siguiendo el ciclo de modelización que propone Blomhøj y Højgaard Jensen (2003) que se compone de los procesos: La situación problema presente en el mundo real, la formulación del problema matemático, la sistematización, matematización, análisis del sistema matemático, interpretación y evaluación, y la validación. Así mismo, desde el Enfoque Ontosemiótico (EOS), que nos permite valorar la idoneidad cognitiva implicada en la solución de la tarea. La idoneidad cognitiva, es la que expresa el grado en que los significados pretendidos/implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/implementados. La elección del ciclo de modelización y del EOS es con el fin mostrar los cambios actitudinales que los estudiantes participantes en la actividad tienen y lo declaran en la sustentación pública del trabajo que realizan como conclusión de su participación como alumnos del curso en cuestión.

La modelización como competencia matemática

La tarea llamada "Trabajo sobre el uso de la matemática" (TSUM) en sus carreras, que se solicita como parte del desarrollo del curso, es con la idea de desafiar a los estudiantes en el uso de la matemática con el fin de (1) establecer procesos cognitivos para la concepción, de parte del alumno, de algunos conceptos matemáticos básicos que consideren útiles, y (2) experimentar y concebir a la matemática como medio para describir, analizar y ampliar la comprensión de situaciones de la vida cotidiana.

La modelización matemática tiene diferentes significados en los distintos niveles educativos. Así por ejemplo, en los primeros años de la educación básica, los alumnos usan la matemática para describir situaciones de su vida diaria aún sin darse cuenta, mucho más sin saber que lo que hacen es trabajar con la modelización matemática. Es por ello que, ya en esos primeros años de escolaridad se debe hacer posible que los alumnos se involucren en proyectos disciplinares o interdisciplinares que contengan espacios de modelización completos, así como y a reflexionar sobre sus resultados. Los estudiantes de todos los niveles pueden, de manera progresiva observar su entorno y trabajar los datos con

contendidos estadísticos, funciones, geometría; los mismo que forman parte del currículo nacional de todo país.

El trabajo por proyectos en la escolaridad básica, permitiría que los estudiantes en el nivel universitario, sobre todo en las carreras profesionales que, aparentemente, no necesitan utilizar el lenguaje matemático para resolver situaciones de sus actividades cotidianas, sepan que si lo harán y presenten mejor disposición a su uso. Esta disposición, les puede permitir optimizar sus decisiones, así como predecir sus resultados y disminuir los riesgos. Es decir, ir adquiriendo una buena competencia de modelización que la entendemos como Blomhøj y Højgaard Jensen

> "Por competencia en modelización matemática quiero decir ser capaz de llevar a cabo en forma autónoma y consciente todos los aspectos de un proceso de modelización en un contexto dado, cf. con la figura 1". (Blomhøj y Højgaard Jensen, 2003, pp.124)

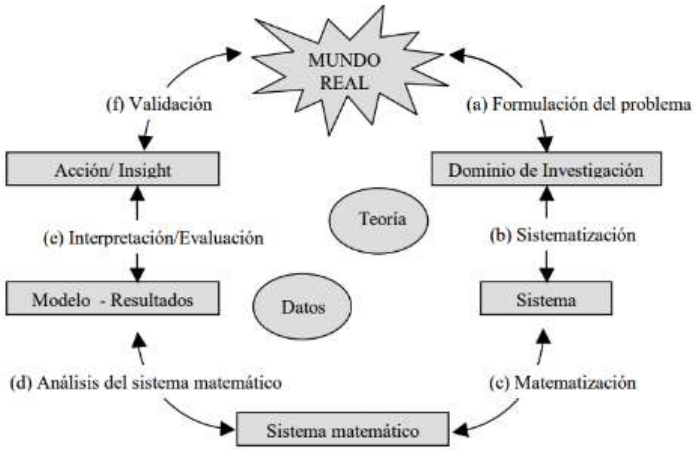


Figura1: Ciclo de modelización matemática (Blomhøj y Højgaard Jensen (2003)

En este reporte, el modelo gráfico de Blomhøj y Højgaard Jensen (2003), nos sirve para validar la competencia de modelación identificada en un grupo de estudiantes de los Estudios generales Letras, los cuales tienen que enfrentar y resolver problemas que implica el ciclo de modelización matemática. Estas situaciones-problema pueden ser obtenidas con un análisis objetivo de su contexto o realidad, donde la matemática es aplicada para describir dicha situación en la que se desenvuelven. Ello significa que el contexto o la realidad de sus especialidades o profesiones tienen el potencial, en una situación de

enseñanza, de desafiar a los alumnos a trabajar con todos los procesos del ciclo de modelización planteado por Blomhøj y Højgaard Jensen.

En la mayoría de los casos, la matematización (horizontal y vertical) y el análisis del modelo (procesos (c) y (d)) constituyen un problema matemático para el que modela y en consecuencia, el proceso de modelización incluye la resolución de problemas matemáticos. Pero es importante tener en cuenta que es el problema de la vida real el que debería guiar la actividad de modelización y que la resolución del problema está subordinada a al problema. Desde lo didáctico es importante que la perspectiva de modelización considere a la actividad de resolución de problemas en un contexto más real y menos simulado e incluya solución de problemas de naturaleza extra-matemática que involucren, por ejemplo, procesos de formulación del problema, la sistematización, la matematización (vertical u horizontal), el análisis del sistema, la interpretación tan necesaria para poder tomar desiciones.

Contexto de reflexión: La competencia de modelización en acción: Uso de las matemáticas a través de la rentabilidad en una obra teatral: "Avenida Larco"

Al realizar una comparación con las actividades que presentan Blomhøj y Højgaard Jensen (2003): Los alumnos en estudio parten de su mundo real, el cual es diferente a cada uno de ellos y a cada uno de los grupos. La intervención del docente consiste en dar orientaciones mínimas y puntuales como es a la organización de los grupos, solución de algunos conflictos entre sus integrantes, puntualizar en cada clase o tema que se imparte, vayan tomando en cuenta si los contenidos pueden o no servirles para resolver el problema que ya tienen planteado. Cabe anotar que no todos terminan sustentando el trabajo con el mismo problema con el que iniciaron al momento de entregar la versión final, pero lo que sí se puede observar es que cada la situación- problema planteada es creada, adaptada o modificada por ellos. Como lo muestra en el texto siguiente:

> *"El teatro musical ha alcanzado popularidad en el público peruano, esto se debe, gracias a grandes éxitos como: Hairspray, Mamma Mía, Déjame que te cuente, o En el Barrio; presentadas en la última década. Es por ello que, actualmente, muchas productoras buscan ideas innovadoras para realizar estos tipos de espectáculos, para así obtener una buena rentabilidad. Una de las ideas de la productora "Dragón Producciones" ha sido montar la obra musical "Avenida Larco", una vez más, en el año 2017; con un total de 5 funciones y 300 butacas*

disponibles. Para realizar una puesta en escena de gran magnitud como lo fue "Avenida Larco", se dispone de un presupuesto de s/ 50 000, con los cuales se debe realizar el siguiente procedimiento:

Sueldo de los actores, primarios y secundarios

Contratación del director y dramaturgo

Producción (maquillaje, vestuario, luces, escenografía)

Publicidad

Alquiler del teatro

Como la obra propuesta es de tipo musical; la productora busca actores que a su vez tengan instrucción en danza y así poder ahorrar parte del presupuesto en bailarines. Además, busca una banda sonora conformada por un grupo de estudiantes de música, ya que resulta ser más accesible que contratar una banda profesional. Se debe tener en cuenta que la productora busca resaltar la publicidad, tanto en paneles públicos, como tv, internet, radio, etc. Para la productora, de la publicidad depende la rentabilidad y éxito.

Elaborado por: Vera, Ale, Melgarejo y Sifuentes en el semestre 2017-Ito de dicha obra*".*

A continuación, presentamos otra parte de este mismo trabajo en estudio, que consiste en una situación planteada por el grupo de los alumnos donde muestran la iniciativa de poner en acción los conocimientos que ellos aprenden autónomamente y lo denominan **"contenidos matemáticos extra clase"**.

EXTRA – CONTENIDO MATEMÁTICO NO EJERCIDO EN CLASE:

Problema 2.b)

El costo de alquiler, por día, será de S/. 300, y se le descontará el 10% del costo por cada día adicional. Determine la función para el costo de ***alquiler total*** *en función del número de días.*

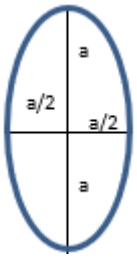
$$Pago\ diario(d) = 0.9^{d-1}(300)$$

No se puede hallar una función particular para resolver la situación mencionada, nos damos cuenta de que el pago total es una sumatoria del pago diario para los días en cuestión.

$$Pago\ Total\ (d) = \sum_{i=1}^{d} 0.9^{d-1}(300)$$

Problema 3

Para marcar la diferencia, la productora ha decidido hacer un banner de forma ovalada, de cuya altura y ancho estén en relación de 2 a 1 respectivamente.



a) Hallar una función para el área un banner en función del ancho dado.

Ancho: "a" metros *Alto: "2a" metros*

Entonces, vemos que el banner tendrá la forma de 2 parábolas. Consideraremos el centro del banner como el punto (0; 0), para realizar la regla de correspondencia.

Vértice Superior: (0, a).

Ecuación de la Parábola: $-\frac{4}{a}(x^2) + a, Dominio: -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}.$

Vértice Inferior: (0;-a).

Ecuación de la Parábola: $\frac{4}{a}(x^2) - a,\ Dominio: -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}.$

b) Si se desea hacer un banner de 4 metros de ancho, determine el área del mismo.

a = 4 → Ecuación de la Parábola: $-(x^2) + 4, Dominio: \ -2 \leq x \leq 2.$

Elaborado por: Vera, Ale, Melgarejo y Sifuentes en el semestre 2017-Ito de dicha obra".

Si bien, la retroalimentación a los estudiantes sobre el avance y la presentación del trabajo es periódica, solo se logra comentar que un afiche con esa forma también habría sido posible aplicando otros modelos matemáticos como el de las cónicas, en este caso el de una elipse utilizando los mismos datos y figura propuestos por el grupo, cuya ecuación sería:

$$\frac{x^2}{(\frac{a}{2})^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Como el tiempo de sustentación del trabajo es corto, para poder hacer comentarios en el momento de la exposición, sin embargo, se hacen las anotaciones en su trabajo impreso. Ese el espacio para puntualizar sobre algunas impresiones o conceptos que trabajaron porque consideraron necesario agregar. Por ejemplo, en este caso se hizo necesario aclarar sobre el borde de una superficie y el área de la misma usando el banner como ejemplo. Extendiendo la necesidad de conocer el contenido de integración para poder encontrar el área del banner propuesto.

Cabe comentar que no siempre los estudiantes que iniciaron en un grupo terminan en el mismo grupo y por ende con el mismo problema, por ello, el mayor peso a la valoración del trabajo se encuentra en la sustentación final, espacio donde cada uno de los miembros del grupo, evidencia los conocimientos y contenidos matemáticos que han aprendido, al defender la solución que muestran al problema planteado.

Después de analizar la competencia de modelización matemática puesta en práctica por los estudiantes, nos percatamos que es necesario mirar la ejecución de este trabajo desde el estudiante y en ese sentido, decidimos utilizando las facetas de la idoneidad del EOS, específicamente la cognitiva para identificar algunos aspectos importantes de sus desempeños que evidencian la competencia:

LA IDONEIDAD COGNITIVA Grado en que los contenidos implementados (o pretendidos) son adecuados para los alumnos, es decir, están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos.	
Componentes	Desempeños
Conocimientos previos (Se tienen en cuenta los mismos elementos que para la idoneidad epistémica)	Como se puede notar en el desarrollo del trabajo completo, los alumnos de este estudio tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio y ejecución de su proyecto de trabajo. Los alumnos han utilizado muy bien los contenidos propuestos en el curso y han ido identificando en forma ordenada y progresiva cada uno de los contenidos que necesitaban. Es decir, que los temas que la Unidad Académica de Estudios Generales ha propuesto, responde a las necesidades. Los contenidos pretendidos, al ser implementados, son logrados por la necesidad de la solución de un problema real, lo cual se puede observar en el planteamiento de los problemas y sus soluciones por el grupo.
Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales	- En Cardoso, Rubio y Luna (2017a) y PUCP (2017) se indica las adaptaciones que la Unidad Académica de los estudios Generales Letras hace a los contenidos del curso de Matemática Básica. Estos cambios propician el aprendizaje de contenidos matemáticos a más estudiantes pues antes el porcentaje de desaprobados era muy alto. - El trabajo se debe desarrollar por grupos, y de una manera autónoma. Por lo tanto, la elección de los integrantes del grupo puede ser de la misma especialidad, por amistad, o cualquier criterio que los estudiantes tengan. Este trabajo, permite que se promueva la colaboración para el aprendizaje de todos los contenidos.
Aprendizaje:	El logro del TSUM es el resultado de los diversos modos de evaluación, es por ello que en el documento podemos observar que

Se tienen en cuenta los mismos elementos que para la idoneidad epistémica)	los alumnos se han apropiado de los conocimientos (porcentaje, escalas, funciones: afín, lineal, cuadrática, exponencial, estadística, uso de las TIC) y competencias pretendidas como la de modelación matemática. - La comprensión conceptual y proposicional se puede notar en la organización de los problemas y sus soluciones. - La competencia comunicativa y argumentativa, al escribir su trabajo, usando el lenguaje matemático como se notar en todo el desarrollo de este. - La fluencia procedimental, esta evidenciada en todo el desarrollo del trabajo, pues cada problema que presentan y representa una situación por resolver muestran los procedimientos para resolverlos. La competencia metacognitiva se evidencia cuando el grupo indica: "*Como grupo hemos relacionado nuestra carrera: Artes Escénicas (en la mayoría de los integrantes) con temas matemáticos como los porcentajes y estadísticas, ya que creemos que estará presente más adelante cuando emprendamos cada quien en su camino personal en esta carrera, ya sea llevando las cuentas de un negocio propio o encuestando a la población acerca de lo que les gustaría ver en una obra teatral, ya que el teatro está hecho para el público. También reconocemos que inconscientemente las matemáticas se aplican en nuestra vida diaria, ya sea para sacar las cuentas de algún tipo de ahorro o los diversos descuentos que realizan para un determinado evento; en lo más simple se encuentran las matemáticas, pero no lo percibimos como debería ser y darle el valor que se merece. El mundo matemático es un campo ilimitado por conocer, y nosotros estamos agradecidos de haber aprendido al menos la base en este ámbito.* Elaborado por: Vera, Ale, Melgarejo y Sifuentes en el semestre 2017-Ito de dicha obra

	- Los resultados de la evaluación de este trabajo TSUM, para los alumnos es usada para aprobar el curso Matemática Básica en el que fue desarrollado El realizar bien su trabajo es decisión de ellos. - En este TSUM, la evaluación tiene además una ficha de coevaluación donde, entre pares ellos son los que valoran sus aportes y competencias puestas en ejecución. Se ha notado que cada uno aporta con el conocimiento y las habilidades que mejor tienen, es decir, atiende a las diferencias cognitivas de cada uno de los alumnos, en el sentido de que los que más conocen de matemáticas deben enseñar a los otros, pues en el momento de la exposición se realiza por sorteo del ponente.

Adaptado de Godino (2011): Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Tal como se comenta, la modelización matemática no es una tarea difícil, es por ello que el o los grupos de docentes, tienen que idear o pedir una situación donde los alumnos puedan trabajar con un fenómeno o situación de la vida diaria que les sean familiares, en este sentido, los estudiantes se encargan de buscar las situaciones en las cuales se debe permitir poner en juego su conocimiento matemático en un proceso de modelización. Colocar el escenario para actividades de modelización es un elemento crucial en la enseñanza de la modelización matemática. La descripción general del proceso de modelización (ver Fig.1), como los elementos de justificación pueden ser usados como herramientas para la planificación de actividades de enseñanza.

En relación a la descripción de los ejes en los gráficos, del mismo modo se justifica con el manejo del software, Cabe indicar que en el desarrollo del curso no hay espacios específicos para el uso de softwares matemático, por tanto, es importante resaltar el deseo de aplicarlo ya que, durante el desarrollo de la clase, solo se indica que existen algunos y que pueden utilizarlo. Lo que sí se hace es una demostración con algunos de ellos, aplicados a algunos problemas. Podemos decir entonces que, ellos, autónomamente desarrollan esa competencia, gracias a la necesidad de hacer una mejor presentación de su trabajo.

Algunos resultados desde las evidencias

A través del seguimiento de los avances del TSUM, su ejecución, observamos que realizar un análisis desde su solicitud hasta su ejecución y exposición; por los comentarios realizados, generalmente los alumnos encuentran más motivador y relevante trabajar con problemas reales.

Las situaciones cuasi-auténticas como es este trabajo, donde se plantean las situaciones desde las propias realidades de los alumnos; es decir, contextos construidos por los mismos estudiantes, también pueden dar soporte para la construcción de significados conceptuales personales, si son lo suficientemente ricos y son considerados seriamente como algo que les tocará realizar o resolver.

El conocimiento matemático, conceptual o procedimental, no es un prerrequisito tan fuerte para las actividades de modelización que realicen, pues como se ha visto, ellos pueden buscar o crear situaciones –problema. La experiencia demuestra que las actividades de modelización pueden motivar el proceso de aprendizaje, desarrollar procesos cognitivos sólidos para la construcción de conceptos matemáticos de parte del alumno como dominio para las actividades de modelización.

La modelización matemática evoluciona lentamente en los estudiantes y encuentran resistencia por las creencias que tienen desde su formación escolar básica. Esto reafirma y enfatiza la necesidad de una planificación educativa a lo largo de los diferentes niveles del sistema educativo que favorezca el proceso de modelación.

El conocimiento de los alumnos de los diferentes procesos involucrados en la modelización es importante para la estructuración de sus experiencias ya que ellos muchas veces no se dan cuenta que hacen este proceso grande en cada actividad que realizan.

Los progresos y obstáculos para el desarrollo de competencias en los alumnos en modelización pueden entenderse en referencia a la descripción de los procesos en modelización matemática. Su compresión ayudará a la planificación de una mejor enseñanza de la matemática en cualquier nivel educativo, mucho más en el nivel universitario.

Algunas conclusiones

La modelización permite la conexión de las experiencias de la vida diaria o futura de los alumnos; es decir, los escenarios extra-matemáticos y la matemática; situación que motiva el aprendizaje de esta en forma autónoma y tratar con problemas cercanos a su realidad.

La competencia de modelización matemática, genera desarrollo cognitivo que es base para la conceptualización de los contenidos en los estudiantes universitarios y ubica a la matemática en la cultura misma, como medio de describir y entender situaciones de la vida diaria, es decir se convierte en el lenguaje necesario, es decir como una actividad humana (Freudenthal, 1999).

Los modelos matemáticos de distinto tipo y complejidad tienen roles importantes en el funcionamiento de sociedades, basadas en la alta tecnología. Por lo tanto, el desarrollo de competencias expertas en utilizar e identificar modelos matemáticos y la forma en que son usados para la toma de decisiones se está convirtiendo en una necesidad para el mantenimiento y futuro desarrollo democrático. La modelización matemática es una competencia que cada uno de los futuros profesionales debe adquirir para optimizar sus decisiones.

Referencias

Blomhøj, M. & Højgaard Jensen, T. (2003). Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning. *Teaching mathematics and its applications* 22 (3), 123-139.

Cardoso, R., Rubio, N. & Luna, M. (2017a). Escenarios para promover Competencias Matemáticas en la Universidad., *Selecciones Matemáticas.* 04(02): 242-250 (2017). http://revistas.unitru.edu.pe/index.php/SSMM/article/view/1631

Cardoso, R, Rubio, N. & Luna, M. (2017b). Idoneidad Ecológica e Interaccional de un proceso de instrucción matemático para desarrollar competencias matemáticas en el nivel universitario. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Volumen 31, número 1). En prensa.

D´Amore, B. & Fandiño-Pinilla, M. I. (2017). Reflexiones teóricas sobre las bases del enfoque ontosemiótico de la Didáctica de la Matemática. En J. M. Contreras, P.

Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en: enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education: China lectures.* Dordrecht; Boston: Kluwer Academic Publishers.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 22, (2/3), 237–284.

Godino, J. (2011). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática* (CIAEM-IACME), Recife (Brasil). http://www.ugr.es/~jgodino/eos/jdgodino_indicadores_idoneidad.pdf

Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP. 2017). *Plan de estudios de Los Estudios Generales Letras*. http://facultad.pucp.edu.pe/generales-letras/informacion-para-estudiantes/plan-de-estudios/

Strauss, A y Cobin, J. (2002). Basics of qualitative research. Techniques and procedures for developing grounded theory. Primera edición (en español): Editorial Universidad de Antioquia.

Rubio, N. (2012). *Competencia del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemáticos*. Tesis doctoral. Universidad de Barcelona.

Volver al índice de autores

4.3.2. Enseñanza de la topología mediante material didáctico concreto

Leonardo Wilson Cano Llacua
Universidad Nacional del Centro del Perú, Perú

Resumen

La teoría de nudos es una rama joven de la topología, de gran interés científico debido a su carácter interdisciplinar. La presente propuesta didáctica se desarrolló en la asignación de topología II con estudiantes del IX semestre de la Carrera Profesional de Ciencias Matemáticas e Informática de la Facultad de Educación de la Universidad Nacional del Centro del Perú. El propósito es lograr la comprensión de conceptos sobre teoría de nudos por parte de los estudiantes. Los conceptos trabajados fueron: Concepto de nudo matemático, nudo trivial y no trivial, proyecciones de nudos, nudos equivalentes – movimientos de Reidemeister, composición de nudos, nudos primos y toroidales, coloreo de nudos e invarianza topológica. Para tal efecto se tuvo que emplear la estrategia de enseñanza – aprendizaje basada en el empleo materiales didácticos concretos referidos a teoría de nudos, donde los propios estudiantes construyeron diversos tipos de nudos matemáticos muy coloridos, analizando sus propiedades, y clasificación. Con esta metodología se logró un aprendizaje significativo en los estudiantes en el campo de la teoría de nudos, y por ende un mejor rendimiento académico en la asignatura de Topología

Introducción

La Topología, se constituye en una rama muy hermosa de la Matemática, motivo por el cual es considerado dentro del plan de estudios de la Carrera Profesional de Ciencias Matemáticas e Informática de la Facultad de Educación de la Universidad nacional del Centro del Perú. La asignatura a desarrollar mediante una propuesta didáctica con materiales didácticos concretos corresponde a la asignatura de Topología II, y el tema específico a desarrollar didácticamente es la Teoría de Nudos, donde se tratan conceptos como: Definición de nudo matemático, equivalencia de nudos, nudos primos y toroidales, Movimientos de Reidemeister e invariantes, etc. Estos conceptos serán abordados por los estudiantes mediante la construcción de materiales didácticos concretos, propiciando la construcción de conceptos matemáticos en los estudiantes, lo

cual se constituye en una poderosa metodología para la enseñanza de la matemática. Para dar inicio a las actividades se presentan problemas que el estudiante tiene que tratar de resolver utilizando sus estrategias y los materiales concretos. A continuación, se detalla la secuencia de las actividades pedagógicas.

Objetivos

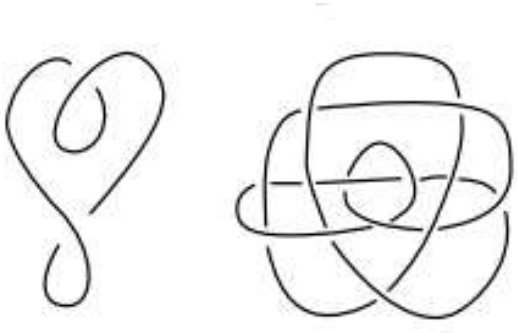
Optimizar el aprendizaje de conceptos y propiedades sobre la Teoría de nudos en los estudiantes mediante materiales didácticos concretos topológicos, propiciando el desarrollo de niveles de comprensión matemática dentro de su estructura cognitiva.

Desarrollo de actividades de enseñanza-aprendizaje

A continuación, se muestran alguna de las actividades trabajadas con los estudiantes de la Carrera Profesional de Ciencias Matemáticas– UNCP, mediante la creación y formulación de problemas que sirven para dar inicio a las diferentes actividades de aprendizaje.

PROBLEMA N°1

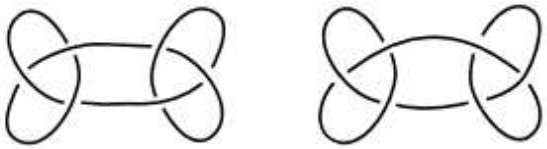
Se muestran proyecciones sobre el plano de ciertos nudos ¿ Cuáles correspenden a la proyección de un nudo trivial?



Para resolver este problema los estudiantes tuvieron que elaborar los nudos que se muestran en la imagen mediante el empleo de sogas o cuerdas delgadas y luego experimentar manualmente a fin de comprobar si corresponden a la proyección de un nudo trivial.

PROBLEMA N°2

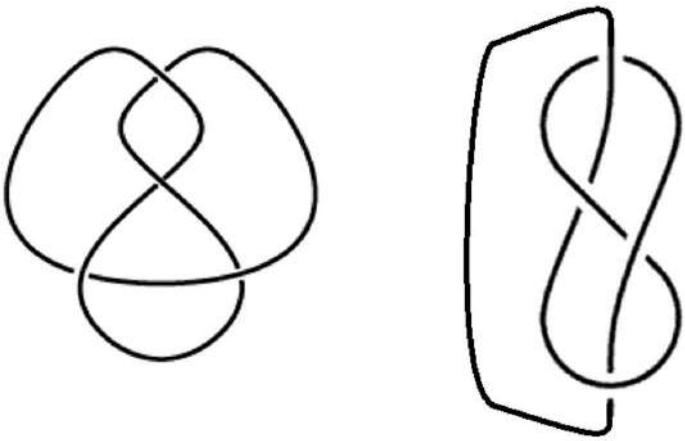
De los nudos mostrados ¿Cuáles son nudos primos?



De igual manera los estudiantes tuvieron que elaborar estos nudos y comprobar experimentalmente.

PROBLEMA N°3

Los nudos mostrados son equivalentes. Fundamente su respuesta



También para poder resolver este problema los estudiantes tuvieron que elaborar sus propios nudos y experimentar e ir construyendo sus aprendizajes. Bajo la guía del docente.

Con el empleo de materiales didácticos concretos los estudiantes pueden resolver esta clase de problemas con mucha facilidad e incluso problemas sobre composición de nudos y movimientos de Reidemeister e invariantes, en comparación a la

resolución tradicional en papel y pizarra en donde se necesita mucha capacidad de abstracción desarrollada por los estudiantes; pero sabemos que no todos los estudiantes tienen desarrollada una capacidad para abstraer objetos geométricos, lo cual causa problemas en su rendimiento académico. Po lo que se lanza esta propuesta didáctica a fin de solucionar el problema mencionado.

Conclusiones

El empleo de materiales didácticos concretos mejora significativamente el aprendizaje de concepto y propiedades sobre teoría de nudos-Topología, tal como lo muestran las experiencias didácticas.

Referencias

Przytycki, H. (2010). *Topología algebraica basada en nudos*. Disponible en: http://bibliotecadigital.univalle.edu.co:8080/bitstream/10893/250/1/Topologia%20algebraica%20basada%20en%20nudos.pdf

NOTA: En el congreso se mostrarán todos los nudos elaborados por los estudiantes (material concreto)

4.3.3. Estrategia didáctica en la enseñanza de la matemática estudiantes de ciencias empresariales

Williams Coronado Farroñan
Universidad César Vallejo –Filial Piura, Perú

Resumen

La siguiente experiencia realizada con los estudiantes del primer ciclo de la carrera de Administración de la Universidad César Vallejo Filial Piura del curso de Pensamiento Lógico2017-I, surge ante las insuficiencias que presentaban en el proceso de solución de problemas matemáticos que limitaban la pertinencia formativa. Las causas reveladas apuntaban a la necesidad de una generalización lógica del pensamiento matemático, por lo que se plantea como objetivo el establecimiento de una estrategia de formación matemática en la carrera profesional de Administración, sustentada en un modelo de la dinámica de

formación del pensamiento matemático en la carrera de Administración. El modelo tiene como propósito el proceso lógico en la resolución de problemas matemáticos contextualizados y se concreta con una estrategia, que tiene en cuenta la relación dialéctica entre la mate matización de situaciones en Administración y la aplicación secuencial de procedimientos matemáticos. La novedad científica está dada en revelar la lógica integradora entre la dimensión de generalización del pensamiento matemático en la carrera de Administración y la dimensión de profesionalización matemática. Los resultados fueron corroborados y validados parcialmente en la temática con criterios pertinentes

Introducción

Se realiza un diagnóstico fáctico en la escuela de Administración de la Universidad "César Vallejo filial Piura" en los estudiantes del primer ciclo, mediante la utilización de diferentes instrumentos y técnicas que permitió detectar las siguientes manifestaciones: - Inadecuada comprensión matemática de las situaciones problemáticas (resolución de problemas). - Insuficiencias en la modelación matemática al transformar un texto del lenguaje natural al lenguaje matemático, (Comunicación Matemática). - Dificultades en la selección de métodos de solución de un problema, así como en el desarrollo mismo, (Razonamiento y demostración). - Limitaciones en la valoración de los resultados de la solución de los problemas matemáticos. Lo que indica una insuficiente formación de la matemática en la solución de problemas de este futuro profesional en Administración. Estas manifestaciones se sintetizan en el problema científico: **Insuficiencias en el proceso de solución de problemas matemáticos en la escuela de Administración, lo que limita la pertinencia formativa del futuro profesional.**

La estrategia didáctica del proceso de formación matemática en las carreras de Administración es expresión de las relaciones fundamentales que se establecen en la modelación de la dinámica de formación del pensamiento matemático en la carrera de Administración, en su estructura se precisa un sistema de acciones que permite la transformación de este proceso, tomando como base las teorías, concepciones y métodos para el logro de los objetivos determinados en un tiempo parcial y concreto.

Entre sus fines, se cuenta el promover la formación matemática y desarrollo del pensamiento matemático en estudiantes de la carrera de Administración

Se precisan en ella, los aspectos esenciales que se disponen en etapas y acciones para la instrumentación de la dinámica del proceso de formación matemática en la carrera de Administración.

Su concepción es a partir de un sistema flexible, susceptible a ser modificado y rediseñado frecuentemente a partir de los propios cambios que se van operando en el proceso, todo lo cual confirma que esta estrategia es el resultado de un proceso de construcción teórico-práctico, lo que le confiere la cientificidad y la novedad didáctico-metodológica necesaria para su proceso de instrumentación en la praxis educativa y formativa.

La estrategia didáctica primeramente se reconoce, como un sistema abierto, ya que está sometida a influencias en su elaboración y aplicación, va estableciendo la relación de jerarquía; subordinación y de coordinación entre las etapas y acciones, expresados en el proceso de formación matemática. Posteriormente, por su carácter dinámico, está sujeta a cambios , dentro de los procesos que en ella se integran, la retroalimentación de sus acciones, el surgimiento de aspectos inesperados y su reajuste constante, de acuerdo a los cambios que se produzcan en la información dentro de ella, lo cual presupone el análisis crítico sistemático en su orden y estructuración para un proceso de transformación cualitativa constante por los sujetos socializadores implicados en su implementación como son los docentes.

La estrategia didáctica está sujeta en:

- Desarrollar con los docentes a cargo de la asignatura las sesiones de clase, dónde se establezcan la competencia, capacidades y habilidades lógicas de las acciones que tributen a una mejor comprensión del contenido, una matemática contextualizada que lo lleve a una identificación profesional de los diferentes métodos y soluciones matemáticas.

- Diagnosticar y desarrollar los contenidos matemáticos precedentes de manera que sean secuenciales o posibiliten una conexión con el nuevo contenido matemático.

- Preparación didáctico-metodológica del colectivo de docentes de la escuela profesional de Administración para su implementación.

- Una asertiva planificación y organización del proceso formativo, que no obstaculice la implementación.

- Como dificultad resistencia al cambio en la instrumentación de esta dinámica formativa por los docentes.

La estrategia puede pronosticar:

- Establecimiento de condiciones para su implementación relacionadas con la disponibilidad de los recursos humanos, planificación y organización del proceso formativo.

- Orientación didáctico-metodológica del colectivo de docentes de matemática para la

aplicación.

De esta dinámica modelada de la formación matemática emerge la sinergia, que posibilita revelar la relación entre su estructura y funciones, para estimular las transformaciones deseadas en la dinámica del proceso de formación matemática en las escuelas de Administración

El carácter problematizador de la estrategia didáctica debe ser significado, según las condiciones concretas del contexto formativo en que se va a aplicar o contextualizar la estrategia, desde la práctica interpretativa, comprensiva y sistematizada de este proceso, así como la flexibilidad y la cooperación entre los sujetos implicados (estudiante –docente).

Implementación

Como premisas para la implementación de la estrategia para la formación matemática en la escuela profesional de Administración se consideró necesario poseer:

1. Claustro de docentes motivado y concientizado con la necesidad que tiene el profesional de la rama de la Administración de sólidos conocimientos matemáticos.

2. Docentes con formación pedagógica, capaces de comprender la necesidad de la

sistematización, interdisciplinariedad, transdisciplinariedad, contextualización para la sistematización del pensamiento lógico matemático.

3. Una adecuada motivación en los estudiantes por la apropiación de los nuevos contenidos matemáticos, de manera que puedan matematizar secuencialmente situaciones administrativas

Los requisitos de la estrategia, son los siguientes:

1. Asegurar la preparación de los docentes, para que puedan poner en práctica la estrategia antes que se inicie el ciclo académico.

2. Realizar diagnóstico en el grupo de estudiantes para establecer punto de partida (evaluación diagnóstica).

La estrategia tiene un objetivo general de:

Orientar la dinámica del proceso de formación matemática desde la implementación de un sistema de acciones que posibiliten la sistematización del pensamiento matemático para una actuación práctica pertinente.

Se fundamenta la necesidad del establecimiento de la estrategia didáctica, a partir del diagnóstico de las insuficiencias en la solución de los problemas, en relación con la lógica del razonamiento matemático.

Para este diagnóstico se establecen indicadores evaluativos:

- Introducir en lo posible situaciones problemáticas, dónde se tenga en cuenta el perfil profesional del estudiante relacionado con la escuela profesional de administración.

- Precisión en la identificación de problemas del ámbito de la administración que se resuelven mediante soluciones lógicas matemáticos.

- Nivel de argumentación en el método de solución del problema dado en el contexto de la profesión.

- Correspondencia de la interpretación y comprensión de los resultados matemáticos con la aplicación profesional.

Para este diagnóstico se pueden utilizar las evaluaciones aplicadas a los estudiantes, observaciones a clases, entrevistas a profesores de Matemática y de las escuelas en general, entre otras técnicas que se considere pueden ofrecer información al respecto.

Las observaciones a clases, posibilitan además precisar cómo se desarrolla la formación matemática en las asignaturas de este perfil y otras de la profesión lo que facilita la orientación de las acciones.

Estas deben complementarse con la revisión de las indicaciones metodológicas que aparecen en los planes de estudio, así como entrevista a docentes de la carrera profesional.

La estrategia consta de dos etapas:

Etapa 1: De formación aprehensiva- reflexiva cultural el pensamiento matemático del estudiante en Administración

En esta etapa el objetivo es contextualizar los contenidos matemáticos paulatinamente desde la formación aprehensiva-reflexiva cultural del pensamiento matemático del futuro profesional para su familiarización. Las acciones son:

Plantear situaciones problemáticas que transformen los contenidos matemáticos a crear un interés en el desempeño profesional, desde la interacción.

- Explicar la importancia de los contenidos matemáticos que se aprenden para la profesión.

- Contextualizar los contenidos matemáticos mediante el planteamiento al estudiante de

problemas simplificados de la profesión de manera que la enseñanza- aprendizaje de esta disciplina se convierta en un acto cercano al contexto a la administración.

- Familiarizar el uso del lenguaje matemático, así como la explicación de los procedimientos en la solución de los ejercicios o problemas.

- Explicar la naturaleza esencialmente cuantitativa de conceptos básicos de la matemática

- Reconocer el problema a que se enfrenta, así como la herramienta matemática estratégica y adecuada para darle solución.

Etapa 2: De formación práctico transformadora del pensamiento matemático del estudiante en Administración. Esta etapa tiene como acciones:

Las actividades matemáticas deben ser organizadas de manera que propicien la comprensión del tema a desarrollar dando énfasis a los procesos cognitivos a través del dialogo, debates o intercambios de individuales o de grupo.

- Fundamentar las relaciones entre situaciones contextualizadas y las situaciones matemáticas

- Identificar si el problema representado requiere o no de la aplicación de herramientas

matemáticas para su interpretación y solución.

- Fundamentar la importancia del dominio del contenido matemático para la toma de decisiones.

- Establecer diferentes enfoques en la relación entre la actividad productiva empresarial del profesional y la realidad contextual.

- Analizar cuantitativa y cualitativamente los procesos matemáticos con las mejores

herramientas.

Sistema de evaluación de efectividad de las acciones realizadas y la transformación de los estudiantes. La puesta en práctica de la estrategia didáctica para el proceso de formación matemática requiere de la implementación de un sistema de evaluación permanente que permita la retroalimentación. Se evalúa el grado de cumplimiento de los objetivos y acciones que se conciben dentro del proceso a través de instrumentos de evaluación como rubricas de capacidades, se valoran las propuestas de cambios que hay que operar, así como la realización de las correcciones y reorientaciones, necesarias. Además, este sistema debe permitir conocer las transformaciones que se van operando en los estudiantes.

Valoración y corroboración de los resultados

Se presenta la valoración de la pertinencia del aporte práctico, a través del taller de socialización y la ejemplificación de la estrategia de formación matemática en escuela de Administración, de la Universidad César Vallejo Filial Piura.

Valoración de los resultados del taller de socialización.

Se parte del enfoque hermenéutico-dialéctico de Matos E. y Cruz, L. (2012). Este método permite penetrar en la esencia de los procesos y fenómenos de la naturaleza, la sociedad y el pensamiento al ofrecer un enfoque e instrumento metodológico para su interpretación, desde niveles de comprensión y explicación que amplíe la interpretación del objetivo.

La valoración de los aportes teórico y práctico se realiza con especialistas de la escuela de Administración de la Universidad Cesar Vallejo, se expresa una representación

participativa de los profesores especialistas con el investigador, permitiendo un intercambio continuo e enriquecedor con los profesionales seleccionados, desde un enfoque didáctico interactivo, que corrobora los criterios y observaciones, en aras de significar en una lógica dialéctica, tanto del constructo teórico epistémico como práctico.

Para el desarrollo del taller se empleó una metodología que se sustenta en la valoración cualitativa del aporte teórico y práctico, sobre la interpretación que hacen los participantes en los mismos, aportando sus puntos de vistas y referentes culturales, a partir de la presentación que realiza la investigadora de sus propuestas, sustentada además en concepciones actuales de la Educación Superior. Lo anterior constituye un proceso de reflexión y de comprensión que transita hacia una totalidad de acciones con una intencionalidad formativa matemática, emerge, entonces, esa totalidad que es la intencionalidad que va paulatinamente en el proceso de formación matemática desde la sistematización del pensamiento, concretándose en categorías que emergen a través de la relación entre la compresión, la explicación y la interpretación del estudiante.

Taller de socialización.

Objetivos: Valorar la pertinencia de la estrategia de formación matemática, a fin de que sean analizadas y discutidas por los especialistas las coincidencias y discrepancias con la propuesta de la estrategia.

Como parte del intercambio es importante valorar las sugerencias y recomendaciones aportadas por los especialistas, de modo que puedan enriquecer la estrategia

Participaron 4 profesionales de la escuela de Administración, 1 doctor; 3 Máster;

El taller se dirigió esencialmente a la valoración del aporte teórico y práctico de la investigación.

* Un primer paso por el que transitó el taller:

* Elaboración y entrega a los especialistas seleccionados de un informe de investigación para su proceso valorativo, previo al taller.

* Realización del taller con los especialistas, a partir de los siguientes momentos: exposición, acerca del proceso de gestión contextualizada de la calidad de la formación del

profesional universitario de administración y su dinámica formativa; fundamentación de las configuraciones, relaciones dialécticas establecidas y dimensiones, como expresión de la lógica o sucesión de movimientos seguidos para la transformación del estudiante, que responde a las regularidades internas de los procesos que se establecen en la investigación y presentación de la estrategia de formación matemática en escuelas de administración.

Los criterios expuestos por los profesores participantes fueron recogidos para su valoración por el investigador, se realizó una exposición de las ideas emitidas sobre la argumentación de la estrategia didáctica.

* Segundo paso del taller:

- Debate científico, realizado entre los participantes con el investigador donde se realizaron preguntas y respuestas por parte de los profesores especialistas, esclareciendo los aspectos imprecisos que originaron preocupaciones para su implementación, respecto a la ejecución de las acciones establecidas en la estrategia de formación matemática en la escuela de administración.

- Se realizó posteriormente un debate y discusión enriquecedora del aporte práctico, donde se fueron registrando las ideas fundamentales en función de mejorar la estrategia.

En general se recogieron las siguientes opiniones:

-El valor y pertinencia de la propuesta, que recoge que la investigación es pertinente y novedoso, actual para su aplicación en la escuela de administración , al revelar que el proceso de formación matemática de este profesional universitario , se desarrolla como un proceso integrador interdisciplinario con a las asignaturas de la matemática que complementan el currículo base del plan de estudios, para lo cual realiza una generalización del pensamiento matemático del futuro administrador desde la sistematización profesionalizada.

- El impacto de los resultados, radican en revelar la lógica integradora entre la dimensión de generalización del pensamiento matemático y la dimensión de sistematización matemática de donde emerge la estrategia de formación matemática en el futuro profesional.

- La estrategia de formación matemática posibilita atenuar las insuficiencias en el proceso de solución de problemas matemáticos que presentan los estudiantes que ingresan a la Universidad César Vallejo, teniendo en cuenta la relación dialéctica entre la lógica de formación de habilidades matemáticas y habilidades lógicas.

-Las ideas expuestas como resultado del análisis realizado, brindan la posibilidad de acceder a una propuesta adecuada según la problemática que se investiga. Se reconocen las condiciones existentes para la aplicación práctica de la escuela, así mismo la preparación de los profesores universitarios para potenciar esta formación; se aprecia una lógica investigativa coherente que se expresa en el nivel de correspondencia entre las categorías del diseño de la investigación y en la lógica interna del modelo argumentado.

Las sugerencias brindadas, enfatizan en continuar profundizando en este proceso de formación de la matemática básica para el administrador a través de las relaciones que sustentan sus procesos

formativos; revisar las dimensiones del modelo en función de significar la esencia de cada una de los procesos de profesionalización de la matemática, profundizando en las acciones propuestas en la estrategia, de manera que garanticen la aplicación en el contexto formativo de este profesional y en otras escuelas de decidir su generalización a otras profesiones que den la matemática básica.

El intercambio con los especialistas de la escuela posibilitó una mejora considerable en los aportes a la estrategia al valorarse aspectos específicos del pensamiento matemático administrativo, así como se hacen sugerencias a como paulatinamente se debe ir instrumentando las acciones de la estrategia.

Conclusiones

-El debate en el taller permitió a los participantes de esta escuela de administración, respecto a la pertinencia de la estrategia, como proceso que necesita de la retroalimentación interdisciplinar para perfeccionar la formación matemática, se obtienen nuevos conocimientos del investigador y se perfeccionaron los resultados para su posterior aplicación parcial a través de la problematización en la solución de situaciones practica aplicadas a la administración.

-El análisis de los criterios recogidos reveló nuevas contradicciones, dinamizadoras del desarrollo formativo matemático para este profesional y posibilitó precisar aspectos que necesitaban ser mejor argumentados y mejorados para su aplicación contextualizada en las escuelas de administración de forma generalizada.

-Los resultados del debate permitió al investigador realizar valoraciones de los resultados investigativos para su mejor instrumentación en la solución de problemas administrativos en los que es necesario que el estudiante tenga un pensamiento matemático general y contextualizado.

Ejemplificación de la aplicación del aporte práctico.

El aporte práctico se ejemplifica en los estudiantes del primer ciclo de la escuela de administración de la Universidad César Vallejo filial Piura

Para ello se toman acciones diseñadas en la estrategia didáctica, en ambas etapas:

* De formación aprehensiva- reflexiva cultural el pensamiento matemático de administración.

Las acciones previstas son:

-Plantear situaciones problémicas que transformen los contenidos matemáticos a impartir en una necesidad para el desempeño profesional, desde la interacción.

- Explicar la importancia de los contenidos matemáticos que se aprenden para la profesión.

* De formación práctico transformadora del pensamiento matemático del administrador

Las acciones previstas para esta etapa son:

* Modelar problemas matemáticos aplicando los contenidos apropiados en la carrera de administración.

* Identificar si el problema representado requiere o no de la aplicación de métodos matemáticos para su interpretación y solución.

Corroboración estadística de las transformaciones logradas

A través de las acciones de la estrategia se ha evaluado la transformación del estudiante para lo cual se tuvo en cuenta corroboración estadística para la valoración de los cambios que se producen en los estudiantes identificándose indicadores que se precisan en:

-Identificación de problemas del ámbito empresarial que se resuelven mediante métodos matemáticos.

-Argumentación en el método de solución del problema dado en el contexto de la profesión en dependencia del nivel o ciclo.

-Sistematizar con los estudiantes al culminar el ciclo mediante problemas vinculados a la administración, su solución matemática a través de mapas mentales, conceptuales, gráficos de sistema.

-Orientar tareas a los estudiantes como trabajos extra clases.

-Interpretación de los resultados matemáticos en correspondencia con la aplicación profesional de la administración.

Los resultados del post test indican que los estudiantes en relación al pre test, mejoraron en sus competencias matemáticas, evidencian una mejor comunicación matemática, utilizando adecuadamente las herramientas matemáticas, y en su razonamiento y demostración un 65% de los estudiantes contestaron las preguntas correctamente con criterio lógico, ello permitirá una mejor comprensión en sus asignaturas de matemática en ciclos posteriores y un punto inicial favorable en su formación profesional administrativo.

Referencias

Addine, F. (1997). *Didáctica y Curriculum*. Potosí, Bolivia: Editorial AB.

Almeida, B. y Borges, J.T. (1999). El trabajo con la tarea para el estudio individual en la clase de Matemática. *Horizontes Educacionales*. (4), p. 56.

Almeida, B. y Borges, J. (2000). *Didáctica de la Resolución de Problemas.* La Habana: Editorial Academia.

Alonso, I. (2001). *La resolución de problemas matemáticos. Una alternativa didáctica centrada en la representación*. (Tesis doctoral). Universidad de Oriente, Cuba.

Alonso, I. y González, H. (2003). *¿Cómo tener éxito al resolver problemas matemáticos?* Potosí: Visión Creativa equipo consultor S.R.L.

Álvarez, C. (1989). *Fundamentos Teóricos de la Dirección del Proceso Docente Educativo en la Educación Superior Cubana*. La Habana, Cuba: Ed. ENPES.

Álvarez, C (2002). *Aprender y enseñar en la escuela. Una concepción desarrolladora.* La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Álvarez, R. (1997). *Hacia un Currículum Global y Contextualizado*. La Habana, Cuba: Ed. Academia.

Álvarez, C. (1997). *La Universidad: Sus procesos y sus leyes*. La Habana: Curso 20, Pedagogía 97.

Álvarez, C. (1990). *Elementos de didáctica de la Educación Superior*. Ciudad de la Habana: Ministerio de Educación Superior.

Dieguez, R. (2001). *Un modelo del proceso de solución de problemas matemáticos contextualizados en la matemática básica para la carrera de agronomía.* (Tesis doctoral). Santiago de Cuba.

Estrada, R.; Reyes, I. y Pantoja, F. (2002). Tendencias en la Educación Superior en América Latina. *Pedagogía Universitaria*. Recuperado de http://www.bibliociencias.cu/gsdl/collect/tesis/index/assoc/HASH0180/51aa39cb.dir/doc.pdf [Consulta: 4 octubre 2006]. ISSN: 1609-4808.

Fuentes, H. y Álvarez, I. (1998). *Dinámica del Proceso Docente Educativo de la Educación Superior*. Santiago de Cuba: Centro de Estudios de Educación Superior "Manuel F. Gran", Universidad De Oriente.

Fuentes, H. (2002). *Una compilación de la Didáctica de la Educación Superior.*

Galbán, S. (2000). *Los Retos de la Educación Superior ante un Mundo Tecnologizado. Educación Universitaria*. Recuperado de http://www.umcc.cu/eu/Educacion%20Universitaria%202000/Los%20retos%20de%20la%20educaci%C3%B3n%20superior%20ante%20el%20mundo%20tecnologizado.pdf

Valiente, I. (1999). *El proceso y sus movimientos: Modelo de la Dinámica del Proceso Docente Educativo en la Educación Superior/ Ilsa Álvarez Valiente.* (Tesis doctoral). Universidad de Oriente, Santiago de Cuba.

Vigotsky, L. (1987). *Historia del desarrollo de las funciones psíquicas superiores*. La Habana, Cuba: Editorial Científico Técnica.

Villegas, M. (2003). *La Construcción del conocimiento por parte de estudiantes de Educación Superior: un caso con alumnos del Instituto Pedagógico de Maracay*. (Tesis doctoral). Universidad de Carabobo. Valencia.

Volver al índice de autores

Anexo 1

Ejemplificación de la aplicación de la estrategia propuesta en la asignatura Pensamiento lógica del primer ciclo de la escuela de Administración en la Universidad César Vallejo Filial Piura (Etapa 1)

Ejercicio 1:

(Ingreso) El ingreso mensual total de una guardería por concepto de cuidado de x niños esta dado por $r = 450x$, y sus costos mensuales totales son $c = 380x + 3500$. ¿Cuántos niños necesitan inscribirse mensualmente para alcanzar el punto de equilibrio? ¿cuándo los ingresos igualan a los costos?

A) 20 **B)** 10 **C)** NA

Ejercicio 2:

(Impuesto sobre ventas) un agente de ventas necesita calcular el coste de un artículo que tiene un impuesto de venta de 8.25%. escriba una ecuación que represente el costo total C de un artículo que cuesta x cantidad de dinero.

A) $\mathbf{c = x + 0.0825x = 1.0825x = 1.0825x}$

B) $\mathbf{c = x + 0.0756x = 1.0756x = 1.0756x}$

C) $\mathbf{c = x + 0.0520x = 1.0520x = 1.0520x}$

D) $\mathbf{c = x + 0.0450x = 1.0450x = 1.0450x}$

Ejercicio 4:

(Ahorró) Juan quiere comprar una casa, de manera que ha decidido ahorrar la cuarta parte de su salario. juan gana $47 por hora y recibe un ingreso extra de 28 a ala semana por desinclinar las prestaciones de la compañía. Él quiere ahorrar al menos $550 cada semana. ¿Cuántas horas debe trabajar para lograr su meta?

A) 46.2h **B)**50.5h **C)** 46.3h

Ejercicio 5:

(Horas de servicio) Suponga que el número de horas que una tienda de video está abierta al número de clientes diarios es constante. Cuando la tienda está abierta 8 horas, el número de clientes es de 92 menos que el número máximo de clientes. Cuando la tienda está abierta

10 horas se pasan el número de clientes es de 46 menos que dicho número máximo. Desarrolla una ecuación que describa esta situación y determina el número máximo de clientes diarios.

A) 20 **B)** 30 **C)** 40

Ejercicio 6:

(Tiempo de viaje) el tiempo que le toma a un bote viajar una distancia dada rio arriba (en contra de la corriente) puede calcularse dividiendo la distancia entre la diferencia de la velocidad del bote y la velocidad de la corriente. Escriba una ecuación para calcular el tiempo t que le toma a un bote, que se mueve a una velocidad r en contra de una corriente c , de correr una distancia d. Resuelva su ecuación para c.

A) $\mathbf{t = \frac{d}{r-c}; c = r - \frac{d}{t}}$

B) $\mathbf{t = \frac{d}{c-r}; c = d - \frac{dt}{t}}$

C) $\mathbf{t = \frac{d}{c-r}; c = r - \frac{d}{t}}$

Ejercicio 7:

(Utilidades de fabricantes) A un fabricante le cuesta $ 2000 comprar las herramientas para la manufactura de cierto artículo casero. Si el costo para material y mano de obra es de 60 e, por artículo producido, y si el fabricante puede vender cada artículo en 90 e, ¿encuentra cuantos artículos debe producir y vender para obtener una ganancia de $1000?

A) 100 **B)** 200 **C)** 150

Ejercicio 8:

(Ganancia en periódico) El costo de publicar cada copia de una revista semanal es de 28 e, En ingreso de las ventas al distribuir es de 24e, por copia y de los anuncios es de 20% del ingreso obtenido de las ventas en exceso de 3000 copias. ¿Cuántas copias deben publicarse y venderse cada semana para generar una utilidad semana de $1000?

A) 1000 **B)** 2000 **C)** 1500

Ejercicio 9:

(Venta de un automóvil) Un vendedor de autos usados compro dos automóviles por $2900. Vendió uno con una ganancia de 10% y otro con una pérdida de 5%, y aún obtuvo una ganancia de $185 con la transacción completa. Encuentra el costo de cada automóvil.

A) 1500 **B)** 1425 **C)** 500

Ejercicio 10:

(Salario) Un empresario está estableciendo un pequeño negocio sus costos fijos son $ 720 semanales, y planea emplear 48 horas de mano de obra semanales. El deseó asegurar que su ganancia sea igual al costo de la mano de obra y que su producto se venda a solo 40% sobre el costo total. ¿Qué salario por hora debe venderlos?

A) 80 **B)** 45 **C)** NA

Modelo Propuesto

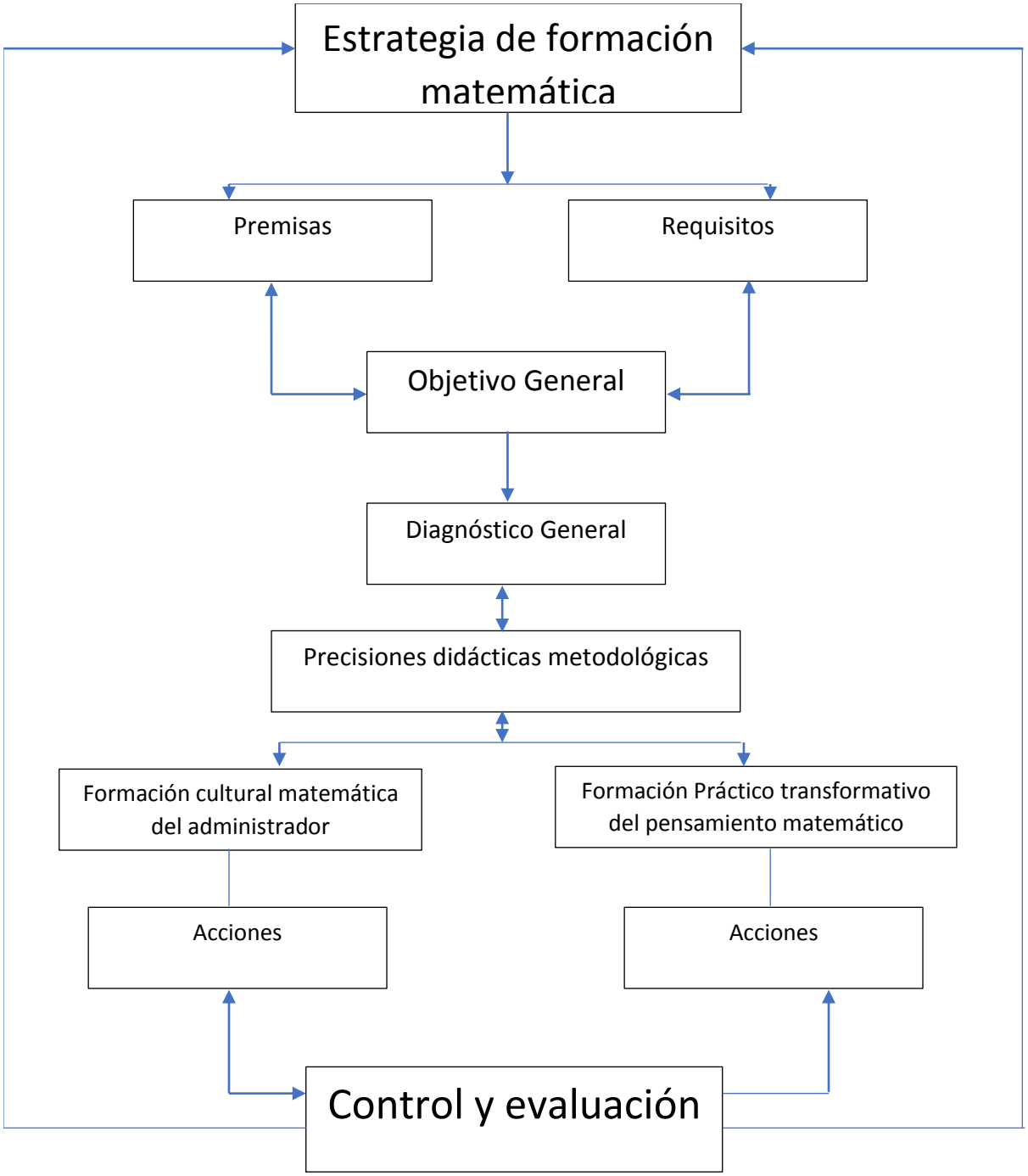


Figura 01.- ***M****odelo de la dinámica de formación del pensamiento matemático en la carrera de Administración*

Fuente: elaboración propia.

ANEXO 2

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

Apellidos y Nombres: _____

PUNTAJE

Escuela Profesional: ……Sección: _____ I Ciclo Fecha: …..… de Abril del 2017

DOCENTE EVALUADOR:…….

Instrucciones: Estimado estudiante, a continuación, tienes 20 preguntas, las cuales debes resolver en forma clara, correcta y precisa, debes leer detenidamente. Se calificará procedimiento y limpieza. El puntaje es vigesimal (en base veinte) En lo posible trata de resolver al reverso de la hoja.

COMUNICACIÓN MATEMÁTICA

1. Al simbolizar la proposición molecular:

Si no apruebas o no resuelves este problema, entonces es falso que, hayas estudiado o domines la deducción lógica. Pero no dominas la deducción lógica aunque has estudiado.

A) $[(\sim p \vee \sim q) \rightarrow (\sim r \vee s)] \wedge \sim s \wedge r$

B) $[(\sim p \vee \sim q) \rightarrow (\sim r \vee s)] \vee \sim s \wedge r$

C) $[\sim(p \vee q) \rightarrow \sim(r \vee s)] \wedge \sim s \wedge r$

D) $[(\sim p \vee \sim q) \rightarrow \sim(r \vee s)] \wedge \sim s \wedge r$

E) $[(\sim p \vee \sim q) \rightarrow \sim(r \vee s)] \wedge s \wedge r$

0,5 puntos

2) Si la proposición: [(~p ∨q) ⇒ (q ⇔r)] ∨ (q ∧ S) es falsa, siendo p una proposición verdadera, determine los valores de verdad de q, r, s en ese orden.

A) VVV B) VFV D) FFV

D) FFV E) FFF

1 puntos

3) Si: $\frac{a}{4} = \frac{6}{b} = \frac{c}{9}$ Además: b = $\sqrt{a \cdot c}$;

Hallar : $\frac{a+c}{a \cdot c}$

0,5 puntos

a) 6/9 b) 15/4 c) 13/36 d) 13/360
e) 17/30

4) Maribel Campos al matricularse en el Ciclo Ordinario del CEPRE, por ser hija de un docente universitario y haber estado en el anterior ciclo ordinario se le hace 2 descuentos sucesivos del 30% y 50%, ¿Cuál es el descuento único realizado?

a) 80% b) 35%
c) 65% d) 60% e) 25%

1 punto

5) Dada la relación $R: A \to B$, tal que: $R = \{(a\ ;\ b) \in A \times B / a + b = 7\}$ .Donde: $A = \{1;3;5\}$ y $B = \{1;2;4;6\}$. Determinar R^{-1}

a) {(1,6),(3,4),(5,2)}

b) {(1,6),(4,3),(5,2)}

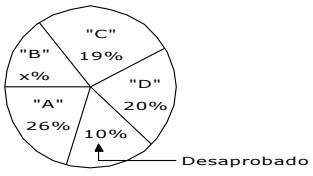
c) {(6,1),(3,4),(4,3),(2,5)}

d) {(6,1),(4,3),(2,5)}

1 puntos

3 puntos

6) Distribución de notas para un examen de Competencia Lógico Matemática. Si 270 estudiantes aprobaron el examen. ¿Cuántos alumnos recibieron la nota "B" en su examen?



a) 85 b) 75 c) 45
d) 55 e) 28

La cantidad de agua que arroja un caño por minuto y el tiempo empleado en llenar un balde	Inversa	

1 puntos 2 puntos

8) Determina el valor de verdad de $(r \rightarrow q)$.
Si el siguiente esquema es falso:

$$(p \wedge \sim q) \rightarrow (\sim q \rightarrow r)$$

0,5 puntos

RAZONAMIENTO Y DEMOSTRACIÓN

7) Coloca en el recuadro de la derecha de cada una de las siguientes afirmaciones (V) si son verdaderas o una (F) si son falsas:

El número de manzanas que "entran" en un kilo y el tamaño de estas	Directa	
El número de invitados en un Bautismo y la cantidad de comida	Inversa	
El GAS que consume un automóvil y la distancia recorrida	Directa	

9) Si tenemos un conjunto de 4 hermanos (todos varones) se considera la relación "ser hermano de…… ".

Que propiedad de relación se está cumpliendo:

a) Propiedad Reflexiva y Simétrica

b) Propiedad Simétrica y Transitiva

c) Propiedad Reflexiva y Transitiva

d) Propiedad Antisimétrica y Transitiva

0,5 puntos

2 puntos

10) Halla el conjunto solución, de la siguiente ecuación: $x^2 - 5x + 4 = 0$

a) {1; 5} b) {4; 5} c) {1; 4}
d) {-1; 4}

1 puntos

11) Si los pares ordenados (2x - 7, 12) ; y (5, y + 2) son iguales. Determinar: x – y:

a) 4 b) 13 c) -4
d) – 12

1 puntos

12) Indicar verdadero (V) o falso (F), según corresponda; respecto a una relación "R" definida de A x B.

I. n(A x B) = n(A) x n(B) ( )

II. n(Rango) = n(Dominio) ( )

III. Dom(R) = A ( )

V. Ran(R) = A ( )

a) VVFV b) VFVV c) VFVF
d) FVFV

13) El producto de las raíces de la ecuación : $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-2} = 5$ es :

a) b) 24
c) -36

d) No tiene raíces e) x=6 es su única raíz

1 punto

14) Determina el dominio de la siguiente función: $\sqrt{x-1}$

a)]-1;+∞[b)]1;+∞[c) [1;+∞[
d) [-1;+∞[

1 punto

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

15) Por cada 100 huevos que compro se me rompen 10 y por cada 100 que vendo doy 10 de regalo. Si vendí 1800 huevos. ¿Cuántos huevos compre?

a) 2200 b) 2000 c) 2100 d) 1900

e) 2400 1 punto

16) El producto de dos números es 250 y están en relación de 5 es a 2. Hallar el doble del mayor.

a) 10 b) 30 c) 50 d) 70 e) 40 1 punto

17) La edad de Aldo es la tercera parte de la edad de Sergio pero hace doce años la edad de Sergio era nueve veces la edad de Aldo. ¿Qué edad tendrá Aldo dentro de 8 años?

a) 23 b) 42 c) 18 d) 24

18) Un número natural es tal que la sexta parte del número anterior es menor que 6; además la sexta parte del número natural siguiente es más que 6. ¿Cuál será la raíz cuadrada del número natural, disminuido en 1?

a) 6 b) 5 c) 4 d) 12 1 punto

19) Se sabe que un USB y una memoria micro SD cuestan S/. 50 entre los dos. Sabiendo que 6 memorias micro SD cuestan tanto como 4 USB. ¿Cuánto cuesta 8 USB?

a) 200 b) 230 c) 240 d) 160 e) 100 1punto

20) La doctora Fuentes de una clínica especializada, le pregunta al otorrinolaringólogo Carrión, por el número de pacientes que atendió, éste respondió: Atendí 2 más que la raíz cuadrada, del triple de los que atendí disminuido en 2, ¿Cuántos pacientes atendió?

1 puntos

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e)8 1 puntos

4.3.4. Propuesta de diseño sociocultural en el aprendizaje de cálculo en estudiantes de ingeniería civil de las universidades de Huancayo

Nobel Remberto Leyva Gonzales
Universidad Nacional del Centro del Perú, Perú

Resumen

El trabajo implemento un Diseño Sociocultural para ser administrado a los alumnos de ingeniería Civil de las Universidades de Huancayo, con el propósito de determinar los efectos en su aprendizaje de los temas de cálculo evaluando sus competencias en las dimensiones: conceptual, procedimental y actitudinal. Se planteó: ¿Qué efectos produce un Diseño Sociocultural del Aprendizaje de cálculo en estudiantes de Ingeniería Civil de las Universidades de Huancayo? Ha sido una investigación descriptiva, porque se trabajó sobre realidades y su característica fundamental dar la valoración adecuada a la utilización de los datos históricos y curiosidades en el proceso de enseñanza - aprendizaje. Para esto elaboramos un módulo sustentado en la teoría socicultural de Vigotsky. El diseño fue cuasi experimental y se aplicó a una muestra de alumnos de ingeniería Civil de las Universidades de Huancayo

PLANTEAMIENTO DEL ESTUDIO

Kasturiarachi, piensa que la enseñanza de las matemáticas ocupa un lugar estratégico en los sistemas educativos. Se cree que el nivel de preparación científica y tecnológica puede aumentarse si el conocimiento matemático se enseña apropiadamente. Aunque no podemos predecir el tipo de matemáticas que se usará en el futuro, podemos estar bastantes seguros que su utilidad continuará aumentando y que su aplicación se extenderá a muchos campos. Wenzelburger, sugiere la pregunta "cómo se perfecciona instrucción de matemáticas" y que aun todavía permanece sin contestar. Por lo indicado, el propósito de esta investigación busca consolidar la teoría de Vygotsky, quien sostiene que la socialización y la interacción del hombre- sociedad y cultura son fundamentales para la internalización de aprendizajes de objetos matemáticos.

FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Parece razonable que el logro en matemáticas es influenciado por el nivel de la competencia matemática al entrar en el curso. Sin embargo, todavía no está totalmente claro si el logro influye en actitud o la actitud influye en logro.

Para estudiar los procesos por los cuales los compañeros influyen en el aprendizaje y en el desarrollo se planteó el siguiente problema:

¿Qué efectos produce el Diseño Sociocultural del Aprendizaje de cálculo en los estudiantes de Ingeniería Civil de las Universidades de Huancayo?

Objetivos de la investigación

Objetivo general:

Determinar los efectos que produce el diseño sociocultural del aprendizaje de cálculo en estudiantes de la carrera profesional de Ingeniería Civil de las Universidades de Huancayo.

Objetivos específicos:

- Determinar los efectos que produce el Diseño Sociocultural en el Aprendizaje de cálculo en su dimensión conceptual.
- Determinar los efectos que produce el Diseño Sociocultural en el Aprendizaje de cálculo en su dimensión procedimental.
- Determinar los efectos que produce el Diseño Sociocultural en el Aprendizaje de cálculo en su dimensión actitudinal.

BASES TEÓRICAS DE LA INVESTIGACIÓN

La Epistemología del diseño socio cultural

La teoría sociocultural en una de las contribuciones esenciales de Vygotski ha sido la de concebir al sujeto como un ser eminentemente social, y al conocimiento mismo como un producto social. Quizá uno de los más importantes es el que mantiene que todos los procesos psicológicos superiores (comunicación, lenguaje, razonamiento, etc.) se adquieren primero en un contexto social y luego se interiorizan.

El origen de los procesos psicológicos superiores

La formulación central de la teoría Socio-Histórica hace referencia, a que los procesos psicológicos superiores (PPS), se originan en la vida social es decir en la participación del sujeto en actividades compartidas con otros. Tal afirmación implica una concepción particular a cerca de los orígenes mismos del psiquismo y, desde ya, porta criterios específicos acerca de cómo han de comprenderse los procesos de desarrollo

La epistemología del cálculo:

Las propias razones por la que se enseña la Matemática, contienen cierta discrepancia, entre matemáticos, profesores de Matemática y pedagogos en general, entre dichas razones podemos citar las siguientes:

- Su facultad para desarrollar capacidades de razonamiento.
- Su utilidad, tanto para la vida cotidiana como para el aprendizaje de otras disciplinas necesarias para el desarrollo personal y profesional.
- La Matemática posee el asombroso poder de explicar cómo funcionan las cosas, por qué son como son.
- Son necesarias para desarrollar habilidades laborales y dar respuesta a cuestiones científicas y tecnológicas.
- La potencia de la Matemática como medio de comunicación.

La matemática y la estructura

Piaget (1991, pág. 34), en sus seis estudios de psicología al desarrollar el subtema *La génesis del pensamiento*, afirma: "Pero ocurre con el pensamiento lo que con toda la conducta en general: en lugar de adaptarse inmediatamente a las realidades nuevas que descubre y que construye poco a poco, el sujeto tiene que comenzar con una incorporación laboriosa de los datos a su yo y a su actividad, y esta asimilación egocéntrica caracteriza los juicios del pensamiento del niño, así como los de su socialización.

El desarrollo desde la postura vigotskiana

Según Vygotsky (1995, pág. 74), en *Pensamiento y leguaje*, "La tercera escuela del pensamiento, representada por la teoría gestaltista, trata de reconciliar las dos teorías precedentes evitando sus peligros latentes". A pesar de que la consecuencia de este eclecticismo es un enfoque un tanto inconsistente, se logra una especie de síntesis entre esas dos opiniones contradictorias". Vygotsky sigue mencionando que: "Koffka establece que todo desarrollo tiene dos aspectos, maduración y aprendizaje. Aunque esto significa aceptar de un modo menos extremo ambos puntos de vista anteriores, la nueva teoría representa, en tres sentidos, un adelanto sobre las otras dos.

El diseño instruccional

El Diseño Instruccional (DI) es un proceso fundamentado en teorías de disciplinas académicas, especialmente en las disciplinas relativas al aprendizaje humano, que tiene el efecto de maximizar la comprensión, uso y aplicación de la información, a través de estructuras sistemáticas, metodológicas y pedagógicas.

POBLACIÓN Y MUESTRA

Población:

La población de estudio estuvo integrada por los estudiantes de las Carrera Profesional de Ingeniería Civil de las Universidades de Huancayo, como son UC un aproximado de 71 alumnos, y de la UNCP un aproximado de 129 alumnos. Esta población tiene una estimación de 800 estudiantes.

Muestra:

Los criterios de selección de los participantes fueron por conglomerados o racimos, el tipo de muestreo implementado fue no probabilístico ya que los alumnos estaban designados de acuerdo a las asignaturas que corresponde a su semestre de estudio.

El muestreo ha sido no probabilístico, siendo:

En total se tomarán 200 estudiantes de ambas universidades.

UNIVERSIDADES		VARONES	MUJERES	TOTAL
UNCP	CALCULO I	31	05	
	CALCULO II	30	07	129
	CALCULO III	23	04	
	CALCULO IV	23	06	
UC	BI1103	26	09	71
	BI1104	26	10	
TOTAL		159	41	200

DISEÑO DE INVESTIGACIÓN

El diseño de la investigación fue cuasi experimental, no se manipuló intencionalmente las variables propuestas. El estudio fue realizado después que han ocurrido las variaciones en la variable independiente en el curso natural de los acontecimientos. La recolección de datos fue realizada en momentos diferentes, considerando que las Universidades en que se forman Ingenieros Civiles, están en lugares distantes. No se dio interés al sexo de los estudiantes. Realizamos las comparaciones de los grupos antes y después de aplicado el módulo de aprendizaje.

El diseño fue cuasi experimental, siguiendo el siguiente esquema:

$$M_1 : O_1 \quad X \quad O_2$$
$$M_2 : O_1 \quad X \quad O_2$$
$$M_3 : O_1 \quad X \quad O_2$$
$$M_4 : O_1 \quad X \quad O_2$$
$$M_5 : O_1 \quad X \quad O_2$$
$$M_6 : O_1 \quad X \quad O_2$$

donde O_1, representa la observación o medición que se hizo al administrarse una evaluación de diagnóstico y O_2 representa la observación o medición que se hizo después de ser aplicado el modulo, correspondiendo a una evaluación de final. Para las muestras representativas se tuvo en consideración:.

M_1 : Análisis Matemático II

M_2 : Análisis Matemático II

M_3 : Cálculo I

M_4 : Cálculo II

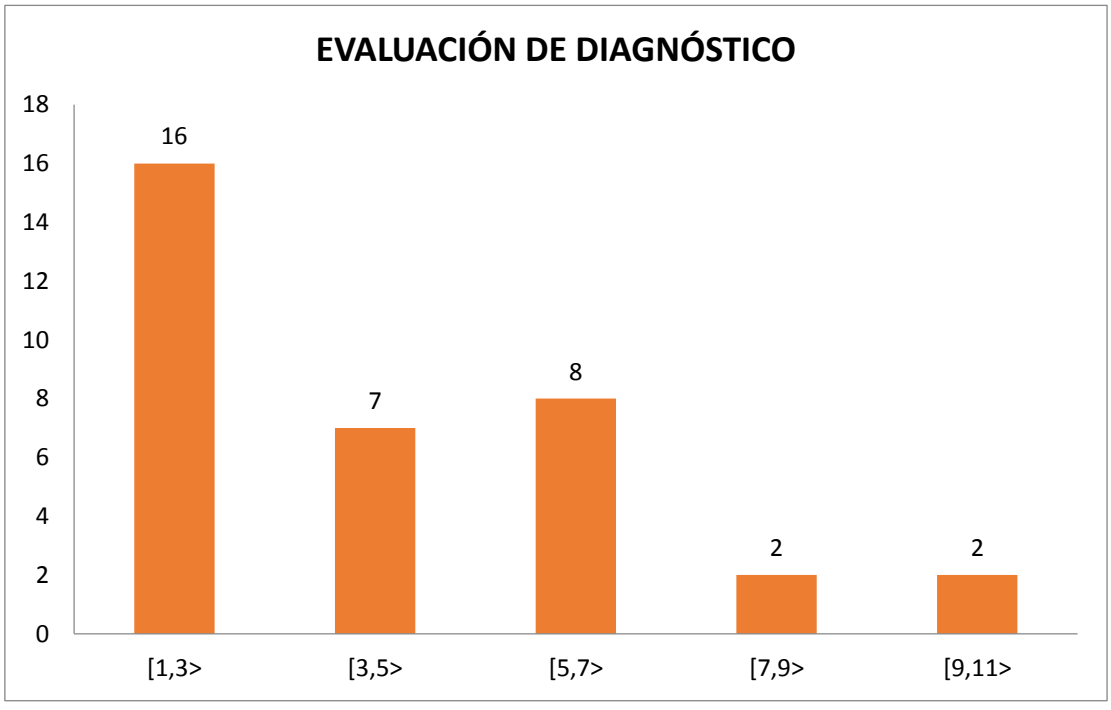
M_5 : Cálculo III

M_6 : Cálculo IV

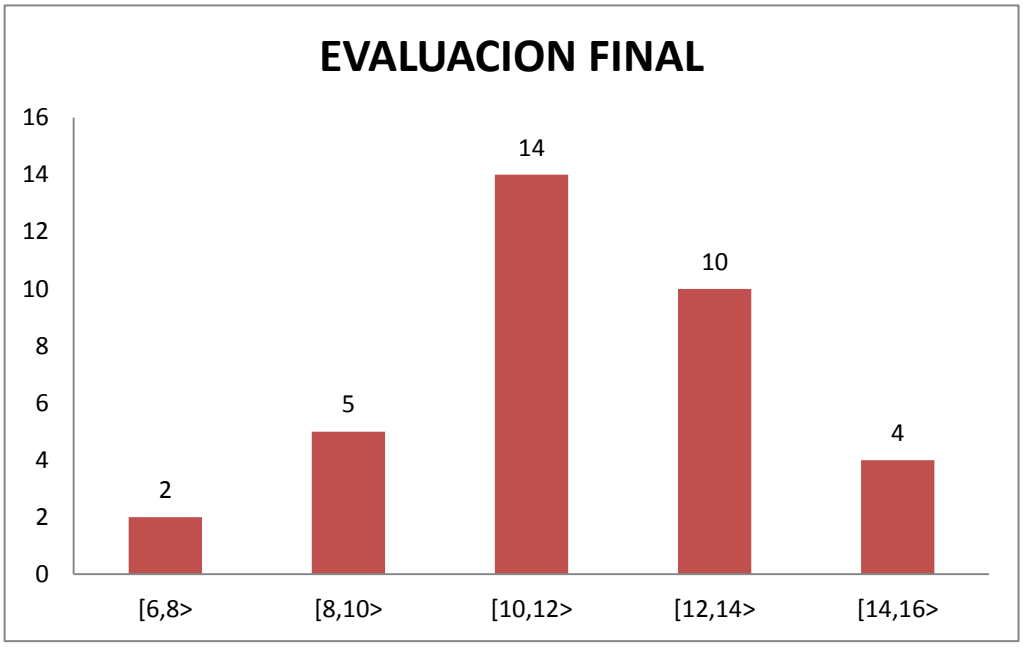
PRESENTACION DE LOS RESULTADOS

UC

AULA BI1103

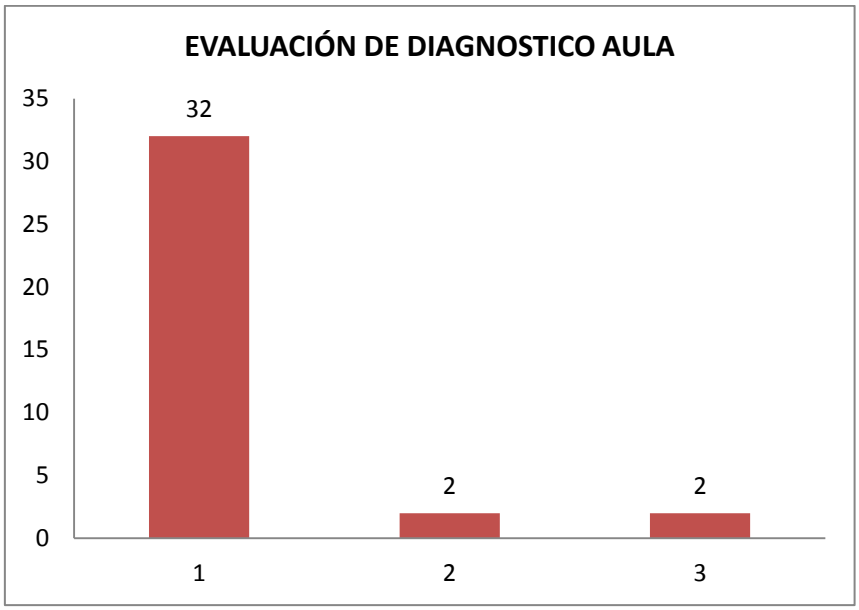


Del cuadro se observa que, del total de 35 estudiantes considerados en el estudio, el 45 % tiene una nota muy baja, entre uno y tres puntos; frente a sólo un 05,7 % que presenta una nota alta.

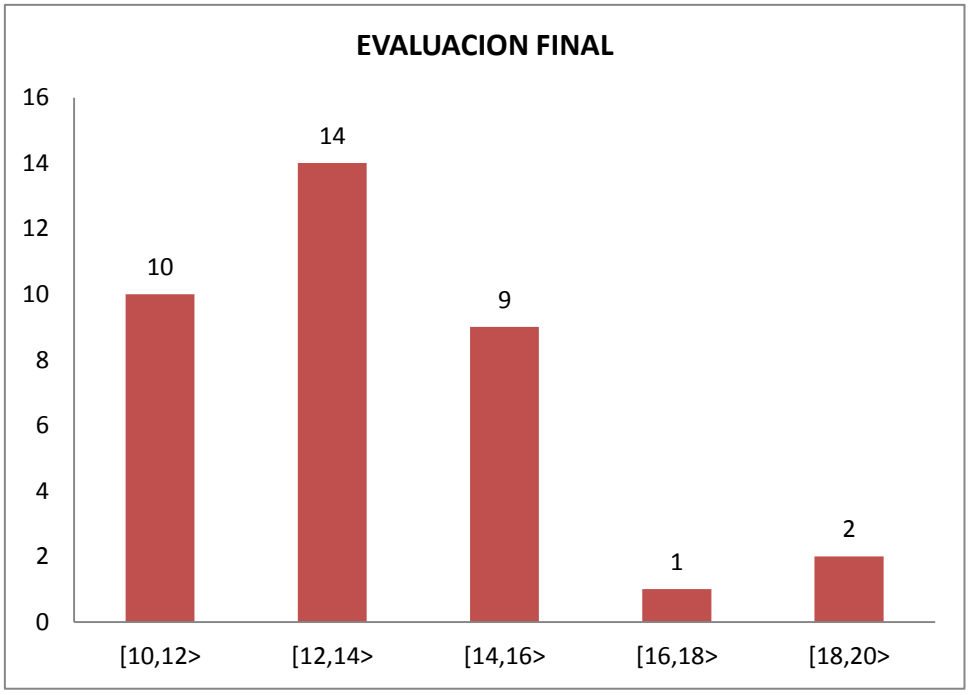


La desviación estándar es aproximadamente 2,19 unidades, considerándose que es altamente disperso. Además, su promedio es de 10,97 de nota y la moda que se repites es de 10,00 puntos.

AULA BI1104

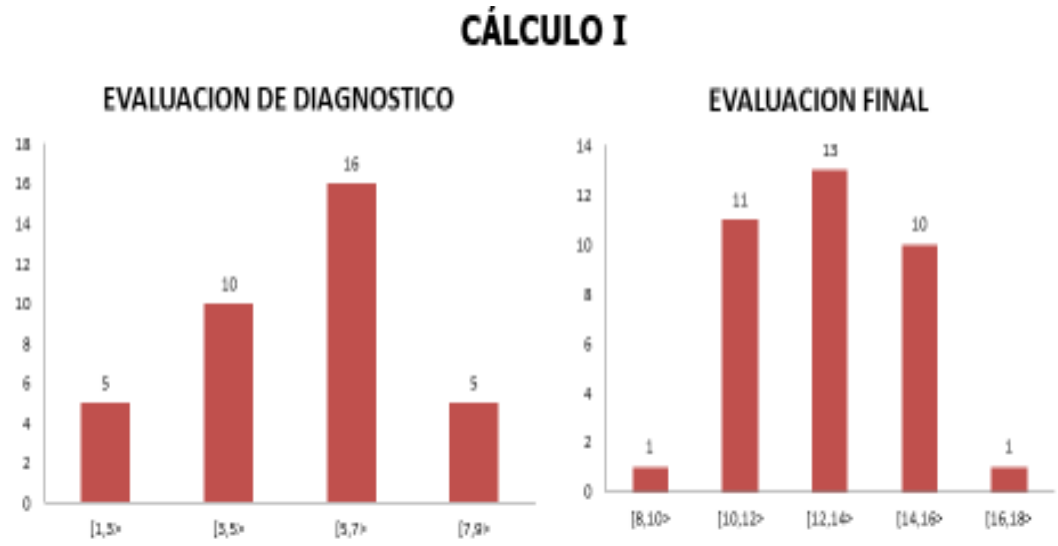


Del cuadro se observa que, del total de 36 estudiantes considerados en el estudio, el 88.8 % tiene una nota muy baja, entre uno y tres puntos; frente a sólo un 05,6 % que presenta una nota alta.

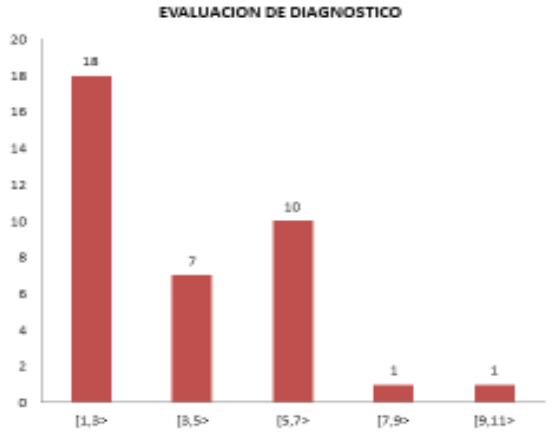


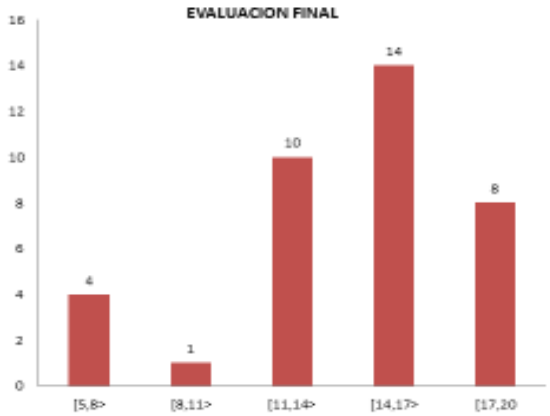
La desviación estándar es 1,19 unidades, considerándose que es medianamente disperso. Además, su promedio es de 12,83 de nota y la moda que se repites es de 12,0 puntos.

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CENTRO DEL PERU



CÁLCULO II

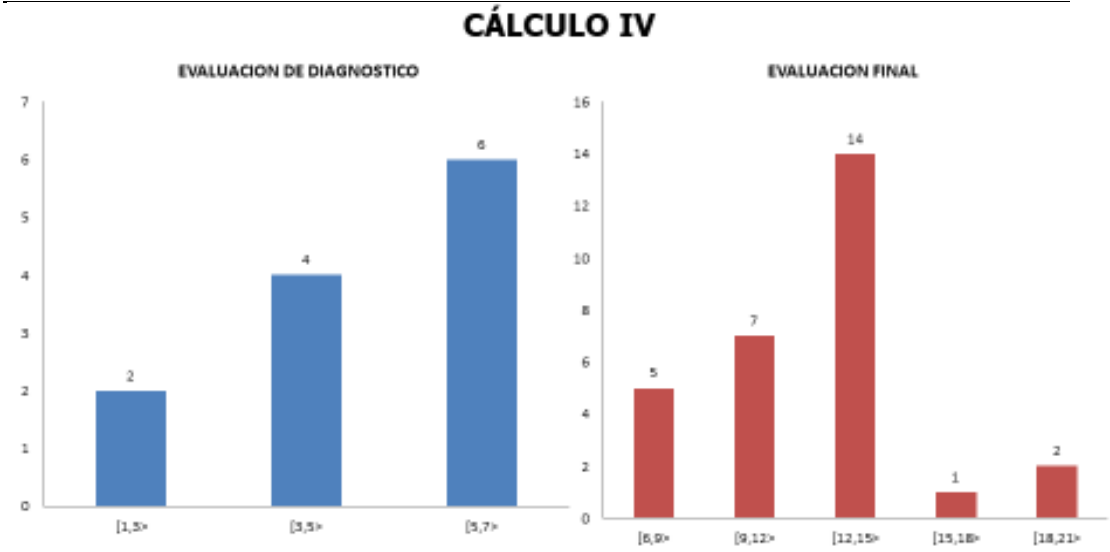




CÁLCULO III







PRUEBA DE HIPOTESIS

Prueba de hipótesis para la evaluación de diagnóstico:

Los datos corresponden a seis muestras independientes: $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6$ representando a las medias poblacionales extraídas de una población de las aulas asumidas para el estudio, con una distribución normal.

01 Hipótesis

$H_0 : \mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = \mu_6$

$H_1 :$ No todas las μ_i son iguales.

02 *Nivel de significancia*: $\alpha = 0.05$.

03 Estadística de prueba: $F = \dfrac{SCC(n-k)}{SCE(k-1)}$, donde

SCC =suma de cuadrados entre los tratamientos y

SCE= suma de cuadrados dentro los tratamientos

Que se distribuye según: $F(k-1, n-k) = F(6-1, 200-6) = F(5,194)$

04 Región crítica: Para el nivel α=0.05 en la tabla F se encuentra el valor crítico de la prueba es $F_{0.95,5,194}$=2.26 . Se rechazara H_0 si F_{cal}>2.26 .

05 Cálculos: de los datos se obtiene:

	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F
Entre grupos	325,96	5	65,192	19,308
Dentro de grupos	655,03	194	3,376	
Total	980,99	199		

F_{cal}=19.308

06 Decisión: La toma de decisión, considerando que F_{cal}=19.308>2.26=$F_{0.95,5,194}$

Se concluye que se rechaza la hipótesis nula. Es decir las medias no son iguales.

- **Prueba de hipótesis para la evaluación final:**

Los datos corresponden a seis muestras independientes: $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6$ representando a las medias poblacionales extraídas de una población de las aulas asumidas para el estudio, con una distribución normal.

01 Hipótesis

$H_0 : \mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = \mu_6$

H_1 : No todas las μ_i son iguales.

02 *Nivel de significancia*: α=0.05 .

03 *Estadística:* $F = \frac{SCC(n-k)}{SCE(k-1)}$, donde

SCC =suma de cuadrados entre los tratamientos y

SCE= suma de cuadrados dentro los tratamientos

Que se distribuye según: $F(k-1, n-k) = F(6-1, 200-6) = F(5,194)$

04 *Región crítica:* Para el nivel α=0.05 en la tabla F se se encuentra el valor crítico de la prueba es $F_{0.95,5,194}$=2.26 . Se rechazara H_0 si F_{cal}>2.26 .

05 *Cálculos:* de los datos se obtiene:

	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F
Entre grupos	402,07	5	80,41	11,54
Dentro de grupos	1351,49	194	6,97	
Total	1753,55	199		

F_{cal}=11.54

06 *Decisión*: La toma de decisión, considerando que F_{cal}=11.54>2.26=$F_{0.95,5,194}$. Se concluye que se rechaza la hipótesis nula. Es decir, las medias no son iguales.

Análisis de los resultados

Conceptualmente los estudiantes antes de ser aplicados los módulos no fundamentaban sus resultados y sus procedimientos eran limitados y que decir de sus actitudes. Tenían una fobia a las asignaturas de cálculo ya que estos son requisitos para fundamentar conceptualmente en forma matemática sus asignaturas de especialidad en semestres superiores.

Al aplicárselos el modulo basado en la teoría de Vigotsky, fundamentado en la historia y la cultura, donde se hacía ver aquellos personajes que estructuraron la matemática superior

desde la realidad, en la parte conceptual se tuvo más apoyo. Se abordó el desarrollo de los conceptos matemáticos a través de la historia y cultura, se tomó en cuenta el grupo de científicos que se dedicaron a la explicación y sustentación de la idea fundamental hasta llegar a abstraer la regularidad de los fenómenos a partir de la naturaleza, del por qué nace la idea y fundamentar sustentando el concepto matemático, como consecuencia a la idea abstraída los matemáticos le dieron una denominación o su nombre que le corresponde y por ultimo rescatar la importancia del ente matemático en su aplicabilidad a la realidad.

Los grupos en estudio pudieron desarrollar sus habilidades en las tres dimensiones, en lo conceptual, los procedimental y actitudinal. Para cada grupo en estudio se aplicó un examen de salida cuyos resultados se ha denominado (O2). Se encontró que sus notas fueron exitosas, en las tres dimensiones, conceptual, procedimental y actitudinal. En una de las aulas su mayor nota fue de 20; siendo su nota menor de 05. Cabe resaltar que su promedio de los 200 estudiantes es de 12 puntos.

Al comparar con el trabajo de investigación realizado en la Universidad del Zulia, de la Facultad de Humanidades y Educación, los investigadores Bejas, M. y Apitz, A. (2002) desarrollaron un trabajo de investigación con el título "PROGRAMA ALTERNATIVO PARA LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA GEOGRAFÍA", el estudio tuvo como propósito enseñar y aprender según la definición espacial, se orientó también en lo cultural, fue para ellos de gran interés estudiar las condiciones históricas del pasado y las diversas manifestaciones culturales que se realizan, a partir de las cuales se generan nociones y conceptos geosocioculturales que se incorporan a los contenidos conceptuales del programa. Teniendo como conclusión en la fase aplicativa permitió incorporar el diseño pedagógico a la obtención de las nociones espaciales producidas en la investigación de campo, no solamente la inclusión de los elementos de información, sino observar qué conductas y experiencias de aprendizaje se lograban en el diseño.

Por lo indicado el Diseño Sociocultural aplicado a los alumnos de ingeniería Civil de las Universidades de Huancayo, si es relevante. En el sentido que constata que sustentando los conceptos en la historia y en su desarrollo cultural los estudiantes toman más atención.

Su aplicación fue en el cálculo de áreas, volumen y tangentes entre otros. El nuevo cálculo es universal, en el sentido en que se aplica del mismo modo a todo tipo de funciones. Newton y Leibniz lo aplicaron con éxito en la longitud de arco, problemas de máximos y

mínimos, problemas geométricos, etc. Todos los entes matemáticos definidos son abstraídos de la realidad concreta.

En el trabajo de investigación realizado por Parra, A., (2004), que remite al Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Colombia en el año 2003. Siendo el título "ACERCAMIENTO A LA ETNOMATEMÁTICA". Cuyo propósito fue de dar una definición de la Etnomatematica. Y revisando el concepto de etnomatemática, estudiado en su reciente aparición como campo de investigación interdisciplinario, relacionado con la educación matemática, la antropología y la epistemología e historia de las matemáticas. Queda sustentada una vez más que el Diseño Sociocultural desde la perspectiva sociohistórica ayuda a la construcción del conocimiento del ser humano y son importantes porque va a la búsqueda, la exploración, la investigación y la solución de problemas compartidos con alguien. Respecto a sus actividades compartidas en la sociedad y cultura ayudan a internalizar la forma de pensar, porque la actividad del estudiante primero es interpersonal y luego intrapersonal, es decir el estudiante es un ser activo. Se adquieren conocimientos mediante un proceso colaborativo donde existe interacción social. Esto posibilita que el niño integre la forma de pensar y de comportarse socialmente. La relación del niño con su ambiente se considera asertiva (con confianza para actuar y comunicarse), activa y curiosa.

Desde el punto de vista epistemológico en que se define como: el estudio del conocimiento y de la justificación de la creencia. Los estudiantes reforzaron su aprendizaje en dos aspectos: uno de corte epistemológico, considerando a la sociedad y la cultura como base fundamental del establecimiento de los conceptos matemáticos y otro de corte cognitivo, aumento por un lado las capacidades de todo los que ellos puedan aprender es posible aplícalo en su formación profesional. Gracias al diseño sociocultural aplicado, sus modos de proceder de los estudiantes se reforzaron en el razonamiento simbólico, sobrio, con el que trata de modelizar diversas formas de ser del mundo físico e intelectual. En el aspecto de problematizar la realidad a partir de entender el diseño propuesto, en los estudiantes hubo mayor conexión con la filosofía de todos los tiempos hasta llegar al nuestro. En realidad, bien se puede afirmar que la mayor parte de los logros de nuestra tecnología no son sino matemática encarnada con la mediación de otras ciencias.

Para concluir, los estudiantes en base a la matemática ´plasmado en el diseño sociocultural, como frutos de su aprendizaje planificaron y organizaron sus conocimientos del mundo

circundante de dos modos: proponer problemas y en obtener modelos matemáticos que fueron efectivizados en fórmulas matemáticas y que describan el comportamiento del fenómeno que se trate.

Referencias

Bejas, M. y Apitz, A. (2002). Programa Alternativo para Enseñanza- Aprendizaje de la Geografia. En *Geoenseñanza.* Venezuela: Universidad de Zulia.

Bologna, E. (2011). *Estadistica para Educacion y Psicologia.* Argentina: Brujas.

Bruner, J. (1978). *Proceso Mental del Aprendizaje.* España: Narcea.

Bruner, J. (1996). *Hacia una Teoría de la Instrucción.* Mexico: Uthea.

Carbonell, C. M. (1012). Infraestructuras de datos espaciales: Desarrollo de Habilidades Espaciales en el Entorno del Espacio Europeo de Educación Superior. *Infraestructuras de datos espaciales: desarrollo de habi*, 157-175.

Fernandez, L. (2011). La Historia Como Herramienta Didactica: El Concepto de Integral. *Trabajo de Fin de Master*.

Gerald, H. (1965). *Ciencia y Cultura.* Argentina: Bibliografica Omeba.

Godino, J. ,. (2003). Razonamiento Algebraico y su Didactica para Maestros. (Reprodigital, Ed.) *Matematica y su Didactica para Mestros*, 826.

Godino, J. y. (2004). *Didactica de la Matematica Para Maestros.* España: Gami S. L.

Guillermo, R. (s.f.). Vigotsky y las Teorias del Aprendizaje. *AFAAN*, 1-37.

Martin, M. (2008). *Origenes del Calculo Diferencial e Integral.* España.

Melton, Austin; Reed, Beverly M; Mathematics that Changes Lives.

Kasturiarachi, A. Bathi. (2002) Conference Proceedings of the 2nd International Conference of the Teaching of Mathematics

Papalia, D. y. (2012). *Desarrollo Humano* (Duodécima ed.). Mexico: McGraw-Hill Companies, Inc.

Parra, A. (2004). *Acercamiento a la Etnomatematica.* Bogota: Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Colombia.

Piaget, J. (1971). *Epistemologia Matematica y Psicologia.* España, Barcelona: Ariel.

Piaget, J. (1971). *Psicologia y Epistemología.* España: Ariel S. A.

Piget, J. (1991). *Seis Estudios de Psicologia* . España: Labor, S. A. 120

Polya, G. (1989). *Como Plantear y Resolver Problemas* (Decimoquinta ed.). exico: Trillas.

Rodriguez, L. (2008). *La Teoría del Aprendizaje Significativo en la perspectiva de la Psicología Cognitiva.* (Primera ed.). España: Octoedro.

Roman, M. (2011). *Aprender Aprender en la Sociedad del Conocimiento*. Chile: Conocimiento.

Santamaria, R. (2008). *La Competencia Sociocultural en el Aula de Español L2/LE: una Propuesta didactica.* España: Universidad Carlos III de Madrid.

Valdive, C. (2008). Los Infinitesimales en el Cálculo: Un Punto de Vista Sistemico. *Educere*, 531-538.

Villalba, M. (2002). Nacimiento del Cálculo. *Apuntes de la Historia de la Matemática*, 46-53.

Vygotsky, L. (1995). *Pensamiento y Lenguaje*. Habana: Fausto.

Whitehead, A. (1957). *Los fines de la educación*. Buenos Aires: Paidos.

Wenzelburger, e. (1987). *La transferencia en el aprendizaje*. Publicaciones de la asociación nacional e instituciones de educación superior

Volver al índice de autores

ANEXO

MODELO DE DISEÑO SOCIOCULTURAL EN EL APRENDIZAJE CALCULO EN ESTUDIANTES DE INGENIERÍA CIVIL

I. PRESENTACIÓN DEL TEMA

Despertar el interés hacia el aprendizaje que se desea realizar. Presentación del objetivo a llegar al final del proceso aprendizaje.

II. HISTORIA DE LOS CONCEPTOS MATEMÁTICOS

Resumen del desarrollo del concepto matemático a través de la historia y cultura.

III. MATEMÁTICOS QUE ESTUDIARON EL CONCEPTO

Grupo de científicos que se dedicaron a la explicación y sustentación de la idea fundamental. Llegar a abstraer la regularidad de los fenómenos a partir de la naturaleza.

IV. ANÁLISIS DE LOS CONCEPTOS MATEMÁTICOS EN SU CONTEXTO Y CULTURA

Por qué nace la idea. Fundamentar y sustentar el concepto matemático.

V. NOMBRE DEL OBJETO O ENTE MATEMÁTICO

Consiste en darle una denominación a la idea abstraída.

VI. ENUNCIADO DEL AXIOMA Y/O TEOREMA

Resultado de la regularidad abstraída en una ley o principio.

VII. APLICACIONES DE LOS OBJETOS O ENTES MATEMÁTICOS EN LA REALIDAD CULTURAL

Rescatar la importancia del ente matemático en su aplicabilidad.

VIII. EVALUACIÓN

Ejercicios de investigación y de aplicación de los temas.

4.3.5. Coseno y seno de la diferencia y suma de ángulos

Ubaldo Cayllahua Yarasca
Félix Amadeo Canales Conce
Universidad Nacional de Huancavelica, Huancavelica, Perú

Resumen

El propósito de esta socialización es reestructurar el pensamiento de los estudiantes sobre el coseno y seno de la diferencia y suma de ángulos. Esta propuesta ha sido experimentada con estudiantes del II ciclo, carrera profesional de matemática, usando la metodología del descubrimiento y debate. Los resultados de esta experiencia son que aproximadamente 96% de los estudiantes logran con facilidad el aprendizaje previsto. Por tant,o se concluye que, a partir de la deducción de la fórmula del coseno de una diferencia de ángulos, se puede obtener las otras fórmulas de funciones trigonométricas de ángulos compuestos, produciendo un impacto positivo en el proceso de enseñanza y aprendizaje, por su validación experimental

COSENO Y SENO DE LA DIFERENCIA Y SUMA DE ÁNGULOS

Se pide a los estudiantes observar atentamente la siguiente igualdad:

$$\cos(\beta - \alpha) = \cos\beta - \cos\alpha$$

Después de analizar en parejas, se pide que respondan: ¿Es verdadero o falso?

Más del 50% de estudiantes responden que es verdad la igualdad.

Y esto es un error recurrente en la construcción de conceptos matemáticos (Alarcón, 2005). Así pues, "El error no es solamente efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar (…); sino el efecto de un conocimiento anterior, que tuvo su interés, su éxito, y que ahora se revelan falso o simplemente inadaptado. Los errores de este tipo no son fortuitos e imprevisibles, su origen se constituye en un obstáculo" (Brousseau, 1998, citado en Chamorro, 2005, p. 32). Es decir, hay una estrecha conexión entre cierto tipo de errores y la constitución de obstáculo, que son generalmente de tipo epistemológico, que están estrechamente ligados al saber matemático.

Para verificar el error de los estudiantes, se va a un ejemplo como el siguiente:

Sean los ángulos $\beta = \pi/3$ y $\alpha = \pi/6$. Luego se tiene que:

$$\cos(\pi/3 - \pi/6) = \cos \pi/3 - \cos \pi/6$$

Operando se tiene que: $\cos(\pi/6) = \cos \pi/3 - \cos \pi/6$

$\sqrt{3}/2 = ½ - \sqrt{3}/2$ ….. ¡ Falso ¡

Y esta falsedad resulta de suponer como verdadera la igualdad inicial, por tanto:

$$\cos(\beta - \alpha) \neq \cos\beta - \cos\alpha$$

Entonces ¿a qué es igual $\cos(\beta - \alpha)$?

Para responder esta pregunta se hace uso del aprendizaje por descubrimiento de Bruner, donde el propio estudiante encontrará la verdad, siguiendo las actividades de aprendizaje diseñadas por el docente. Aquí el estudiante tiene una participación activa y directa en la construcción del conocimiento. El docente sólo orienta y facilita los medios necesarios para que los estudiantes descubran por su cuenta el conocimiento nuevo, haciendo uso de sus conocimientos previos (Universidad Internacional de Valencia, 2015).

Luego, para la deducción de identidades de funciones trigonométricas de la suma y diferencia de ángulos (Stewart, Redlin y Watson, 2007), se procede de la siguiente manera:

1º. Recordar la fórmula de la distancia entre 2 puntos en el plano cartesiano.

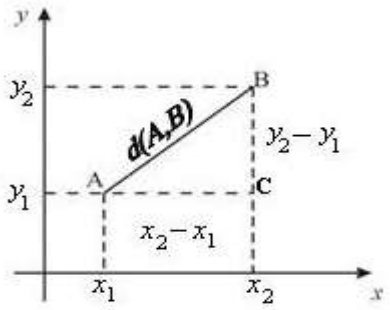


Fig. 1. Distancia entre 2 puntos α

A partir de la figura 1, por Teorema de Pitágoras se tiene que:

$$d_{A,B} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

2º. Angulo en posición normal en un círculo trigonométrico

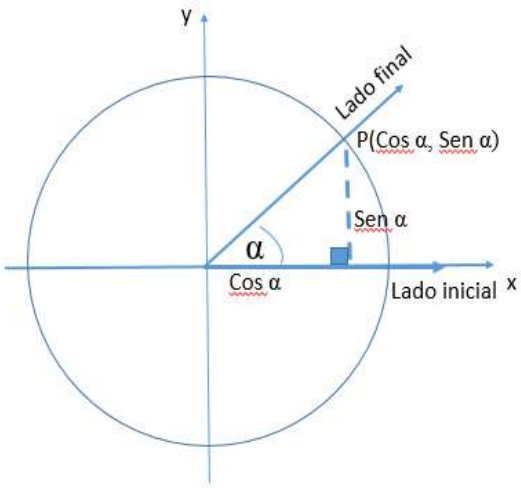


Fig 2. Angulo en posición normal

3º. El sen y cos de ángulos negativos según Prado y otros (2006) es:

Sen(-α) = - sen α ….. Función impar

Cos (-α) = cos α ….. Función par

4º. El cuadrado de un binomio es: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

5º. Identidades pitagóricas: $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$$\text{sen}^2\,(\alpha-\beta) + \cos^2(\alpha-\beta) = 1$$

Ahora se toma un pedazo de cartón del tamaño de papel A4 y al medio graficar un sistema de ejes cartesiano xy con el auxilio de un par de escuadras. Luego cortar un círculo de papel de radio 6 a 8 cm y colocarlo con un chinche sobre el sistema de ejes de tal manera que coincida el centro de círculo con el origen del sistema de ejes como indica la figura 3.

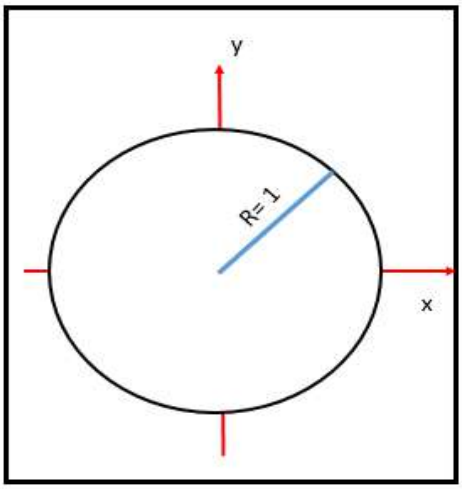


Fig. 3. Círculo trigonométrico

Sobre el círculo unitario tracemos los ángulos en posición normal α y β como muestra la fig. 4

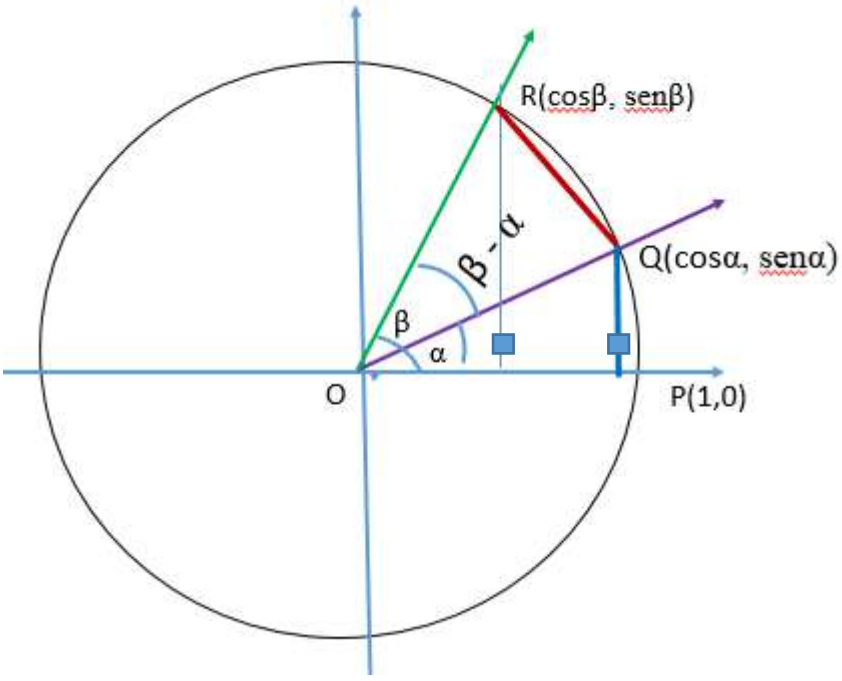


Fig. 4. Ángulos en posición normal

Las coordenadas de los puntos P, Q y R son: P(1,0), Q(cosα , senα) y R(cosβ, senβ). Pero de acuerdo a la fórmula de distancia entre 2 puntos, la medida del segmento QR es:

$$QR= [(\cos\beta-\cos\alpha)^2 + (\text{sen}\beta-\text{sen}\alpha)^2]^{1/2} \text{ ……. (1)}$$

Luego girar el círculo en el sentido de las agujas del reloj, hasta que el vértice Q del triángulo ORQ coincida con el punto P, como indica la figura 5.

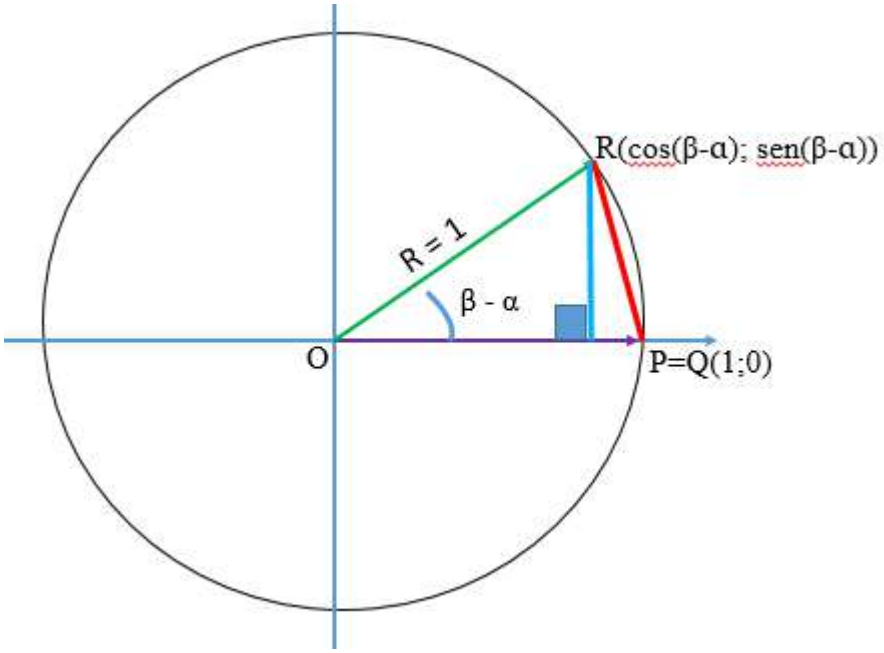


Fig 5. Triángulo ORQ en nueva posición

Ahora hallando la nueva distancia QR, basado en los datos que muestra la figura 5 se tiene que:

$$QR= [(\cos(\beta-\alpha)-1]^2 + [(\text{sen}(\beta-\alpha)-0]^{1/2} \quad \text{……. (2)}$$

Como las distancias QR en las dos posiciones es la misma, igualamos las expresiones (1) y (2):

$$(\cos\beta-\cos\alpha)^2 + (\text{sen}\beta-\text{sen}\alpha)^2]^{1/2} = [(\cos(\beta-\alpha)-1]^2 + [(\text{sen}(\beta-\alpha)-0]^{1/2}$$

Operando los 2 miembros se tiene que:

$$\text{Cos}^2\beta-2\cos\beta\cos\alpha+\cos^2\alpha+\text{sen}^2\,\beta-2\text{sen}\,\beta\text{sen}\alpha+\text{sen}^2\alpha = \cos^2(\beta-\alpha)-2\cos(\beta-\alpha)+1+\text{sen}^2(\beta-\alpha)$$

Simplificando se tiene que:

$$\mathbf{\cos(\beta-\alpha) = \cos\beta\cos\alpha+\text{sen}\beta\text{sen}\alpha}$$

Coseno de la suma de ángulos

De acuerdo con Miller, Heeren y Hornsby (2006), para deducir la fórmula de cos (β+α**)** sustituimos α por **-** α en cos (β-α):

Cos (β-α**) =** cosβcosα+senβsenα

Cos (β-(- α)) = cosβcos(-α)+senβsen(-α) …. Pero por función par e impar resulta que:

Cos (β + α) = cosβcosα - senβsenα

Seno de la suma de ángulos:

Para obtener la fòrmula de sen (β + α) se debe recurrir al concepto de cofunciones (Stewart, Redlin y Watson, 2007):

sen α = cos (π /2 – α)

cos α = sen (π /2 – α)

Luego: sen (β + α) = cos (π /2 – (β + α)) ….. operando el segundo miembro:

= cos ((π /2 – β) – α) …. Por coseno de una diferencia de ángulos

= cos (π /2 – β)cosα + sen (π /2 – β)senα …. Por cofunciones

sen(β + α) = senβcosα + cosβsenα

Seno de la diferencia de ángulos

Para obtener la fórmula correspondiente también recurrimos al concepto cofunciòn:

sen (β – α) = cos (π /2 - (β – α)) …. Operando el segundo miembro

= cos ((π /2 - β) + α) ….. por coseno de una suma de ángulos

= cos(π /2 - β)cosα - sen(π /2 - β)senα …. Por cofunciones

Luego se tiene que: **sen (β – α) = senβcosα – cosβsenα**

Referencias

Alarcón, S. (2005). *Evidencia de un obstáculo epistemológico*. Disponible en: https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/5062942.pdf

Chamorro, C. (2005). *Didáctica de las Matemáticas*. Madrid: Pearson Educación.

Miller, C.; Heeren, V. y Hornsby, J. (2006). *Matemática: razonamiento y aplicaciones.* México: Pearson/Addison Wesley

Prado, C.; Santiago, R.; Aguilar, G. (2006). *Precálculo*: *enfoque por competencias*. México: Pearson/Prentice-Hall

Stewart, J.; Redlin, L. y Watson, S. (2007). *Precálculo. Matemática para el cálculo.* México: Cengage-Learning

Universidad Internacional de Valencia (2015). *¿Qué se entiende por aprendizaje por descubrimiento?*. Disponible en: https://www.universidadviu.es/que-se-entiende-por-aprendizaje-por-descubrimiento/

Volver al índice de autores

4.3.6. La recta y el punto – un romance matemático

Nilton César Rodríguez Ramírez
Institución Educativa Privada Alfred Nobel, Ate, Lima, Perú

Resumen

El presente trabajo es una experiencia dada en búsqueda de familiarizar a los participantes con la matemática (más estrictamente con la geometría) en un aula de 3er. Grado de Secundaria. En esta experiencia se tiene como objetivo, a través de la obra "La recta y el punto: un romance matemático" (de Norton Juster) promover habilidades de relacionar, ordenar, originalidad y creatividad matemática junto a la literatura. Es así que esta actividad favorece, en un primer momento, la atención y retención de la propuesta, y posteriormente tenemos la participativa acción de los alumnos en forma grupal mediante su cooperación, creatividad y socialización de las ideas compartidas, lo que permite esbozar el camino a la solución de la situación y hacer compatibles esta solución con su conocimiento matemático

Presentación

Al ser permanente la participación de los estudiantes, se logra mejorar la didáctica del docente y con ello el aprendizaje recreativo. Metodología que aborda este trabajo. Relacionarse con la geometría a través de las gráficas en las estampillas para organizarlas y reescribir la obra "La recta y el punto: un romance matemático", es motivo de idear las representaciones de la recta, el punto y la curva hasta figuras bidimensionales y tridimensionales, cuyo orden van narrando los principales sucesos de la obra. En el desarrollo de la actividad, los alumnos van determinando la simbolización gráfica de circunferencias, círculos, triángulos, cuadrados, polígonos, esferas, pirámides, paralelepípedos y complejos diagramas con base en rectas y curvas (grafos, faja de mobiüs, etc.) Cada grupo, se ha mostrado un satisfactorio resultado, la interacción constante exponiendo los criterios individuales para ordenar finalmente como equipo las estampillas como una alternativa matemática-filatélica la obra.

El desarrollo de este proyecto va en este último sentido entonces y de la historia misma, de la mano con el conocimiento ya previo que tuvieron mis alumnos al haberles leído unas

cuantas veces la obra, e ir explicándoles los pormenores de lo que ocurre y de las características de los personajes (el punto, la recta y la curva).

Una vez hecho los comentarios de todos los participantes, y con la motivación que nos da el mensaje final de la obra pasamos a armar la historia con simbolización plasmada en los diferentes sellos filatélicos que también encierran características matemáticas y de otras disciplinas como la física, la química, geografía, etc.

El objetivo principal del proyecto es poder lograr leer la obra en 10 estampillas, con las pocas palabras y con el enriquecimiento de los símbolos o figuras que muestran los sellos filatélicos escogidos.

Cada alumno puede llegar a imaginar en cada sello una idea de lo ocurre en la obra y lo va ordenando con ese criterio. Aunque también hay sellos cuyas imágenes no logra ubicar en la obra, el alumno puede bajo la explicación del profesor darle un sentido o simplemente descartarlo de la serie final que seleccionará.

La experiencia al final es la dinámica que se puede manejar con los educandos y reafirmar las cuestiones básicas de la matemática, la aplicación de las mismas en otras ramas, y no solo por los cálculos (que tradicionalmente se usa), sino por las formas (gráficas) y los fondos (ubicación) que cada alumno puede provocar explicar.

Otras obras como Planilandia, de Edwin A. Abbott, entre otras que hay en el mercado serían trabajos pendientes a realizar, o también la creación misma de los alumnos de obras literarias cortas, didácticas y amenas que logren plasmar luego en imágenes mediante sellos postales.

Había una vez una sensata línea recta que estaba perdidamente enamorada de un punto.

“Tú eres el principio y el fin, el eje, el núcleo y la quinta esencia”, le decía con ternura, pero el frívolo punto no estaba ni un poquito interesado, pues solo tenía ojos para una desparpajada línea curva.

La recta, sin embargo, se encargó de demostrarle lo maravillosa que podía llegar a ser.

Plan de trabajo:

1. Había una vez…
2. Despreciada recta y la pareja divertida.
3. Oídos sordos a las amigas y la recta soñadora.
4. Recta soñadora.
5. Recta sin personalidad: “ser lo que no se es”
6. Reinventarse, redescubrirse, reencontrarse.
7. Insiste amiga recta, cambia tu dirección.
8. Renace, revive.
9. Preparada para el derroche de belleza y elegancia.
10. Corazón valiente, belleza extrema.
11. Desenlace cardiológico.
12. Cuando te impresiona te enamora.
13. Ojos que ven corazón que si siente.
14. Y vivieron felices y vectoriosos.

Un trabajo realizado con alumnos de tercer año de secundaria (45 minutos), muestra una rápida y activa participación de los alumnos, para ello ya ellos han escuchado la historia y se los agrupa para trabajar con 10 estampillas entregadas al azar en cada grupo y con ello empezar a interpretar los principales momentos en donde la recta, el punto y la curva intervienen.

La discusión inicial entre los integrantes es representar a los protagonistas y en paralelo que partes de la obra les permite cada estampilla interpretar. El recordar y decidir la interpretación de una imagen lo hacen también preguntando al docente para hacerles ampliar su papel final en su trabajo, tanto en el fondo y la forma de las figuras.

Luego de ordenar las 10 estampillas pasan a explicar por escrito y de forma breve lo que han deseado plasmar en el orden, elementos de la imagen y principales momentos que para ellos sean interesantes.

Trabajo realizado por el grupo número 1 del 3er. Grado de Secundaria



1. Se observa a la recta, al punto y a la curva.

   (Dibujo con trazos - simetría)



2. El punto se enamora de la curva.

   (Trayectoria de un satélite - Grafos)



3. La recta trata de imitar a la curva.

   (Banda de Mobiüs o banda sin fin)



4. La recta hace figuras cada vez más difíciles.

   (Ondas de luz)



5. La recta dibuja figuras cuadrangulares.

   (El cometa Halley sobre casas en ciudades medievales)



6. La recta aparece como dueña de continentes.

   (Paralelas, meridianos, puntos de intersección - circuitos)



7. La recta va mejorando sus movimientos y trazos.

   (diagrama de un avión)



8. La recta se vuelve más compleja.

   (Líneas curvas formando circunferencias concéntricas al punto - Lanzamiento de un cohete)



9. La recta muestra su capacidad al punto.

   (La recta rodeando a la tierra como punto - La integral)



10. El punto deja a la curva por la recta y se queda con ella.

    (La curva perturbada y el punto con orbitas formadas por la recta transformada en curva)

Referencias

Juster, N. (1963). *La recta y el punto., un romance matemático*. Fondo de Cultura Económica.

El correo de Lima. Al lado de palacio de gobierno se reúnen dominicalmente los coleccionistas de filatelia en el Perú.

Círculo Amigos de la filatelia – CAF. Encargados del Museo postal ubicados en el museo gastronómico a espaldas de la Municipalidad de Lima.

Volver al índice de autores

4.4. Talleres

4.4.1. Relações entre Geometria e Álgebra com ferramentas do software Geogebra

María José Ferreira da Silva
Saddo Ag Almouloud
Pontifícia Universidade Catolica de São Paulo, Brasil

Resumen

A presente oficina tem como objetivo explorar construções geométricas utilizando o Geogebra com o intuito de articular geometria e álgebra e está dirigido a professores do nível secundário, que não precisam ter conhecimentos do software. Entendemos que as ferramentas e recursos do Geogebra podem ser utilizados para tanto para dar interpretações geométricas para expressões algébricas, quanto o contrário e, ressaltamos que não é necessário ter conhecimentos do software para participar desta oficina. As atividades que serão desenvolvidas na oficina foram trabalhadas em uma formação continuada de professores em Geometria realizada em São Paulo. Elas serão realizadas em duas seções. Na primeira serão exploradas aplicações do teorema de Pitágoras e Thales bem como algumas atividades envolvendo proporcionalidade. Na segunda seção serão tratadas atividades que ainda exploram propriedades de circunferências e geometria espacial. O material pode ser trabalhado com os alunos e esperamos que sirva de inspiração para outras atividades.

Introdução

O Geogebra, como um software gratuito, é de fácil acesso para professores e alunos como uma ferramenta que ajuda o aluno a levantar e validar conjecturas, além de conduzir à representações dinâmicas que se constituem em classes de representações de um mesmo objeto ou situação em detrimento à unicidade obtida com lápis e papel. Por outro lado, de acordo com Silva, Gaita e Salazar (2017, p. 6), citando Gascón (1995), o ensino de álgebra "não deve se ater apenas a problemas aritméticos, mas ao estudo de campos de problemas que envolvam outras áreas da matemática, como é o caso da Geometria e do desenho geométrico. A álgebra escolar já é questionada por Chevallard, em 1989, quando aponta o abandono do uso de parâmetros e do desenvolvimento de fórmulas.

Alguns trabalhos vêm sendo desenvolvidos nesse sentido. Almeida (2010) sugere o ensino dos sólidos arquimedianos, via truncatura, utilizando o Cabri 3D. Silva e Almouloud (2013) constroem um cuboctaedro, a partir de truncaturas de um octaedro regular, para desenvolver uma organização didática para o estudo de uma fórmula para o cálculo da medida de seu volume. Santos (2016) parte das construções apresentadas por Euclides, para os poliedros regulares convexos, para obter a decomposição e composição do icosaedro e dodecaedro em pirâmides congruentes e, com isso, determinar fórmulas para o cálculo da medida de seus volumes. Silva, Gaita e Salazar (2017) analisam a articulação entre geometria e álgebra em uma situação de cálculo da medida do volume de um icosaedro considerando as etapas do processo de algebrização. No mesmo sentido, mas com foco na geometria plana, Almouloud, Silva e Farias (2017) publicam sequências para o ensino de geometria no ensino básico, resultantes de uma formação continuada de professores, que privilegiam o uso de um software de representação dinâmica. Assim, essas referências nos inspiraram a construir esta oficina, mas buscando um referencial que ampliasse as questões do ensino de álgebra e de geometria.

Referencial teórico

Vários estudos discutem o ensino de álgebra, mas os iniciados por Chevallard (1984, 1989, 1990) fazem uma crítica ao ensino da álgebra escolar considerando que seu ensino privilegia o cálculo algébrico e situações que configuram apenas uma aritmética generalizada. Chevallard (1989) afirma que o principal papel da álgebra é a de modelizar sistemas intra ou extramatemáticos promovendo uma dialética entre o cálculo algébrico e os sistemas numéricos, por exemplo, em vez apenas de generalizar a aritmética. Acrescenta que o cálculo algébrico deve funcionar como ferramenta útil e em seu texto de 1990 esquematiza o processo de modelização desenvolvido em três etapas que partem da identificação de variáveis; da construção de modelos a partir de relações entre essas variáveis e, por fim, um trabalho com o modelo que produza novos conhecimentos a respeito do sistema em estudo. Para o autor a modelização está presente em toda atividade matemática e ainda, a aritmética é um conhecimento oral cujas ferramentas são a linguagem natural e o cálculo com números que, eventualmente, podem ser escritos.

Nesse sentido, Bolea, Bosch e Gascón (2001) apresentam quatro indicadores para reconhecer o grau de algebrização de uma organização matemática: tratar com tipos gerais de problemas, em vez de problemas isolados, o que é possível com a introdução de

parâmetros que permitem manipular a estrutura global de tipos de problemas; reconhecer condições para que um determinado tipo de problema tenha solução; unificar diferentes tipos de problemas, técnicas e justificativas, além da geração de novos tipos de problemas.

Baseando-se também nos estudos de Chevallard, Munzon, Bosch e Gascón (2010, 2015) apresentam três etapas para o processo de algebrização. Para os autores esse processo, de fato, se inicia com programas de cálculo como uma sequência de operações aritméticas que se pode efetuar "passo a passo", mas deve avançar para a hierarquia das operações e normas para uso de parênteses que fazem surgir a noção de expressões algébricas e programas de cálculos equivalentes. Na segunda etapa devem ser trabalhadas situações em que apenas as técnicas de simplificação ou expressão de um programa de cálculo não são suficientes, isto é, devem surgir relações entre os dados e a incógnita para caracterizar a igualdade entre dois programas de cálculo. Seria nesta etapa que a equação deve ser trabalhada como um novo objeto matemático e implicaria em novas técnicas como as equações equivalentes e o cancelamento. Segundo os autores a álgebra escolar dominante não supera esta etapa quando foca apenas na tradução da linguagem natural para a linguagem algébrica e para a solução da equação obtida. É necessário atingir a terceira etapa com a introdução de relações entre programas de cálculo com várias variáveis, que podem ser interpretados como fórmulas, nos quais desaparece a distinção entre parâmetros e incógnitas.

Silva, Gaita e Almouloud (2018) entendem que as quatro etapas do processo de modelização algébrica proposto por Chevallard deve ser desenvolvido na terceira etapa do processo de algebrização, para que efetivamente o ensino de álgebra aconteça. A primeira etapa desse processo se caracteriza por uma situação problemática inicial do sistema que será modelizado da qual se tem questões que não tem respostas imediatas. A seguir, é necessário identificar e designar as variáveis e as relações entre elas que se concretizará em um modelo algébrico de um sistema de várias variáveis ou parâmetros ou de um sistema de dados e incógnitas. É na terceira etapa que ocorre o trabalho manipulativo que culminará em um modelo final e na interpretação dos resultados obtidos. Finalmente, na última etapa, devem ser enunciados novos problemas para ampliar o conhecimento do sistema estudado e ocorrer a organização dos resultados obtidos.

Assim, com essa referência buscamos atividades que pudessem romper com protótipos amplamente utilizados para o ensino de geometria plana, mas que privilegiasse uma dialética real entre geometria e álgebra, que apresentaremos na sequência.

A oficina

O objetivo da oficina é conceber e explorar construções geométricas utilizando o Geogebra e sua relação com a álgebra. A oficina está dividida em duas seções de, aproximadamente uma hora e cinquenta minutos cada uma. Na primeira seção, iniciamos com duas atividades que tratam de aplicação direta do teorema de Pitágoras, com o objetivo de associar o quadro geométrico ao quadro algébrico. Na primeira atividade deve ser percebido que se um segmento mede $p = \sqrt{a^2 + b^2}$, sendo a e b medidas de segmentos então o segmento solicitado é a hipotenusa de um triângulo retângulo pois $p^2 = a^2 + b^2$. Da mesma forma no item seguinte, o segmento procurado é o cateto de um triângulo retângulo de hipotenusa medindo a e o outro cateto medindo b.

A segunda atividade tem como objetivo a construção de uma figura e, a partir de sua observação, e de cálculos algébricos determinar medidas de segmentos. Construções auxiliares ajudam a encaminhar a justificativa algébrica, como mostra a figura 1, e às duas possibilidades de resultado: BC = 2 e CD = 9 ou BC = 9 e CD = 2.

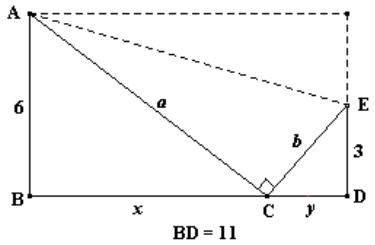


Figura 1: resolução geométrica da atividade 2

Fonte: produção dos autores

A atividade 3 tem como objetivo constatar que a medida da área da superfície do triângulo de maior lado é igual à soma das medidas das áreas das superfícies dos outros dois. Além disso, perceber que essa relação permanece se, sobre os lados do triângulo ABC forem construídos polígonos regulares ou semicírculos.

As atividades seguintes tratam de proporcionalidade e do teorema de Thales. A quarta atividade tem por objetivo a aplicação direta do teorema para a solução geométrica de um problema. A construção consiste em traçar pelo ponto P uma reta t, paralela à reta r que intercepta a reta s no ponto E. Determinando o ponto A simétrico de O em relação ao ponto

C, este se torna ponto médio do segmento AO. Ao traçar uma reta pelos pontos A e P, obtemos na intersecção com a reta r, o ponto B. Se t // s e AC = CO então AP = PB e P é ponto médio de $\overline{AB}$. As atividades 5 e 6, têm como objetivo a determinação geométrica da quarta e da terceira proporcional, ou seja, a partir de uma proporção, dada algebricamente, obter uma representação geométrica e justifica-la. No primeiro caso, como mostra a figura 2, dados três segmentos, com medidas a, b e c temos que determinar o segmento de medida $x = \frac{b \cdot c}{a}$ que será obtido com a aplicação do teorema de Thales.

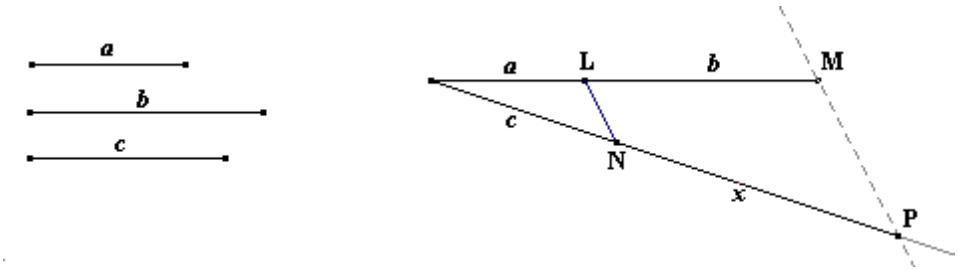


Figura 2 – Solução da atividade 5

Fonte: produção dos autores

Como $\overline{LN} // \overline{MP}$, por Thales, x é a quarta proporcional entre as medidas a, b e c, isto é $x = \frac{b \cdot c}{a}$. De maneira análoga temos a solução da atividade 6.

Na segunda seção apresentamos cinco situações que tratam de propriedades da circunferência e uma que trata da determinação de fórmulas para medidas de volumes. Numerando na sequência da seção 1, a atividade sete trata de observar que qualquer ponto P, sobre um dos arcos determinados pela corda $\overline{AB}$, determina o ângulo APB que tem medida constante. Este arco recebe o nome de arco capaz do ângulo APB sobre o segmento AB por ser considerado como o arco "capaz" de "ver" o segmento AB sob um determinado ângulo. Além disso perceber também, a partir da movimentação da construção, que se um ponto N pertence ao outro arco, determinado pela mesma corda, a medida do ângulo ANB é constante e igual a $180° - med(A\widehat{M}B)$. No item final da atividade é solicitada uma ação inversa, isto é, a construção do arco capaz a partir de um ângulo e de um segmento dados, como mostramos na figura 3. Dados o ângulo FHE e o segmento CD, traçamos pelo ponto A uma reta paralela à reta CD. A seguir determinamos o ponto B tal que AB = CD e traçamos por A uma paralela à semirreta HF para determinar o ângulo BAR = FHE.

Para determinar o centro da circunferência traçamos a mediatriz da corta AB e traçamos a reta AQ, perpendicular à reta AR, que intercepta a mediatriz no ponto O, centro da circunferência procurada.

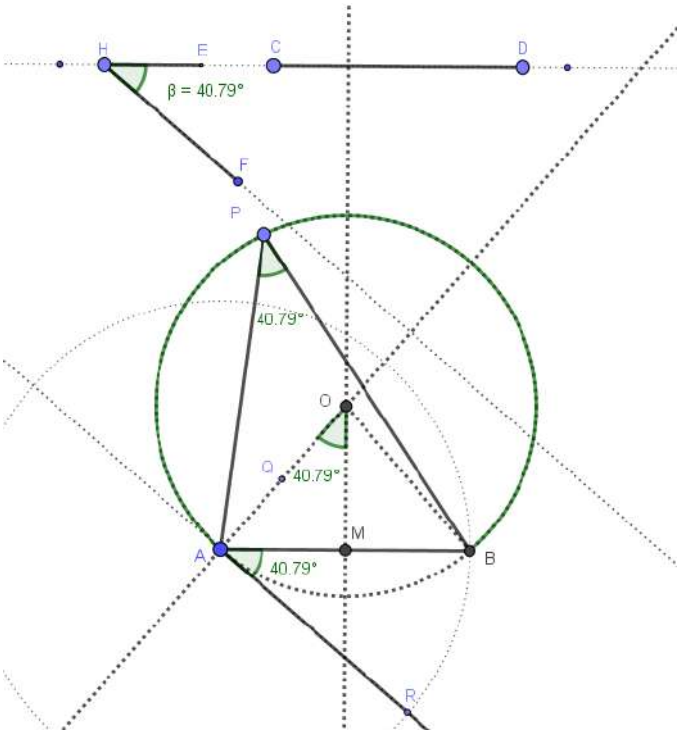


Figura 3 – construção do arco capaz a partir de um ângulo e de um segmento.

Para justificar essa construção observamos que como o ângulo BAR = β o ângulo BAQ = 90º - β. Se considerarmos que se o ponto M, é médio do segmento AB e o triângulo AMO é retângulo em M então o ângulo AOM = β. Assim, como AOB = 2β (ângulo central) temos que para qualquer ponto P do arco AB, APB = β (ângulo inscrito). A atividade 8 tem como objetivo explorar as relações entre as medidas dos segmentos formados por duas cordas concorrentes de uma circunferência, a partir de uma representação dinâmica. A conjectura é a obtenção de uma propriedade que pode ser enunciada como: *dadas duas cordas, AB e CD, que se interceptam no ponto P, o produto das medidas dos segmentos formados em uma corda (PA* x *PB) é igual ao produto das medidas dos segmentos formados na outra corda (PC* x *PD).* De maneira análoga, na atividade 9 busca-se definir potência de um ponto em relação a uma circunferência: *se as retas suportes de duas cordas, AB e CD de uma circunferência concorrem em um ponto P, interior ou exterior a essa circunferência, o produto PA* x *PB é igual ao produto PC* x *PD. O produto PA* x *PB é constante para qualquer secante que passe pelo ponto P.* Na atividade 10, busca-se a relação entre

tangentes a uma circunferência e na atividade 11 a relação entre tangente e secante a uma circunferência.

Na atividade 12 trabalhamos com geometria espacial e buscamos determinar uma fórmula para o cálculo da medida do volume de um tetraedro regular a partir de um cubo. Nesta atividade, de acordo com nosso referencial, estamos trabalhando efetivamente com álgebra, no que tange à determinação de fórmulas, ao uso de parâmetros e ao raciocínio funcional. Após a construção, como mostra a figura 4, é possível perceber, com a ajuda do software, que cada uma das pirâmides retiradas do cubo representa 1/6 do volume do cubo. Como são retiradas quatro dessas pirâmides então são retirados 4/6 ou 2/3 do volume do cubo o que significa que o tetraedro representa um terço do volume do cubo, ou seja $V_T = a^3 - \frac{2}{3}a^3 = \frac{1}{3}a^3$. Assim, temos uma fórmula para calcular a medida do volume do tetraedro em função da medida *a* da aresta do cubo que o originou.

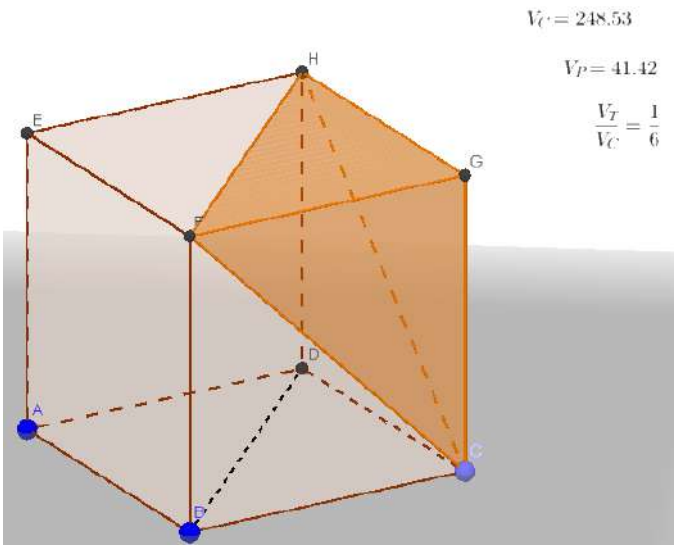


Figura 4 – parte da solução da atividade 12

Fonte: produção dos autores

Mas o tetraedro é um poliedro regular de aresta medindo $x = a\sqrt{2}$ e para calcular a medida do volume de um tetraedro regular qualquer precisamos de uma fórmula em função da medida de sua aresta e não do cubo que o origina. Dessa forma podemos fazer uma

mudança de parâmetro considerando que $a = \frac{x\sqrt{2}}{2}$ que substituído na fórmula obtida anteriormente obtemos $V_T = \frac{1}{3}a^3 = \frac{1}{3}\left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{x^3\sqrt{2}}{12}$.

A partir dessa atividade poderia ser discutido a trissecção do prisma e a generalização da fórmula para o cálculo da medida do volume de uma pirâmide qualquer.

Referências

Almeida, T. C. S. (2010). *Sólidos Arquimedianos e Cabri 3D: Um estudo de truncaturas baseadas no renascimento.* PUC-São Paulo, 185 p, Dissertação (Mestrado profissional em ensino de Matemática).

Almouloud, S. A. & Silva, M. J. F. & Farias, L. M. S. (org.). (2017). *Sequências para o ensino de geometria no ensino básico.* Salvador: EDUFBA.

Bolea, P. & Bosch, M. & Gascón, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización: el caso de la proporcionalidade. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* n. 21(3), p. 247-304.

Chevallard, Y. (1984) Le passage de l´arithmetique a l´algebrique dans l´ensegnement des mathematiques au college**.** Premiere partie, l´evolution de la transposition didactique. *Petit x*, n. 5, p. 51-94.

Chevallard, Y. (1990). Lepassage de l'arithmetique a l'algebrique dans l'enseignement des mathematiques au college. Troisième partie. Voies d'attaque et problemas didactiques. *Petit x*, n 23, p. 5-38.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la Didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12* (1), 73-112.

Munzón, N. & Bosch, M. & Gascón, J. (2015). El problema didáctico del algebra elemental: Un análisis macro-ecológico desde la teoría antropológica de lo didáctico. *REDIMAT, Vol 4*(2), 106-131, 2015.

Munzón, N. & Bosch, M. & Gascón, J. (2010). La algebrización de los programas de cálculo aritmético y la introcución del álgebra em secundaria. In: M.M.Moreno et al (Eds.), *Investigación em Educación Matemática* XIV, p.545-556, Lleida: SEIEM.

Santos, A. A. dos (2016) *Construção e medida do volumen dos poliedros regulares convexos com o Cabri 3D: uma possível transposição didática*. PUC-São Paulo, 167p, Tese (Doutorado).

Silva, M. J. F & Gaita, C. & Salazar, J. F. (2017). A articulação entre Geometria e Álgebra na construção de fórmulas para o cálculo de medidas de volume. In: *Revista Educação Matemática em Foco.* V6, n.1, pp.4-20.

Silva, M. J. F. & Gaita, C. & Almouloud, S. A. (2018). Una articulación teórica entre competencia algebraica, proceso de algebrización y modelización algebraica. In: *Revemat (no prelo).*

Silva, M. J. F. & Almouloud, S. A. (2013). Estudo de uma organização didática para construção de fórmulas para a medida de volume de sólidos. In: *Actas del VII CIBEM*, ISSN 2301-0797, pp. 7658-7665.

Volver al índice de autores

4.4.2. Aritmética y álgebra: linealidad y reduccionismo

Miguel R. Wilhelmi
Jaione Abaurrrea
Aitzol Lasa
Universidad Pública de Navarra, España

Resumen

El profesorado precisa herramientas para la gestión y control de procesos de estudio efectivos. Estas herramientas deben permitir la valoración del desempeño matemático y aportar criterios para la elaboración de situaciones para la mejora de procesos de estudio potenciales. Desde el enfoque ontosemiótico del conocimiento y de la instrucción matemáticos (EOS) se ha propuesto una clasificación del razonamiento algebraico elemental (RAE) para desarrollar las competencias necesarias en el profesorado, tanto en formación inicial (en las Facultades de Educación) como continua (con docentes en activo). El taller abordará el análisis de casos prácticos y el desarrollo de la capacidad de análisis didáctico del profesorado basado en el EOS.

Objetivos

1) Determinar y analizar las características del Razonamiento Algebraico en Primaria y Secundaria.
2) Distinguir tipos de objetos y procesos algebraicos en tareas matemáticas escolares.
3) Asignar niveles de razonamiento algebraico a la actividad matemática mostrada al resolver tareas escolares.
4) Incorporar los conocimientos de Educación Primaria en el desarrollo del Razonamiento Algebraico en Secundaria.

Método

- *De la práctica a la teoría*. A partir de una situación práctica se discriminan y describen los fundamentos matemáticos y didácticos presentes en la misma.
- *De la teoría a la práctica*. A partir del discurso teórico, se proponen instrumentos de cambio para la mejora de procesos de enseñanza y aprendizaje que involucren la actividad matemática analizada.

Desarrollo

1. Resolver tareas matemáticas, propias de primaria y secundaria, a ser posible, de varias maneras.

2. Analizar los objetos y procesos involucrados en la resolución de las tareas.

3. Enunciar tareas relacionadas cuya solución modifique los objetos y procesos involucrados y el nivel educativo de referencia.

4. Presentación, discusión y valoración del modelo de los niveles de algebrización de la actividad matemática.

5. Síntesis, conclusiones y cuestiones abiertas.

Referencias

Godino J. D., Castro W., Aké L., Wilhelmi, M. D. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. Boletim de Educação Matemática - BOLEMA, 26 (42B), 483-511. Recuperable (2018/07/06): http://www.scielo.br/pdf/bolema/v26n42b/05.pdf

Godino,J. D., Aké L., Gonzato M., & Wilhelmi M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, 32(1), 199-219. Recuperable (2018/07/06): https://ddd.uab.cat/pub/edlc/edlc_a2014v32n1/edlc_a2014v32n1p199.pdf

Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L., Etchegaray, S. y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 8, 117-142. Recuperable (2018/07/06):

http://www.aiem.es/index.php/aiem/article/view/105

Godino, J. D., Aké, L. P., Contreras, A., Díaz, C., Estepa, A. Blanco, T. F., Lacasta, E., Lasa, A., Neto, T., Oliveras, M. L. y Wilhelmi, M. R. (2015). Diseño de un cuestionario para evaluar conocimientos didáctico - matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental. Enseñanza de las Ciencias, 33.1, 127 - 150.

Recuperable (2018/07/06): https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/download/288575/376858

Godino J. D., Wilhelmi M. R., Neto T., Blanco T. F., Contreras A., Díaz-Batanero C., Estepa A., & Lasa A. (2015). Evaluación de conocimientos didáctico - matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental de futuros maestros. Revista de Educación 370, 199-228. Recuperable (08/09/16): http://www.mecd.gob.es/revista-de-educacion/numeros-revista-educacion/numeros-anteriores/2015/370/370_8.html

Volver al índice de autores

Anexo I. Características de los niveles de algebrización

NIV	OBJETOS	TRANSFORMACIONES	LENGUAJES
0	- Objetos con un primer grado de generalidad (números particulares) -Significado operacional de la igualdad. -Variables como receptores de números particulares	Operaciones aritméticas con números particulares	Natural, numérico, icónico, gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a objetos extensivos o datos desconocidos.
1	-Objetos con un segundo grado de generalidad (conjuntos, clases o tipos de números) -Significado relacional de la igualdad - Variables como incógnitas.	Operaciones con objetos de primer grado de generalidad, aplicando propiedades de la estructura algebraica de N y la igualdad como equivalencia.	Natural, numérico, icónico, gestual; se usan símbolos implicando información espacial, temporal y contextual.
2	-Objetos con un segundo grado de generalidad (conjuntos, clases o tipos de números) -Significado relacional de la igualdad - Variables como incógnitas, números generalizados y cantidad cambiante	-Operaciones con objetos de primer grado de generalidad, aplicando propiedades de la estructura algebraica de N y la igualdad como equivalencia. - Ecuaciones de la forma, $Ax + B = C$. - En tareas funcionales se reconoce la generalidad, pero no se realizan operaciones con las variables para obtener formas canónicas de expresión.	Simbólico – literal, usado para referir a los objetos intensivos reconocidos, aunque todavía ligados a la información espacial, temporal y contextual.
3	- Se usan indeterminadas, incógnitas, ecuaciones, variables y funciones particulares. (Objetos	-Operaciones con objetos de un segundo grado de generalidad.	Simbólico – literal; se usan los símbolos de manera analítica (sin

	intensivos con un segundo grado de generalidad)	- Ecuaciones de la forma Ax ± B = Cx ± D. - Se hacen operaciones con indeterminadas o variables para obtener formas canónicas de expresión.	significados), sin referir a información contextual.
4	Variables, incógnitas y parámetros; Familias de ecuaciones y funciones (Objetos intensivos con un tercer grado de generalidad)	Hay operaciones con variables, pero no con los parámetros.	Simbólico – literal; los símbolos son usados analíticamente, sin referir a información contextual.
5	Variables, incógnitas y parámetros; Familias de ecuaciones y funciones (Objetos intensivos con un tercer grado de generalidad)	Hay operaciones con los parámetros y, por tanto, con objetos con un tercer grado de generalidad.	Simbólico – literal; los símbolos son usados analíticamente, sin referir a información contextual.
6	Estructuras algebraicas abstractas (espacios vectoriales, grupos, anillos, …) Relaciones binarias generales y sus propiedades. (Objetos intensivos con un 4º grado de generalidad)	Hay operaciones con los objetos que forman parte de las estructuras.	Simbólico – literal; los símbolos son usados analíticamente, sin referir a información contextual.

Anexo II. Tareas

Tarea 1. Justificación de conjeturas

Un alumno formuló la siguiente conjetura:

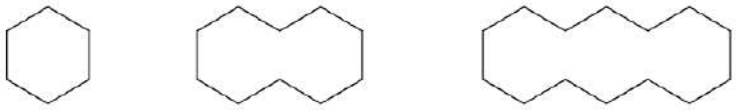
> *"Sumo tres números naturales consecutivos. Si divido el resultado por tres obtengo siempre el segundo número"*

a) ¿Es correcta la conjetura formulada por el alumno? Explica su posible razonamiento.

b) ¿Qué tipo de justificación piensas podría dar un alumno de primaria a esta conjetura?

Tarea 2. Patrón geométrico

Considera la siguiente secuencia de figuras:



a) Representa los dos términos siguientes de la secuencia e indica el número de segmentos necesarios para construir cada una.

b) Enuncia una tarea más difícil.

c) Discute un posible tránsito de los conocimientos propios de Educación Primaria a los de Secundaria relacionados con la tarea.

Tarea 3. Presupuesto de gastos

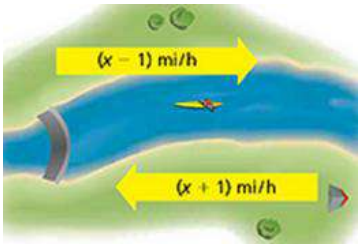
Un estudiante recibió de sus padres una cierta cantidad de dinero para comer durante 40 días. Sin embargo, encontró sitios en donde pudo ahorrar 4 euros al día en la comida. De esta forma, el presupuesto inicial le duró 60 días. ¿Cuánto dinero recibió? Resuelve el problema por dos métodos distintos.

Tarea 4. Relación entre dos programas de cálculo aritmético

Noelia y Marga piensan, independientemente, sendos números. Noelia multiplica su número por 3, resta 18 y acaba dividiendo este resultado entre 9. Marga resta 4 al número que pensó, a continuación, multiplica el resultado por 5 y acaba dividiendo el resultado por 10. Si, casualmente, obtienen el mismo resultado final, ¿qué relación hay entre los números pensados por Noelia y Marga?

Tarea 5. Movimiento uniforme

Supón que remas en piragua 5 millas/hora (mi/h) a favor de la corriente en un río desde tu campamento base hasta una presa, y que seguidamente regresas al campamento. La velocidad constante a la que remas en todo el viaje es de *x* mi/h, y la velocidad de la corriente del río es de 1 mi/h.



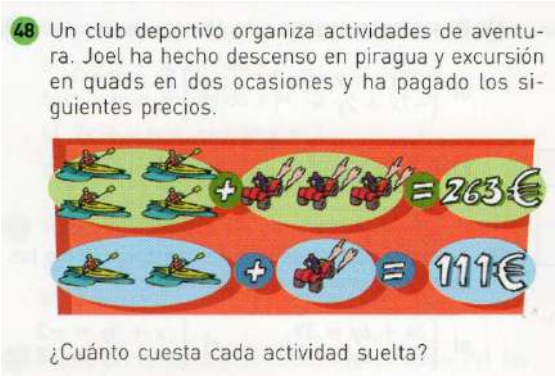
a) Analiza la situación según la velocidad *x* de remo.

b) Generaliza la situación.

Tarea 6. Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Resuelve, sin aplicar los métodos clásicos de sustitución, igualación ni sustitución, los siguientes sistemas:

a)



b) $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 5x + 2y = 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 5x - y = 13 \end{cases}$

Analiza y discute las similitudes y diferencias de los sistemas propuestos.

4.4.3. ¿Qué hacer con un análisis histórico epistemológico?

Enedina L. Rodríguez Cortez
Universidad Nacional Abierta. Centro local Lara, Venezuela

Resumen

El taller tiene como propósito brindar al participante una herramienta necesaria para el análisis histórico epistemológico de conceptos matemáticos. Así como el reconocimiento de la importancia que tiene este análisis sobre el análisis didáctico, en un profesor como investigador y/o didacta para interpretar las conductas y respuestas de los alumnos en torno a un concepto y además provee insumos para pensar una problematización adaptada al aula, se aplicara una metodología de aprender haciendo, mediante la identificación de los parámetros utilizados en el análisis histórico epistemológico de un concepto matemático en los artículos de Romero, F, Rodríguez, F, Henao S (2017), Hesiquio N, Velázquez S (2013), Rodríguez, E. (2014, Noviembre) y Valdivé, C. y Garbín, S. (2008). En este sentido, se pretende promover en las(os) participantes el uso de análisis histórico - epistemológico como destreza necesaria para abordar el proceso de enseñanza y aprendizaje al proponer en su praxis tareas y actividades que involucran cierto concepto, así como también, a la hora de elaborar cuestionarios y guiones de entrevistas al enfrentar a una investigación

Introducción

Los últimos años, se han realizado Análisis Históricos – Epistemológico en la Investigación en didáctica, en este tipo de análisis al estudiar la génesis histórica, es decir, el cómo y por qué aparecieron los mismos, se pone de manifiesto que para un mismo concepto matemático se han ido sucediendo una diversidad de puntos de vista sobre el mismo que, en su momento, fueron considerados como correctos y posteriormente han sido rechazados o revisados, percibiendo el conocimiento matemático como algo en continua y nunca acabada evolución. En referencia, a la epistemología esta ayuda a acercarse a describir concepciones ligadas al desarrollo de ciertas nociones matemáticas. Por lo tanto, el Análisis Histórico - Epistemológico es una herramienta que da una visión integral de esta ciencia.

Propósito

Este taller tiene como propósito brindar al participante una herramienta necesaria para el análisis histórico epistemológico de conceptos matemáticos. Debido a que a la hora de enseñar esta disciplina, el análisis tiene importancia, en recuperar la complejidad de los objetos matemáticos estudiados, ensancha sus concepciones epistemológicas, amplia la capacidad del investigador para interpretar las conductas y respuestas de los alumnos en torno a un concepto, y caracterizar los esquemas conceptuales epistemológicos asociados a la evolución histórica de la noción de un concepto matemático (Berge y Sessa, 2003;Valdivé y Garbin, 2008; Sánchez y Valdivé, 2010). Así, como determinar concepciones y obstáculos ligados al desarrollo de una noción matemática (Sierpinska, 1985; 1992; Brousseau, 1983).

En este sentido, se pretende despertar la curiosidad de los participantes y promover el uso de este análisis como destreza para abordar el proceso de enseñanza y aprendizaje y de investigación, además de la búsqueda en las fuentes disponibles de ampliar sus conocimientos de los temas que les interesen, así como también, a la hora de elaborar cuestionarios y guiones de entrevistas al enfrentar a una investigación

Metodología

La metodología de trabajo propuesta en este taller es teorico-practica en la que se enseña y se aprende a través de una tarea conjunta Se trata entonces *de un aprender haciendo*, donde los conocimientos se adquieren a través de una práctica concreta, realizando algo relacionado con la formación que se pretende proporcionar a los participantes.

Los participantes en grupo, analizaran en uno de los artículos impresos *Estudio de los esquemas conceptuales epistemológicos de asociados a la Evolución histórica de la noción de infinitesimal (Valdivé y Garbín, 2008), Significantes Históricos de la Función Afín aplicado a la Economía (Rodríguez,2014, Noviembre), Análisis Histórico-Epistemológico en la Educación Matemática (Romero, Rodríguez, y Henao, 2017) y Análisis histórico y epistemológico del concepto de Semejanza (Hesiquio y Velázquez, 2013*), los problemas que originaron la construcción de dichos conocimientos y cómo llegaron a articularse en cuerpos coherentes, conocer la metodología empleada y la hermenéutica utilizada por el

investigador, para aplicar a problemas o situaciones donde se manejen algunos elementos encontrados en el análisis.

Resultados Esperados

Se espera que los participantes:

- Reconozcan el uso que tiene el análisis histórico epistemológico
- Identifiquen los parámetros necesarios para diseñar estrategias que involucren el análisis histórico epistemológico de un concepto matemático.
- Aplicar a problemas o situaciones donde se manejen algunos elementos encontrados en el análisis.
- Reflexionen y compartan las experiencias en el aula y los saberes con los pares.

Reflexiones Finales

Las investigaciones *sobre Análisis Histórico-Epistemológico* presentadas pueden dar una idea de los procesos de construcción de un concepto matemático, así como los diversos estadios en la evolución de una noción y nos dará luz para diseñar situaciones problemas, actividades y preguntas que servirían para interpretar las respuestas que afloran los alumnos al enfrentarse a esas situaciones. Esto nos aportaría razones que nos dirigen a una manera diferente de afrontar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática, en cualquiera de sus ramas y en los diferentes niveles y modalidades de la Educación, pero esa sería otra historia.

Por un lado, la variedad de situaciones o problemas de investigación en Educación Matemática, que se puede aplicar y ser útil el método de investigación histórico, hace que no se agoten todas las posibilidades de investigación.

REFERENCIAS

Bergé, A. y Sessa C. (2003). Completitud y continuidad revisadas a través de 23 siglos Aportes a una investigación didáctica *Revista latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 6(3)163-197*

Boyer, C. (2003). Historia de la Matemática. Madrid: Editorial Alianza

Brousseau, G. (1983). Les Obstacles épistémologiques et les problemas en Mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques 4 (2), 164-198.

Hesiquio N,. Velázquez S (2013) *Análisis histórico y Epistemológico del concepto de Semejanza* Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 26.427-431

Romero, F, Rodríguez, F., Henao S (2017) *Análisis Histórico-Epistemológico en la Educación Matemática* Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,Volumen 30, 245-253

Rodríguez, E. (2014). *Significantes Históricos de la Función Afín aplicado a la Economía* Memoria del Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación. Noviembre- Buenos Aires Argentina (ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 522)

Valdivé, C. y Garbín, S. (2008). Estudio de los esquemas conceptuales epistemológicos de asociados a la evolución histórica de la noción de infinitesimal. *Revista latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 11(3): 413-450.*

Volver al índice de autores

4.4.4. ¿Qué aprenden los alumnos en los libros de texto?

Enedina L. Rodríguez Cortez
Universidad Nacional Abierta. Centro local Lara, Venezuela

Resumen

Los libros de texto constituyen una fuente para apropiarse del conocimiento, además es un agente determinante del currículo de matemáticas implementado en las aulas de los niveles educativos, el presente taller tiene como propósito brindar al participante una herramienta necesaria para el análisis de conceptos matemáticos en libros de texto, en el marco del Enfoque Ontosemiotico, para promover el uso de este análisis en docentes e investigadores, mediante la identificación de los parámetros utilizados en el análisis de libros de texto de un concepto matemático, en los artículos de Alastre J. y Rodriguez E, (2012), Rodriguez E, Valdive C. (2010) Vásquez E, Rodriguez E (2016) y Balcaza ,T., Contreras, A y Font, V (2017) En este sentido, se pretende que los participantes apliquen los elementos encontrados en el análisis, en un tópico en particular, así como internalicen las concepciones y obstáculos ligados al desarrollo de una noción matemática, que está condicionada por la forma en la que los libros de texto presentan dicho contenido.

Introducción

En el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática, unos recursos fundamentales en la construcción de los conocimientos matemáticos son los libros de texto, además de las explicaciones del profesor junto con los diseños curriculares. Godino, Font y Wilhelmi (2006), señalan que "los textos permiten al alumno afrontar el estudio de los contenidos curriculares de manera independiente, donde el profesor es el mediador entre el libro texto y el alumno" (p.6). Por ello, los contenidos matemáticos de los libros textos y documentos escritos, deben tener un alto grado de representatividad y relación con la evolución histórica de los conocimientos matemáticos; asimismo con otros libros que sirven de explicación adicional a estos conocimientos y que, para tal fin son señalados como referencia bibliográfica.

La necesidad de realizar un análisis de texto que permita una reflexión acerca de *las* concepciones y obstáculos ligados al desarrollo de una noción matemática, que está condicionada por la forma que se presentan dichos contenidos, requieren de herramientas teóricas que lo faciliten. Durante la realización de este taller se presentará una metodología de análisis de texto propuesta por el Enfoque Ontosemiotico del conocimiento matemático (EOS), denominada *análisis semiótico*.

El análisis de texto propuesto en el marco del EOS, la cual denomina *Análisis Semiótico,* se basa en descomponer el texto en unidades de análisis, que denominan semióticas, para delimitar dichas unidades se tendrá en cuenta los momentos de cambio, en los cuales se ponen en juego alguno de los siguientes seis elementos o entidades matematicas (Godino 2002):

1. **Lenguaje:** términos, expresiones, notaciones, gráficos. En sus diversos registros, escrito, oral, gestual.

2. **Situaciones:** problemas más o menos abiertos, aplicaciones extra matemáticas o intra matemáticas, ejercicios. Son las tareas que inducen la actividad matemática.

3. **Conceptos** (introducidos mediante definiciones o descripciones) números, recta, punto, función.

4. **Proposiciones**: propiedades o atributos de los objetos mencionados, que suelen darse como enunciados.

5. **Acciones**: procedimientos del sujeto ante las tareas matemáticas (operaciones algoritmos, técnicas de cálculo, entre otras).

6. **Argumentaciones**: enunciados usados para validar o explicar las proposiciones o procedimientos, sean deductivos o de otro tipo.

En el EOS existen dos tipos de análisis: a priori se aplica a un texto que registra una actividad matemática que tiene que realizar un sujeto potencial (por ej. un libro texto) y a posteriori cuando el texto corresponde al protocolo de respuestas de los sujetos en interacciones efectivas.

En ambos análisis se pueden detectar las dificultades y limitaciones en los aprendizajes matemáticos efectivamente realizados.

A continuación, se presenta el logro que los participantes deben alcanzar al finalizar el taller como resultado de las experiencias de enseñanza y aprendizaje intencionalmente planificadas para tal fin

Propósito

El contenido matemático, tanto su concepto como la diversidad de representaciones, debe estar expresado en los textos utilizados en los procesos de instrucción de manera clara y completa ya que estos son uno de los recursos para apropiarse los estudiantes al hacer matemáticas.

En este sentido, este taller pretende aportar herramientas de análisis de libros de texto que registran la actividad matemática, mediante la identificación de los parámetros del Análisis Semiótico, propuesto por el Enfoque Ontosemiotico, utilizados en los artículos de Alastre J. y Rodriguez E, (2012), Rodriguez E, Valdive C. (2010) Vásquez E, Rodriguez E (2016) y Balcaza , T, Contreras, A *y Font, V (2017*), para interpretar las disparidades , vacios que presentan dicho contenidos en los libros de texto, además de promover el uso de este análisis en docentes e investigadores

Seguidamente se presenta, la metodología a seguir en este taller, en el marco del EOS, la cual denomina *Análisis Semiótico*

Metodología

El taller será teórico –practico, se desarrollará en 3 horas distribuidas en 2 (dos) días de jornadas de 1h y 30 minutos por día, en cuanto al:

Primer Día (1° Día) :

1. Introducción al Tema e Integrase a los 4 equipos de trabajo (10 min)

2. Se abordarán algunos elementos teóricos: Conceptos fundamentales del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS)

3. Uso que tiene el Enfoque Ontosemiotico en el análisis de un texto

4. Analizar la metodología a utilizar en el análisis de libro de texto de un concepto matemático.

5. Cada grupo, identificara los parámetros necesarios para el análisis de libro de Texto de un concepto matemático, que propone el EOS, en uno de los siguientes artículos impresos

    - Vásquez E, Rodriguez E (2016). *Configuración Epistémica de una lección sobre Multiplicación*
    - Alastre J. y Rodriguez E, (2012). *Análisis ontosemiótico de una lección sobre el concepto de la integral definida. (Análisis Semiótico)*
    - Rodriguez E, Valdive C. (2010) *Análisis ontosemiótico de una lección sobre el concepto de la Función Afín y Ecuación Lineal aplicada a la economía. (Análisis Semiótico)*
    - Balcaza, T, Contreras, A y Font, V (2017) *Análisis de Libros de Texto sobre la Optimización en el Bachillerato*

Segundo Día (2° Día):

1. Identificación de las unidades de análisis, denominadas unidades semióticas, en un contenido de un texto que registra la actividad matemática a desarrollar por los alumno, el criterio para definir las unidades semióticas serán los momentos en los cuales se ponen en juego alguna de las seis entidades elementales: **situaciones, acciones, lenguaje, conceptos-reglas, propiedades, argumentaciones** Para ello se utiliza una tabla de 2 columnas: En la columna de la derecha la transcripción completa de la información presentada en el texto, con el signo # indicando el cambio de unidad y en la columna de la izquierda se colocan las unidades semióticas: U_0, U_1,U_2……U_n

Unidades	Transcripción del contenido del texto
U_0	……..#
U_1	……..#
U_2	……..#
Un	……..#

Nota: «Tomado de: Un enfoque Ontológico y semiótico de la cognición matemática.

Recherches en Didactique des Mathematiques» por Godino 2002 pp 16«

2.- Para la clasificación de las entidades matemáticas puestas en juego en el texto completo, que serán las unidades elementales del análisis, se utiliza la siguiente tabla donde se han agrupado las mencionadas anteriormente en tres categorías:

a. **Praxis:** Situaciones, Técnicas

b. **Lenguaje:** Términos, Expresiones, Notaciones, Gráficos

c. **Teoría:** Conceptos, Propiedades, Argumentos

Praxis	**Lenguaje**	**Teoría**
Situaciones (Problemas, ejercicios, tareas)	*Términos y expresiones*	*Conceptos*
	Notaciones	*Propiedades*
Acciones (técnicas)	*Gráficos*	A*rgumentos*

Nota: « Tomado de enfoque Ontológico y semiótico de la cognición matemática.

Recherches en Didactique des Mathematiques» por Godino, 2002, p p 16.

3. Análisis Semiótico del contenido de un texto que registra la actividad matemática a desarrollar por los alumnos

4. Socialización de los saberes y experiencias en el aula

Resultados Esperados

Se espera que los participantes:

- Reconozcan el uso que tiene el Enfoque Ontosemiotico en el análisis de libros de textos
- Identifiquen los parámetros necesarios para el análisis de libro de texto de un concepto matemático, que propone el EOS
- Aplicar al contenido de un texto que registra la actividad matemática a desarrollar por los alumnos, la metodología del EOS denominada análisis Semiótico las componentes de la configuración epistémica
- Reflexionar y Compartir las experiencias en el aula y los saberes con los pares.

R**eflexiones Finales**

Esta particular metodología, en el marco del EOS, la cual denomina *Análisis Semiótico,* emplea la técnica de análisis de texto matemático que registra la actividad matemática desarrollada por los sujetos participantes, la cual da la posibilidad de indagar elementos que a simple vista parecen sin ninguna relación con la comprensión de los conceptos analizados, pero sin embargo, dan idea de las posibles obstáculos que afronta el alumno durante proceso de aprendizaje en Matemática y además sobre qué elementos deben ser modificados, complementados en los libros de textos para solventar las disparidades y vacíos de significación.

Por un lado, la variedad de situaciones de problematización de investigación en Educación Matemática, en que se puede aplicar y el uso del Análisis semiótico, que se generan para cada uno de los objetos matemáticos, hace que no se agoten todas las posibilidades de investigación.

REFERENCIAS

Alastre J. y Rodriguez E, (2012). *Análisis ontosemiótico de una lección sobre el concepto de la integral definida.* Trabajo de Grado Maestría interinstitucional en Matemática. UCLA-UNEXPO-UPEL. Barquisimeto.

Balcaza Bautista, T., & Contreras de la Fuente, Á., & Font Moll, V. (2017). Análisis de Libros de Texto sobre la Optimización en el Bachillerato. *Boletim de Educação Matemática, 31* (59), 1061-1081.

Font, V.; Godino, J. (2006) *La Noción de Configuración Epistémica como herramienta de análisis de Textos Matemáticos: su uso en la formación de profesores*. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 8, n. 1, p. 67-98

Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathematiques.* 22(2/3), 237 – 284.

Godino, Contreras y Font. (2006). Análisis de los Procesos de la Instrucción Basado en el Enfoque Ontológico-Semiótico de la Cognición Matemática. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 26(1), 39-88.

Rodriguez E, Valdive C. (2010) *Análisis ontosemiótico de una lección sobre el concepto de la Función Afín y Ecuación Lineal aplicada a la economía.* Trabajo de Grado Maestría interinstitucional en Matemática. UCLA-UNEXPO-UPEL. Barquisimeto

Vásquez E, Rodriguez E (2016). *Configuración Epistémica de una lección sobre Multiplicación* Memorias de la X Jornada Centroccidental de Educación Matemática *2015 (p.183)*

Volver al índice de autores

Eje temático 5

Las TIC y Robótica Educativa en la enseñanza y aprendizaje de la Matemática

5. EJE TEMÁTICO: LAS TIC Y ROBÓTICA EDUCATIVA EN LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA

5.1. Conferencias

5.1.1 Robótica educativa y pensamiento computacional (Conferencia plenaria de clausura)

Dra. Ana Lourdes Acuña Zúñiga
Fundación Omar Dengo, Costa Rica

Resumen

La presencia de nuevas tecnologías en el aula presume el diseño y práctica de ambientes de aprendizaje interdisciplinarios donde los estudiantes adquieren habilidades para estructurar investigaciones y resolver problemas concretos, así como capacidades para adquirir nuevos conceptos y para dar respuesta eficiente a los entornos cambiantes del mundo actual. La Robótica Educativa como recurso de aprendizaje y la promoción de habilidades de Pensamiento Computacional constituyen una oportunidad para abrir espacios estratégicos de aprendizaje, donde los jóvenes de hoy se formen para las necesidades y retos del mañana; para que tomen el liderazgo y el control de su propio proceso y lo hagan de forma exitosa y responsable con su contexto, su persona y su país.

Introducción

En este artículo compartiré la experiencia personal que la vida y el trabajo me han permitido experimentar en tres décadas trascendentales para la educación y su transformación paulatina y crucial, marcada por el ingreso de la tecnología en los salones de clase.

Las computadoras, las tecnologías digitales más y menos portátiles, la robótica y la Internet son ahora los recursos de apoyo por excelencia para concretar la oferta curricular pero también se consideran palancas para pensar, crear, fortalecer y desarrollar habilidades,

capacidades, actitudes y patrones de pensamiento distintos a los que teníamos las personas y especialmente los jóvenes en los años 80.

Hoy a las puertas del 2020 de la era digital y 4° revolución industrial, ser educador y tener acceso a las tecnologías digitales presume el diseño intencional y práctica constante de ambientes de aprendizaje interdisciplinarios, donde los estudiantes integran tecnología y adquieren habilidades para estructurar investigaciones, resolver problemas, dar respuestas eficientes en entornos cambiantes, trabajar en colaboración, y crear productos con propósito y ambientalmente responsables con el entorno.

Conocí a Seymour Papert y a Mitchel Resnick del MIT personalmente en 1992, y sus libros un poco antes, los cuales marcaron y transformaron mis visiones del aprendizaje, la educación y la tecnología y siguen siendo mis referentes. Recuerdo particularmente los desafíos que nos proponían en las capacitaciones y encuentros que recibimos en Robótica Educativa "Cibernetica", indicando la necesidad de crear herramientas y ambientes que permitieran a los estudiantes participar en la construcción, la invención y la experimentación "los docentes deben diseñar cosas que les permita a los estudiantes diseñar cosas".

Papert presenta en su libro la *Maquina de los niños,* la necesidad de crear una materia "la Cibernetica" capaz de abrir nuevos dominios intelectuales que utiliza estrategias de razonamiento de alto nivel para los estudiantes "la Cibernética pone una combinación de apropiabilidad y riqueza de conexiones científicas… y mantiene una relación estrecha con otra moderna área del conocimiento normalmente conocida como "teoría de sistemas" que a su vez, está íntimamente relacionada con maneras de pensar muy importantes… del mismo tipo de pensamiento que llevó de la programación a la comprensión de un atasco de tráfico y que puede aplicarse con la misma facilidad a situaciones con otros tipos de objetos … " (Seymour, 1995) p. 216.

Lo que Papert en los 90 exponía en su propuesta Construccionista para el aprendizaje apoyado en los ordenadores y dispositivos digitales de la época es lo que ha resurgido a principios del nuevo siglo como "Computational Thinking" o "Pensamiento Computacional" en sus siglas PC. Jeannette Wing, en una columna publicada en Communications of the ACM, en marzo del 2006, dice: "El pensamiento computacional

implica resolver problemas, diseñar sistemas y comprender el comportamiento humano, basándose en los conceptos fundamentales de las ciencias de la computación. El pensamiento computacional incluye una gama de herramientas mentales que reflejan la amplitud del campo de la informática". Para Wing, el pensamiento computacional "representa actitudes y habilidades universalmente aplicables para todos, por lo que no solo los informáticos podrían estar interesados en aprender y usar" (Wing J. M., 2006)

Ambos planteamientos son similares en la búsqueda de saberes que nos permitan comprender la influencia que tiene la tecnología en los procesos de aprendizaje en las personas. Sin embargo, la principal diferencia que he identificado de estos enfoques es que, en los 90 se apostaba a que el aprendizaje con computadoras daba opciones de representación del mundo que facilitaban su comprensión desde edades tempranas y posibilitaba opciones de construcción, simulación y creación tecnológica que influía significativamente en sus formas de pensar, representar, hacer y resolver.

Los planteamientos del 2006 en PC amplían estas premisas y agregan un factor nuevo que no se anticipó, el cual es hacer consciente en el aprendiz, ese poder de pensamiento que se adquiere y se fortalece con el uso intensivo a largo plazo de la tecnología y el reconocimiento propio del poder y los límites que como personas tenemos ante las máquinas. Por ejemplo: al programar un robot o una computadora se es capaz de reconocer el poder y los límites de los procesos informáticos en comparación con los que puede ejecutar un humano. En los sistemas de diseño con métodos y modelos es posible anticipar situaciones y resolver problemas que los individuos no podrían detectar a simple vista.

Robótica Educativa

En la década de los 90, inspirados en las premisas de pensamiento de Seymour Papert (1928-2016) del MIT y la visión educativa de vanguardia de los directivos de la Fundación Omar Dengo en Costa Rica, dimos inicio al proyecto de Robótica y Aprendizaje por Diseño dentro del marco de ejecución del Programa Nacional de Informática Educativa MEP - FOD.

Iniciamos en escuelas y colegios públicos, en horarios extraescolares, gestionando ambientes de aprendizaje basados en proyectos que permitían la creación de simulaciones y prototipos de solución, programados directamente por los estudiantes usando la robótica.

En el marco de esa experiencia concebimos la robótica educativa como un contexto de aprendizaje que promueve un conjunto de desempeños y habilidades directamente vinculados a la creatividad, el diseño, la construcción, la programación y divulgación de creaciones propias primero mentales y luego físicas, construidas con diferentes materiales y recursos tecnológicos; que pueden ser programados y controlados desde un computador o dispositivo móvil.

Estas creaciones robóticas, poseen cuerpo, control y razonamiento y regularmente surgen a partir de referentes reales o imaginarios llamados simulaciones o prototipos. En una simulación es posible encontrar un proceso industrial automatizado o la recreación de un sitio, en el que se muestra la apariencia de las máquinas, las formas de movimiento o de interactuar con el ambiente, los productos que surgen y la recreación del transporte y su comercialización. Otros diseños pueden corresponder a prototipos como, por ejemplo, un producto que resuelve un problema particular del hogar o la comunidad o que realiza un conjunto de tareas en un tiempo o espacio determinado. Igualmente, las producciones de los estudiantes podrían integrar ambas: prototipos y simulaciones (Acuña, 2012).

El trabajo constante y continuo durante estas dos décadas, nos ha permitido confirmar que las visiones de Papert sobre las construcciones mentales que hacen los estudiantes, son posibles de concretar en elaboraciones o representaciones reales en el aula, es decir en contextos de aprendizaje que integren conocimiento y habilidades de pensamiento complejos, que requieren la aplicación de conceptos provenientes de múltiples disciplinas y que son fundamentales en el quehacer científico y tecnológico avanzado que la sociedad está requiriendo hoy en día.

Los espacios de aprendizaje tanto en el Programa de Informática Educativa MEP –FOD como en el proyecto de Robótica y Aprendizaje por Diseño promovidos por la FOD y el Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, continúan disponiendo contextos de aprendizaje que fomentan el desarrollo de habilidades como la creatividad, el diseño, la construcción, la programación, la colaboración, la resolución de problemas, el análisis crítico, entre otras. También buscan promover aprendizajes muy prácticos, donde los grupos de estudiantes generen ideas que representen soluciones a problemas de la sociedad.

Así, gran parte de las acciones que los estudiantes realizan en los clubes de robótica y laboratorios de Informática Educativa, se fundamentan en procesos vinculados al diseño tecnológico y a la realización de proyectos contextualizados en aspectos sociales y

culturales de sus comunidades. Estos son los recursos que han dado sentido para investigar sus entornos y las problemáticas que les rodean y les ha permitido conocer los avances y el desarrollo tecnológico e informático moderno, necesarios para un país como Costa Rica que apuesta en su modelo educativo como llave hacia la equidad de oportunidades para toda su población.

Pensamiento Computacional:

Tal y como mencioné al inicio, en la última década ha resurgido un movimiento, de científicos, analistas cognoscitivos, institutos y universidades poniendo en circulación el término "Computational thinking" o Pensamiento Computacional PC popularizado por la profesora de Computer Science Department Carnegie Mellon University, Jeannette Wing quien expone que PC es el "proceso de pensamiento involucrado en la formulación de problemas y sus soluciones, en el cual las soluciones están representadas de una forma que puede llevarse a cabo de manera efectiva por un agente de procesamiento de información. Y que el "pensamiento computacional" es una forma de pensar que no es sólo para programadores. (Wing J. M., 2006) (Wing J. M., 2008)

La universidad de Carnegie Mellon University en Pittsburgh tiene un Centro para el Pensamiento Computacional cuya actividad principal es realizar exploraciones PROBEs (Exploración orientada a problemas) o PROBlem. Los PROBEs son experimentos que desarrollan y aplican nuevos conceptos de computación a problemas para mostrar el valor del pensamiento computacional para mejorar nuestro mundo. También se exploran nuevos conceptos educativos para enseñar PC. Y cuando se reúne la colaboración entre un científico informático y un experto en el campo lo denominan SONDA. PROBEs busca soluciones de amplia aplicación para problemas de dominio en lugar de soluciones especializadas o tecnologías comercializables. (University, 2010 -2011)

En síntesis, el pensamiento computacional consiste en la resolución de problemas, el diseño de los sistemas, y la comprensión de la conducta humana haciendo uso de los conceptos fundamentales de la informática. También "Incluye una amplia gama de herramientas mentales y conceptos de ciencias de la computación que ayudan a las personas a resolver problemas, sistemas de diseño, entender el comportamiento humano, y cómo se dedican las computadoras a ayudar en la automatización de una amplia gama de procesos intelectuales (National Research Council, 2011).

Algunas premisas fundamentales que los expositores del Pensamiento Computacional expresan y promueven constantemente son:

- El pensamiento computacional tiene que ser una parte fundamental de la forma en que las personas piensan y entienden el mundo.

- El pensamiento computacional significa crear y hacer uso de diferentes niveles de abstracción, para comprender y resolver problemas de manera más efectiva.

- El pensamiento computacional significa pensar algorítmicamente y con la capacidad de aplicar conceptos matemáticos, como la inducción, para desarrollar soluciones más eficientes, justas y seguras.

- El pensamiento computacional significa comprender las consecuencias de la escala, no solo por razones de eficiencia sino también por razones económicas y sociales. (University, 2010 -2011)

De forma complementaria la Sociedad Internacional para las Tecnologías en Educación (ISTE por sus siglas en inglés) y la Asociación de Maestros de Ciencia de la Computación (CSTA por su sigla en inglés), proponen al Pensamiento Computacional como un "Proceso de solución de problemas que incluye, entre otros: analizar problemas, organizar y representar datos de manera lógica, automatizar soluciones mediante pensamiento algorítmico, usar abstracciones y modelos, comunicar procesos y resultados, reconocer patrones, y, generalizar y transferir." (ISTE, 2011). Es importante indicar que no reemplaza el énfasis en creatividad, razonamiento o pensamiento crítico pero si refuerza esas habilidades al tiempo que exalta formas de organizar el problema de manera que el computador pueda ayudar." (ISTE, 2011).

Particularmente en el campo educativo CSTA e ISTE desarrollaron un modelo que identifica los conceptos y capacidades centrales del Pensamiento Computacional y proporciona ejemplos de cómo podrían estar integrados en actividades en múltiples disciplinas, que se resume en el siguiente cuadro:

Tabla 2: Modelo Pensamiento Computacional a través del Currículo (CSTA) (ISTE C. &., 2009)

Concepto o Capacidad de PC	Ciencias computación	Matemáticas	Ciencia	Estudios Sociales	Artes del lenguaje
Recopilación de datos	Encuentra una fuente de datos para un área problema	Encuentra una fuente de datos para un área problema, por ejemplo, lanzamiento de monedas o de dados	Recoge datos de un experimento	Estudia estadísticas alguna de batalla o datos de población	Realiza análisis lingüístico de frases.
Análisis de los datos	Escribe un programa para realizar cálculos estadísticos básicos en un conjunto de datos	cuenta ocurrencias de lanzamientos de monedas y de dados y analiza los resultados	analiza datos de un experimento	Identifica tendencias en datos de estadísticas	identifica patrones para diferentes tipos de oraciones
Representación de datos	usa estructuras de datos como arreglos, listas enlazadas, pilas, colas, gráficos, tablas de dispersión, etc.	usa histogramas, gráficos pastel, gráficos de barras, para representar datos; utiliza conjuntos, listas, gráficos, etc. para almacenar datos	resume datos de un experimento	resume y representa tendencias	representa patrones de diferentes tipos de oraciones
Descomposi-ción del problema	define objetos y métodos; define procedimien-tos principales y funciones	aplica orden de operaciones en una expresión	realiza una clasificación de especies		escribe un esquema
Abstracción	usa procedimientos para encapsular un conjunto de	usa variables en álgebra; identifica hechos esenciales en un	construye un modelo de una entidad física	resume los hechos; deduce conclusiones	uso de símil y metáfora; escribe una historia con

	comandos repetidos a menudo que realizan una función; usa condicionales, bucles, recursividad, etc	problema; estudia funciones en álgebra, comparadas a funciones en programación; usa la iteración para resolver problemas		de los hechos	bifurcaciones
Algoritmos y procedimientos	estudia algoritmos clásicos; implementa un algoritmo para un área problema	realiza la división larga, factorización; realiza acarreos en suma o resta	realiza un procedimiento experimental		escribe instrucciones
Paralelismo	Utiliza hilos, segmentación, divide datos o tareas de forma que sean procesados en paralelo	resuelve sistemas lineales; realiza multiplicación de matrices	Correr simultáneamente experimentos con diferente parámetros		
Simulación	Animación de algoritmos, barrido de parámetros	grafica una función en un plano cartesiano y modifica valores de las variables	Simula el movimiento del sistema solar	juega Age of Empires, Oregon Trail	logra la recreación de una historia

Adaptado de: CSTA & ISTE (2009). Computational thinking across the curriculum. Recuperado de https://c.ymcdn.com/sites/www.csteachers.org/resource/resmgr/CTExamplesTable.pdf

Complementan estos planteamientos un conjunto de habilidades y actitudes que se han venido identificando por estos grupos de estudio y que cito a continuación.

Habilidades (ISTE):

- Formular problemas de manera que permitan usar computadores y otras herramientas para solucionarlos.
- Organizar datos de manera lógica y analizarlos
- Representar datos mediante abstracciones, como modelos y simulaciones
- Automatizar soluciones mediante pensamiento algorítmico (una serie de pasos ordenados)
- Identificar, analizar e implementar posibles soluciones con el objeto de encontrar la combinación de pasos y recursos más eficiente y efectiva
- Generalizar y transferir ese proceso de solución de problemas a una gran diversidad de estos

Actitudes (ISTE):

- Confianza en el manejo de la complejidad
- Persistencia al trabajar con problemas difíciles
- Tolerancia a la ambigüedad
- Habilidad para lidiar con problemas no estructurados (open-ended)
- Habilidad para comunicarse y trabajar con otros para alcanzar una meta o solución común. (ISTE, 2012)

Conjunción de Robótica Educativa y Pensamiento Computacional

Durante estos tres últimos años he tenido ocasión de participar en varios equipos de diseño pedagógico creando propuestas educativas que integran la Robótica Educativa y el Pensamiento Computacional. Las propuestas se diseñaron para grupos poblacionales de estudiantes menores de 6 años y adolescentes entre los 13 y 15 años. Pensar para esos extremos ha sido un desafío profesional y un oasis de conocimiento que conjugo a continuación, intentando atender los fundamentos teóricos y la experiencia de diseño e implementación que experimente en este periodo.

Tal y como lo expresaba al inicio de este artículo el Construccionismo de Seymout Papert sustentó desde sus inicios la inspiraciones, teorías y tecnologías que se gestaron en el MIT y posteriormente se concretaron como recursos de aprendizaje y metodologías para hacer

Robótica Educativa o Informática Educativa en las aulas o para pensar la "Cibernética" como una materia curricular. De la misma raíz[i] surge el Pensamiento Computación, agregando atención a los conceptos, las capacidades, habilidades y prácticas computacionales que ahora son posibles de identificar y vincular con patrones de pensamiento y destrezas que se desarrollan a partir del uso de tecnología. Destacan en este planteamiento **la abstracción** como formulación de problemas; **automatización** como expresión de las soluciones y **análisis** como la ejecución y evaluación de la solución.

En los siguientes textos presentaré un ejercicio comparativo de esos conceptos, capacidades y prácticas que he confirmado y observado de nuestra experiencia en los docentes y en los estudiantes que han participado en nuestras propuestas. Queda pendiente el desafío de ejecutar una investigación formal en campo que confirme las relaciones que me atrevo a citar aquí.

Abstracción

La abstracción se vincula directamente con el planteamiento de problemas y el ejercicio de aislamiento de los elementos esenciales que son posibles de distinguir en el problema y en su planteamiento. Se trata entonces de la capacidad para aislar los elementos de su contexto o del resto de los elementos que lo acompañan. Por ejemplo: ante el reto de diseñar un robot que sea capaz de ubicarse en el espacio y definir una ruta para encontrar la salida en un laberinto, quien plantea el problema y también quien lo va a diseñar responderían a la pregunta ¿Qué tiene que hacer el robot? Ese ejercicio de pensamiento no solo activa conocimientos y procedimientos tecnológicos, sino que recurre con frecuencia a movilizar competencias de las áreas lógico matemática, estadística, comunicación integral, personal social, y computacional. Se trata entonces de activar el pensamiento computacional para comprender y resolver el problema de manera más efectiva.

Un nivel de abstracción menos explorado es el asociado al acto mismo de programar o comprender el funcionamiento de las máquinas o equipos digitales. Distinguir, por ejemplo: la memoria y capacidad de procesamiento o identificar las capas de operación que intervienen en un computador mientras corre un programa. Saber sobre el poder de la programación y los niveles de control que se pueden asumir desde los lenguajes de bajo nivel y su diferencia con un IDE o en la capacidad de interacción y procesamiento que se puede lograr con un robot cuando se toma el control de los datos y se conoce su capacidad

de decisión o comportamiento. Estos actos de abstracción computacional también resultan fundamentales de aprender y cultivar en los jóvenes de hoy.

Paralelamente a estos actos consientes de abstracción se une la capacidad de identificar los elementos esenciales de un conjunto, se trata de la capacidad para dividir y separar las partes del todo o el todo en sus partes llamado desde el PC, descomposición.

Descomposición

Se trata entonces de definir los objetos, lo métodos y procedimientos principales que serán necesarios para orientar las posibles soluciones. Una acción fundamental es la elección de los elementos y sus contribuciones en el sistema de representación que se defina. Por ejemplo, a edades tempranas la capacidad de reconocer y clasificar objetos o figuras geométricas, o en los sistemas robóticos eligiendo las piezas y operadores que van a necesitar en sus construcciones y las estructuras de programación que permitirán el control. A nivel procedimental, el funcionamiento y la utilidad de las ruedas, los ejes, los actuadores y los sensores, también se activan nociones básicas sobre peso, fuerza, estabilidad. En ese ejercicio de orden y desorden es donde se ubican las rutas de solución y se observan los niveles de abstracción alcanzados.

Automatización

La automatización es la capacidad de expresión de las soluciones. Por ejemplo, según Wing (2012) "cuando una persona está creando un modelo matemático que abstrae de un fenómeno del mundo físico, y luego lo puede expresar de forma que una computadora -humano o máquina-puede llevar a cabo, se llama automatización. Ese llevar a cabo implica, analizar la abstracción, hacer manipulaciones de esas abstracciones y, automatizar la abstracción, que en seguida dice más sobre el fenómeno del mundo físico que estaba modelando" (Wing J. , 2012). Automatización implica entonces, escribir programas de código que un computador interpreta o compila para ejecutar una función que amplía el nivel de comprensión que se tiene. Esos programas de código requieren la escritura de algoritmos y la concreción de procedimientos que resulta como una habilidad esencial.

Algoritmos y procedimientos

Siempre bajo la premisa de resolución de problemas, la habilidad de crear algoritmos y procedimientos implica desarrollar conjuntos de instrucciones o reglas que si se siguen con precisión ya sea por una persona o un ordenador que conducen a representaciones digitales o simulaciones. Por ejemplo, en robótica educativa el control de los sistemas robóticos programados, requiere establecer los conceptos de secuencia, selección e iteración y **paralelismo,** así como la formulación de condiciones e interacciones con el ambiente que se programan aprovechando la capacidad sensorial de los dispositivos. Por ejemplo: identificar cómo funciona un sensor, permitirá entender cómo operan en la realidad.

De igual manera las simulaciones**,** especialmente en robótica, son formas de representar lo que las personas piensan y entienden el mundo y se convierten en desafíos de programación y construcción con grados de dificultad importantes al intentar construir y programar diversos modelos o prototipos funcionales y representativos de las realidades circundantes. Por ejemplo, para la creación de un robot en domótica, que simula limpiar el piso, se necesitará saber cuáles mecanismos estarán activados y en qué momento, para que de esta forma el prototipo se conduzca con precisión y de acuerdo a lo planificado.

En síntesis, la capacidad de pensamiento computacional al crear algoritmos y procedimientos para desarrollar soluciones más eficientes, justas y seguras se considera la puerta de entrada a la ciencia de la computación y una capacidad por desarrollar que se apoya fundamentalmente con recursos tecnológicos digitales, pero no necesariamente vinculada con personas del campo de la computación. No quisiera omitir, que esta capacidad se le acompaña del ejercicio **evaluativo** e intencionado para garantizar que esa solución algorítmica es buena y apta para el propósito esperado.

Análisis

Analizar implica mejorar la calidad del pensamiento sobre un tema, contenido o problema con el fin de apoderarse de las estructuras inherentes a ese acto de pensar y someterlas a estándares intelectuales. Se activa con procesos de identificación de las situaciones por resolver, requiere de la captura o recopilación, organizanización, y representación de datos de manera lógica, con el fin de reconocer comportamientos y tendencias que permitirán eventualmente hacer generalizaciones y transferencias. Por ejemplo, en Robótica Educativa los elementos físicos de entrada y **recopilación de los datos** son los sensores,

pero para activar estos elementos es requisito programarlos con el fin de que capturen la información y se activen funciones ya sea para que se guarde en memoria o se use en efectos inmediatos. A partir de la programación de los sensores los niños y niñas pueden tomar datos, almacenarlos e interpretarlos para luego extraer conclusiones sobre el comportamiento de ciertos mecanismos o para identificar relaciones entre las variables involucradas. Por ejemplo, ellos a partir del **análisis** puede predecir la velocidad con que se mueve un objeto, si colocan un sensor de rotación que mide la cantidad de vueltas dadas en un tiempo determinado y compararlo con la distancia recorrida y la velocidad de desplazamiento. De igual manera podrían activar formas de **representación de esos datos** por medio de gráficos, cuadros u otros recursos.

En síntesis, la capacidad analítica desde el PC y también en la robótica se ve reflejada al hacer mediciones, estimaciones, clasificaciones, relaciones espaciales, seguimiento de secuencias, registro de datos, creaciones de gráficos y su correspondiente análisis, que le permitirá al individuo generalizar ideas y compartir lo aprendido en otros contextos en los que se puede aprovechar. Por ejemplo: estructurar procesos y ordenarlos, podría reflejarse en la manera en que se hacen las tareas cotidianas para conseguir que sean más eficientes y efectivas.

Conclusión

La Robótica Educativa y el Pensamiento Computacional constituyen una oportunidad para abrir espacios estratégicos de aprendizaje, en los cuales los niños, niñas y jóvenes desde sus contextos educativos y cotidianos encuentran espacios para fortalecer sus estrategias de pensamiento y capacidades en la resolución de problemas, integrando las tecnologías digitales, sus capacidades y prácticas como pensadores computacionales.

La presencia de nuevas tecnologías en el aula presume el diseño y práctica de ambientes de aprendizaje interdisciplinarios donde los estudiantes adquieren habilidades para estructurar investigaciones y resolver problemas concretos, así como capacidades para adquirir nuevos conceptos y para dar respuesta eficiente a los entornos cambiantes del mundo actual.

Quienes participan en propuestas educativas que se rigen por las premisas constructivistas muestran un alto nivel de motivación para crear y aprender, así como, mayor disposición para trabajar con otros y colaborar. También reconocen el poder y los límites de las

máquinas y la amplia gama de posibilidades que se abren para resolver los problemas que no nos atreveríamos a asumir antes de la era de la informática.

Creo que el conocimiento se valora por su beneficio en la vida de las personas, por ser compartible con los demás si se acerca al estilo personal de cada uno. Se necesita tiempo para que las ideas se desarrollen e incorporen en el conjunto de saberes y para que se posibilite el uso con fluidez de una nueva tecnología o para llegar a pensar en la posibilidad de hacer algo que nunca antes se había hecho, por lo tanto, el iniciar estas experiencias en edades tempranas es fundamental.

Los jóvenes de los 90, son los ingenieros que hoy están cambiando el mundo con nuevas ideas, nuevos desarrollos informáticos y grandes proyectos tecnológicos. También son los líderes y seguidores de movimientos – tipo maker- que buscan crear sus propios productos: reparan, reciclan tecnología y mejoran desarrollos tanto a nivel de software como de hardware, inventan sus propios trabajos y comparten lo que diseñan o hacen, para que otros lo usen y los mejoren.

Estos movimientos están impulsando el regreso a la fabricación personalizada, al desarrollo de productos únicos de consumo sostenible. Igualmente, están intentando incidir en la creación de un nuevo consumidor, un poco más consiente del medio que le rodea y menos promotor de los consumos masivos que se desechan cuando dejan de funcionar o pasan de moda.

Mi deseo es que las poblaciones estudiantiles tengan más oportunidades de vivir estas experiencias, porque el Pensamiento Computacional puede llegar a ser una habilidad que todos podemos fortalecer. Los países y gobiernos requieren mayores esfuerzos para invertir en educación y para disponer espacios a proyectos de esta naturaleza, que amalgaman la ciencia, la tecnología, la creatividad, la invención y la innovación. Estas acciones representan una oportunidad para abrir espacios estratégicos donde los jóvenes de hoy se formen para las necesidades y retos del mañana; para que tomen el liderazgo y el control, y que lo hagan de forma exitosa y responsable con su contexto y su país.

Referencias

Acuña, A. L. (noviembre de 2012). Diseño y Administración de Proyectos de Robótica Educativa: Lecciones Aprendidas. (Redalyc, Ed.) *Teoría de la Educación.*

Educación y Cultura en la Sociedad de la Información, 13(3), 6-27. Recuperado el 2 de mayo de 2018, de http://www.fod.ac.cr/robotica/images/cursos/articulos/disenoyadministracion.pdf

ISTE. (2011). *Computational thinking: teacher resources.* Obtenido de http://www.iste.org/docs/ct-documents/ct-teacher-resources_2ed-pdf.pdf?sfvrsn=2

ISTE. (2012). *Eduteka*. Obtenido de Definición Operativa de Pensamiento Computacional para Educación Básica y Media (K-12). : http://www.eduteka.org/pdfdir/PensamientoComputacional_Definicion.pdf

ISTE, C. &. (2009). *Computational thinking across the curriculum.* Obtenido de https://c.ymcdn.com/sites/www.csteachers.org/resource/resmgr/CTExamplesTable.pdf

National Research Council. (2011). *Successful K-12 STEM Education.* National Research Council. 2011. Successful K-12 STEM Education: Identifying Effective Approaches in Science, Technology, Engineering, and Mathematics. The National Academies Press. https:/, Division of Behavioral and Social Sciences and Education; Board on Science Education; Board on Testing and Assessment; Committee on Highly Successful Schools or Programs for K-12 STEM Education. Washington, DC:: Sciences., National Academy of. doi:doi.org/10.17226/13158.

Seymour, P. (1995). *La maquina de los niños. Replantearse la Educación en la de los ordenadores.* Bacelona España, Buenos Aires- México: Ediciones Paidós.

University, C. M. (2010 -2011). *Probes* . Obtenido de Research PROBEs: http://www.cs.cmu.edu/~CompThink/probes.html

Wikipedia. (2 de julio de 2018). *Computational thinking*. Obtenido de Computational thinking: https://en.wikipedia.org/wiki/Computational_thinking#cite_note-3

Wing, J. (26 de October de 2012). *Computational Thinking.* Microsoft Asia Faculty Summit. Obtenido de https://www.microsoft.com/en-us/research/wp-content/uploads/2012/08/Jeannette_Wing.pdf

Wing, J. M. (march de 2006). Computational Thinking. *COMMUNICATIONS OF THE ACM, 49*(3), 33-35. Recuperado el 2 de mayo de 2018, de https://www.cs.cmu.edu/~15110-s13/Wing06-ct.pdf : https://www.cs.cmu.edu/~15110-s13/Wing06-ct.pdf

Wing, J. M. (31 de july de 2008). Computational thinking and thinking. (C. M. Science, Ed.) *Philosophical Transactions of the royal society A*, 3721-3725. doi:10.1098/rsta.2008.0118 en https://www.cs.cmu.edu/~wing/publications/Wing08a.pdf

Volver al índice de autores

5.1.2 Las teorías APOS y construccionismo en el análisis de la comprensión del concepto de fracción (Conferencia especial)

Dr. Cerapio Quintanilla, Universidad Nacional de Huancavelica, Perú
Adriana Dora Gewerc Barujel y Fernado Varela, Universidad Santiago de Compostela, España

Resumen

El presente trabajo tiene como finalidad combinar dos teorías: el Construccionismo y APOS, para el análisis de la comprensión del concepto de fracción en niños del quinto grado de educación primaria. Para la construcción y comprensión del concepto de fracción de los estudiantes, se caracterizó sus esquemas en términos de niveles (Intra, Inter y Trans). La metodología aplicada consistió en un estudio de casos con una población de 25 niños quienes desarrollaron actividades utilizando un lenguaje de programación orientado a objetos denominado Etoys en un entorno construccionista. Los resultados muestran que un alto porcentaje de niños/as lograron comprender el concepto de fracción y alcanzaron el nivel de proceso y esquema de acuerdo a la descomposición genética propuesta

Introducción al problema y antecedentes

Siendo las matemáticas una de las ciencias que posee un grado considerable de complejidad para ser superado (Cerda Quintero, 2010), los estudiantes encuentran grandes dificultades en las zonas de transición entre ciertos intervalos numéricos (D'Amore, 2008). La nvestigación se enfoca en uno de los conceptos matemáticos más complejos como es el concepto de fracción y sus operaciones, uno de los sistemas de números introducidos en la escuela (Kafai, 1995; T. Kieren, 1976, 1980; Pirie & Kieren, 1994; Sankaran, Sampath, & Sivaswamy, 2009; Yusof & Malone, 2003).

El uso de las herramientas tecnológicas para la enseñanza de las matemáticas, tiene sus inicios en los años 80 del siglo pasado y se ha venido haciendo implementación e investigación sobre los usos adecuados de estas tecnologías digitales en el aula de clase de matemáticas; estableciendo mediante contrastación algunos usos favorables para el desarrollo de procesos de pensamiento matemático (Villagarra et al., 2012).

Fundamentación teórica

Existen investigaciones desde diferentes perspectivas respecto a las fracciones, desde las concepciones que tienen sobre el concepto de fracciones (Ríos García, 2011), propuestas didácticas para el desarrollo del concepto (Friz Carrillo, Sanhueza Henríquez, Sánchez Bravo, Belmar Mellado, & Figueroa Manzi, 2008; Wu, 1999), operaciones con las fracciones (Duzenli-Gokalp & Devi Sharma, 2010; Olive, 2001; Zapata Cardona, 2009), estudio de la dificultades al aprender el concepto de las fracciones (Mateos Ponce, 2008; Olfos Ayarza & Guzman Retamal, 2011; Ortiz Lázaro, 1994) y la estructuración e interpretación de las fracciones (T. Kieren, 1976, 1980; T. E. Kieren, 1985; Pirie & Kieren, 1994). Sin embargo, son pocas las investigaciones relacionadas al uso de las tecnologías en el proceso de la enseñanza de las matemáticas, así como en el proceso del aprendizaje del concepto de las fracciones (García López & Romero Albaladejo, 2009; Villagarra et al., 2012).

Al respecto existen dos referentes, uno de ellos lo constituyen los trabajos de Harel y Kafai, relacionados con el aprendizaje de las fracciones haciendo uso de las herramientas tecnológicas bajo la teoría del construccionismo, ambos trabajos se desarrollaron en una escuela de Boston El trabajo de Edit Harel (1991), consiste en el proyecto de instrucción y diseño de un software para enseñar las fracciones, en el que los niños asumieron el papel de profesor, para tal efecto diseñaron un software con el lenguaje de programación LOGO y posteriormente enseñaron a sus compañeros de otras secciones o grupos. En el caso de Kafai (1995), el trabajo responde a que los niños diseñen programas de juegos con el lenguaje de programación LOGO, en los que incorporen el concepto de fracción.

Las herramientas tecnológicas en el aula

Elegir una herramienta tecnológica para el desarrollo de una actividad en la enseñanza o aprendizaje de las matemáticas es muy complejo, puesto que existen desde los teléfonos personales hasta computadoras y software con diferentes aplicaciones. Para la enseñanza y aprendizaje en las matemáticas, existe una diversidad de software, desde paquetes que permiten desarrollar procesos similares a una calculadora, hasta un software dinámico como GeoGebra; así como lenguajes de programación educativos que integran diversas áreas de la matemática; entre ellas se encuentra Etoys[4].

El lenguaje de programación elegido para el presente trabajo de investigación, es Etoys, un lenguaje de programación orientado a objetos, diseñado bajo el paradigma del

[4] Lenguaje de programación diseñado por Viewpoints Research, Inc. http://www.squeakland.org/

construccionismo y filosofía del LOGO. Además, Etoys es una herramienta educacional que permite integrar diversos objetos matemáticos, logrando que los alumnos aprendan, incluso, elementos curriculares que están en un nivel superior, así como diseñar simulaciones y programas muy complejos en diversas áreas de las matemáticas, ciencias e ingeniería, convirtiendo a Etoys en un laboratorio virtual (Quintanilla Cóndor, Fraga Varela, & Gewerc Barujel, 2012).

Teorías que marcan el trabajo de investigación

El trabajo se enmarca dentro de dos teorías que sustentan su solidez; en tal sentido, el trabajo se formaliza en el construccionismo de Papert y la Teoría APOS (Action, Process, Objects and Schemas) de Ed Dubinsky bajo el marco constructivista.

1.1. El construccionismo de Papert

Según Papert y Harel (1991), la definición más simple de *construccionismo* evoca la idea de aprender haciendo y esto es lo que estaba ocurriendo cuando los estudiantes trabajaban en sus esculturas de jabón en una clase que no es matemáticas, en la que cada estudiante genera sus propias fantasías. La otra idea es la más sutil, que llama "cercanías a los objetos"; es decir, algunas personas prefieren formas de pensar que las mantienen cerca de las cosas físicas, mientras que otras usan medios abstractos y formales para distanciarse de los materiales concretos. En este contexto se construye el modelo de aprendizaje usando la teoría cognitiva de Piaget, la teoría de inteligencia artificial, la investigación sobre las diferentes facetas sociales y afectivas involucradas en las matemáticas, la computación y las ciencias de la educación (Papert, 1980; Turkle, 1984; Minsky, 1986; citado por Harel, 1991).

El construccionismo es un enfoque filosófico y una teoría de la educación que fundamenta el uso de tecnologías digitales en la educación (Badilla & Chacón, 2004); promueve que los niños construyan sus propios conocimientos en interacción con el mundo real simulando virtualmente. Asimismo, el diseño de proyectos supone un nuevo paradigma basado en actividades con ordenadores, y difiere radicalmente del uso tradicional del software computacional. Se trata de diseñar proyectos con lenguajes de programación, a partir de los cuales los niños piensan, hacen y construyen en su entorno (Harel, 1991). Por lo tanto, resulta inevitable pensar que, en la actualidad, el aprendizaje de la matemáticos, no puede basarse sólo en el lápiz y el papel; sino también podría utilizar tecnologías, a modo de herramientas o artefactos (Fraga & Gewerc, 2004), que posibiliten el aprendizaje

y que potencien la creatividad, integrando los conceptos de las matemáticas con otras áreas del conocimiento; asimismo la educación de hoy debe promover en los niños/as la creatividad, el ser proactivos, y el tener esa inquietud de aprender e investigar constantemente (Reig, 2012).

Kafai y Resnick (1996), consideran al *construccionismo* como una teoría de aprendizaje y una estrategia para la educación, la cual tiene como fundamento el constructivismo de Piaget y afirman que el conocimiento no es la simple transmisión de profesor a alumno; sino es activamente construido en la mente del aprendiz. Los niños no consiguen ideas; ellos hacen nuevas ideas. La teoría sugiere que los aprendices probablemente realicen actividades para generar nuevas teorías cuando participan activamente en la realización de algún tipo de artefacto externo que se puede reflexionar y compartir con los demás (Bouras, Poulopoulos, & Tsogkas, 2010; Papert & Harel, 1991).

Según Papert (1982), las escuelas tal como las conocemos hoy, no tendrán lugar en el futuro. Éste autor, centra especial atención en las actividades que los niños hacen con *objetos con el cual pensar* (objects-to-think-with), en un espacio totalmente diferente interactuando con los ordenadores. Si para Piaget y Papert el conocimiento se construye, entonces, la educación consiste en proveer las oportunidades para que los niños se comprometan en actividades creativas. Papert sostiene; que "el mejor aprendizaje no derivará de encontrar mejores formas de enseñar, sino de ofrecer al educando mejores oportunidades para construir" (Falbel, 1993).

1.2. La teoría APOS

La teoría APOS, consiste en una caracterización del conocimiento matemático que un alumno tiene para responder a una situación problemática en matemática; su solución en un contexto social y su construcción o reconstrucción a través de acciones, procesos y objetos, organizando a ellos dentro de un Esquema (Dubinsky & McDonald, 2001). El mecanismo de construcción de estos esquemas y la abstracción reflexiva, son el corazón de la teoría APOS; además, la abstracción reflexiva extiende la construcción de conexiones entre los conceptos abstraídos y constituye una estructura fuera de las abstracciones relacionadas (Meel, 2003).

Según Asiala et al. (1996), la comprensión de un concepto matemático comienza con la manipulación de objetos físicos o mentales previamente construidos para formar acciones.

Una ***acción*** es "cualquier manipulación repetible, física o mental, que transforma objetos (por ejemplo, números, figuras geométricas, conjuntos y otros) para obtener objetos" (Breidenbach, Dubinsky, Hawks, & Nichols, 1992, p. 249). Cuando una acción es repetida y el individuo reflexiona sobre ella, puede *interiorizar* tal acción en ***proceso***; la construcción interna permite realizar la misma acción, pero no puede ser dirigida necesariamente por estímulos externos. Conforme una acción se *interioriza* a través de una secuencia de repetición de la acción y el reflejo de la misma, la acción ya no se maneja por influencias externas, pues se vuelve una construcción interna llamada *proceso* (similar a las *operaciones de Piaget*) (Meel, 2003). El logro de esta concepción de proceso indica que el estudiante puede reflejar el proceso, describirlo e, incluso, revertir los pasos de transformación sin requerir el estímulo externo (Asiala et al., 1996).

Cuando un individuo reflexiona sobre acciones aplicadas a un proceso específico, y es consciente del proceso como un todo, percibe qué transformaciones (acciones o procesos) pueden influir en el proceso y es capaz de construir realmente tales transformaciones. En tal sentido, se dice que el individuo reconstruyó o encapsuló el proceso como un **objeto** cognitivo. Una vez encapsulado, el objeto existe en la mente del individuo y necesita la asignación de una etiqueta para el objeto (Dubinsky, Dautermann, Leron, & Zazkis, 1994). La etiqueta resultante, permite al estudiante nombrar el objeto y conectar dicho nombre con el proceso a partir del cual se construyó el objeto perseguido. Los objetos se pueden desencapsular hacia el proceso desde el cual se formaron. Finalmente, las acciones, los procesos y los objetos se pueden organizar en esquemas (Asiala et al., 1996, p. 8).

Los esquemas son estructuras de organización que incorporan acciones, procesos, objetos y otros esquemas que el estudiante invoca para resolver una situación problemática de las matemáticas (Meel, 2003, p. 244), la construcción de dichas estructuras requiere un mecanismo llamado *generalización*, el cual permite un alcance más amplio de la utilización del esquema.

Piaget & García (1982) presentan su tesis sobre la evolución de los esquemas, proponiendo tres etapas: *Intra*, *Inter* y *Trans*. Luego Julie Clark et al. (1997) retomaron el trabajo de Piaget y García para analizar los mecanismos de la triada: *Intra*, *Inter* y *Trans*. La etapa *Intra*, se caracteriza por la concentración en un solo objeto en forma aislada de otras acciones, procesos u objetos. La etapa *Inter*, se caracteriza por el conocimiento de las relaciones entre las diferentes acciones, procesos, objetos y esquemas. Consideramos que

es útil llamar preesquema a la colección que se encuentra en esta etapa de desarrollo. La etapa *Trans*, se caracteriza por la construcción de una estructura coherente que subyace a algunas relaciones descubiertas en la etapa *Inter* de desarrollo.

Otro de los componentes principales en la teoría APOS es la *descomposición genética.* Cuando se realiza un análisis de los conceptos matemáticos en el que se ponen de relieve las construcciones cognitivas que pueden ser requeridas en su aprendizaje, a este proceso se le conoce como descomposición genética del concepto (Trigueros, 2005)

Relación entre Construccionismo y APOS

1.3. El Construccionismo

a) Es un enfoque filosófico y una teoría de la educación que fundamenta el uso de tecnologías digitales en la educación.

b) Se fundamenta en las bases teóricas de Piaget, el sociocultural de Vygotsky y aprendizaje por descubrimiento de Bruner.

c) El Construccionismo aborda tres conceptos claves: objetos con el cual pensar, entidades públicas y micromundos.

d) Uso de recursos tecnológicos como ordenadores y lenguajes de programación

1.4. La teoría APOS

a) La ***descomposición genética*** es el análisis teórico de un concepto para proponer un modelo de cognición: es una descripción específica de un conjunto de constructos metales que un aprendiz tiene en la mente al desarrollar el proceso de comprensión de un concepto.

b) La comprensión de un objeto matemático se expresa a través de niveles de constructos mentales y la abstracción reflexiva (Dubinsky, 1991).

c) Uso de recursos tecnológicos como ordenadores y lenguajes de programación.

d) Caracterización de los esquemas en términos de Intra, Inter y Trans.

1.5. Aspectos comunes

Existe una estrecha relación entre ambas teorías:

a) La teoría APOS y el Construccionismo tienen como base teórica los fundamentos constructivistas de Piaget.

b) Uso de recursos tecnológicos digitales en la construcción de conocimientos en el área de las matemáticas.

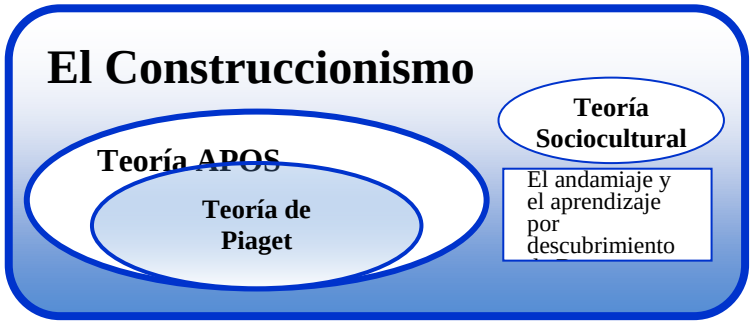


Figura 1. El Construccionismo y su relación con la teoría APOS

Para el desarrollo de la investigación, se realizó el complemento del Construccionismo, en este caso con la teoría APOS, porque al desarrollar la investigación desde el enfoque del Construccionismo se requiere evaluar los niveles comprensión alcanzados por los estudiantes, asimismo se necesita del diseño de las actividades a través de la descomposición genética. En tal sentido, fue necesario la introducción de la Teoría APOS dentro del Construccionismo.

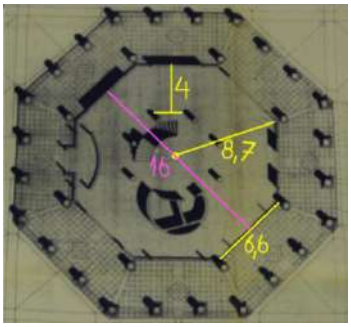
Metodología

La investigación se desarrolló mediante un estudio de caso de un grupo de estudiantes del 5to grado de primaria de una Escuela Pública de Galicia, España. Los resultados fueron analizados en dos momentos, en el primer momento se realiza un análisis global de todo el grupo de estudiantes, denominado estudio colectivo de casos; puesto que cada estudiante tiene su propio estilo de trabajo, de aprendizaje y diseño de proyectos; por lo tanto, todos forman un caso. En el segundo momento, se realizó un estudio intrínseco de casos de tres estudiantes por separado; seleccionados por su rendimiento académico a criterio del docente en la escala: deficiente, regular y bueno. Finalmente, se realizó un análisis cruzado

de los datos obtenidos (entrevistas, videos, proyectos, grabación de audios, y fotografías), con el fin de proponer algunas conclusiones.

Los estudiantes antes de desarrollar el proyecto de fracciones anteriormente ya habían trabajado con el lenguaje de programación *Etoys*, diseñando un reloj a través de un proyecto, esto ayudó en la ejecución debido a que los estudiantes ya estaban familiarizados con el uso del lenguaje de programación.

Se diseñó la *descomposición genética* sobre el concepto de fracciones que los niños/as deben desarrollar, cuyo diseño parte teniendo en cuenta el plano de la estructura de La Casa de las Ciencias de La Coruña, España. El proyecto consiste en diseñar el plano de dicho edificio utilizando el lenguaje de programación Etoys.



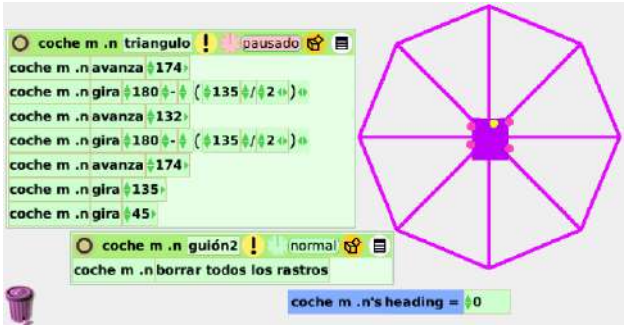


Figura 2. El plano de la Casa de las Ciencias ***Figura 3.*** División realizada con Etoys

La figura N° 2, muestra el plano con sus respectivas medidas; los estudiantes realizaron la división de diferentes maneras en sus cuadernos, luego consensuaron que la mejor división resultó ser la realizada en triángulos. Como los lados del triángulo tienen medidas en números decimales, para facilitar esta operación se multiplicó por 20 unidades, por lo que los lados del triángulo isósceles resultaron: 174 unidades los dos lados iguales y 132 unidades el tercer lado. Bajo el paradigma de la filosofía del construccionismo y la abstracción reflexiva de la teoría APOS los estudiantes emprenden el diseño del plano haciendo uso del lenguaje de programación Etoys.

Los niños/as inician en el laboratorio de informática, cada uno con sus propios ordenadores con la condición de trabajar entre dos compañeros haciendo el equipo. Los estudiantes inician la programación por ensayo error; algunos de ellos diseñaron el plano haciendo un octágono, luego intentaron dividirlos (en esta parte tuvieron dificultad); otros diseñaron triángulos, presentando también cierta dificultad. Entre pares discutieron la manera de

construir el plano; poco a poco logran construir a partir del triángulo, es decir unieron varios triángulos para dar forma al plano que se muestra en la figura N° 3, posteriormente etiquetaron los nombres respectivos de cada una de las divisiones. A partir de aquí los estudiantes desarrollaron los otros proyectos sobre adición de fracciones.

Resultados

Analizamos desde las estructuras de la teoría APOS los resultados que los niños desarrollaron en las actividades de cada uno de los proyectos.

El resultado nos muestra que 19 estudiantes de 25 en total diseñaron la redistribución del plano de las Casa de las Ciencias, quienes alcanzaron el nivel de constructo mental de *esquema* del siguiente modo:

S.1. Concibe el concepto de una fracción como la división de un objeto en varias partes iguales mediante el uso de Squeak Etoys.

S.2. Construye fracciones con el elemento triángulo (la distribución de la Casa de las Ciencias), y otras fracciones, haciendo uso de Etoys.

S.3. Concibe el concepto de una fracción como la unión de varias partes iguales para formar un objeto dividido, haciendo uso de Squeak Etoys.

S.4. Diseña y explica las diversas situaciones del contexto de la vida que involucran al concepto de fracciones.

En consecuencia, no basta decir que simplemente se alcanzó el nivel de esquema (estructura); en este nivel los niños/as conciben el concepto de una fracción no solamente como dividir, repartir en varias partes, sino también los niños/as *generalizan*, pudiendo construir un objeto dividido agrupando las partes, formar un todo y viceversa. La construcción de dichas estructuras requiere un mecanismo llamado *generalización,* el cual permite un alcance más amplio de la utilización del esquema, porque la *generalización* es la forma más simple y familiar de la abstracción reflexiva, debido a que se relaciona con la aplicación de un esquema ya existente para un nuevo conjunto de objetos (Meel, 2003).

En este nivel, los niños/as se ubican en las etapas de *Inter* y *Trans*. En la etapa *Inter*, los niños y niñas relacionan las diferentes acciones, procesos y objetos que involucran la construcción. Por ejemplo, la interrelación entre el diseño de rectas y ángulos y el diseño

del triángulo; la interrelación del proceso de construcción del triángulo con el proceso de construcción del octágono; es decir, se interrelacionan entre subesquemas. En cuanto al nivel *Trans*, los niños/as diseñaron sus proyectos llegando a una estructura coherente; no solo diseñaron y relacionaron entre subesquemas, sino que comprendieron que todo es una estructura interrelacionada; siendo este un nivel de comprensión del pensamiento matemático avanzado. A diferencia del nivel *Intra* que solamente el alumno/a centra su atención en el concepto en forma aislada.

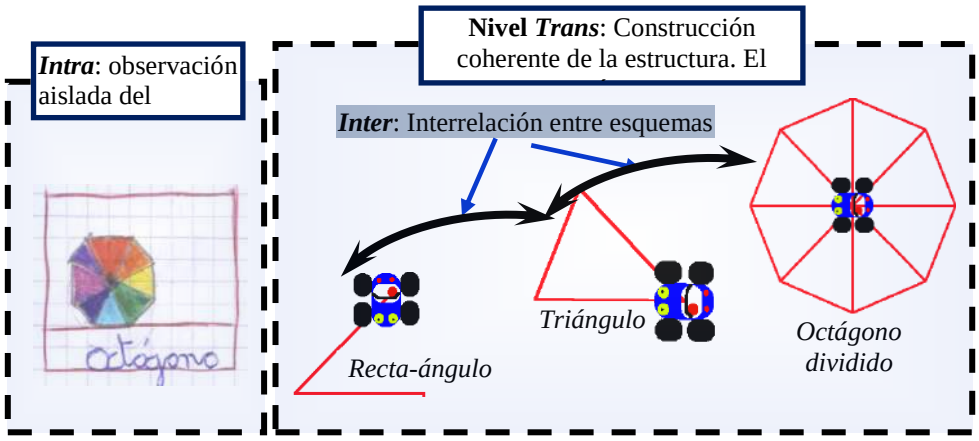


Figura 4. Los niveles Intra, Inter y Trans en la construcción del concepto de fracción.

Además, los niños/as conjugan los resultados, de tal modo que el concepto de fracción se puede construir dividiendo un objeto en partes iguales o agrupándolo en pequeñas partes, que son las fracciones para formar el objeto dividido. Para Piaget, este tipo de resultado se denomina coordinación porque está caracterizado por inferencias, implícitas o explícitas, realizados por el alumno/a (Piaget, 1990), además ellos pueden realizar ambas operaciones (dividir o agrupar) para expresar el concepto de fracción (Meel, 2003).

Conclusión

El trabajo de investigación muestra cómo el Construccionismo marca la orientación filosófica en la ejecución de los proyectos desde la óptica del uso de las tecnologías. En cambio, la teoría APOS es un complemento, porque determina los niveles de constructos mentales (acción, proceso, objeto y esquema) que los niños/as logran alcanzar al desarrollar los proyectos para concebir el concepto de fracción.

La *descomposición genética* de la teoría APOS permitió identificar los niveles de constructos mentales que los niños/as alcanzaron en el proceso de desarrollo y construcción del concepto de fracción. Y la *triada* de Piaget muestra la interrelación de los subesquemas en la construcción del concepto de fracción. En el nivel *Intra* los niños/as pudieron identificar el plano de una manera muy práctica graficando en sus cuadernos sin relacionar otros conceptos para construir el concepto, también hicieron las divisiones sin mucha dificultad. En cambio, en el nivel *Inter* los estudiantes diseñaron sus actividades al diseñar el plano haciendo uso de Etoys, al construir el triángulo con Etoys un lenguaje de programación, concatenaron otros conceptos que son objetos matemáticos base (segmento, ángulo, recta), al diseñar el ángulo aparecen conceptos como ángulos complementarios y suplementarios, ángulos construidos hacia la derecha y ángulos construidos hacia la izquierda (ángulos orientados); aquí al diseñar un ángulo los niños y niñas lograron alcanzar un nivel de subesquema, luego la interrelación con otros ángulos se construye el triángulo (otro subesquema de nivel superior). En el nivel *Trans*, los niños/as logran interrelacionar ángulos y triángulos para construir el plano, y que dicho plano está compuesto por triángulos; en este caso los niños/as alcanzan el nivel de esquema.

Los conceptos: ángulos complementarios y suplementarios, triángulos isósceles, suma de ángulos internos de un triángulo, ángulos orientados no son propios del 5to grado de primaria, los contenidos son de grados superiores; sin embargo, los niños/as construyeron sus conocimientos bajo el paradigma del construccionismo, ya que el aprendizaje forma parte de la transversalidad de los contenidos tratados para la construcción del concepto de fracción. Además, los niños/as concibieron que el todo se construye de las partes y viceversa.

Asimismo, el lenguaje de programación Etoys, como herramienta educacional dentro del paradigma del construccionismo, promueve un aprendizaje dinámico y mucho más significativo e interdisciplinario; porque los niños/as diseñan proyectos que se construyen a partir de los conceptos que se introducen integrando diversos objetos matemáticos mucho más complejos, cuyos conceptos corresponden a planes curriculares superiores

Referencias

Asiala, M., Brown, A., Devries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate

Mathematics Education. *CBMS. Issues in Mathematics Education: Research in Collegiate Mathematics Education*, *6*, 1–32.

Badilla, E., & Chacón, A. (2004). Construccionismo: Objetos con el cual pensar, entidades públicas y micromundos. *Revista Actualidades Investigativas en Educación*, *4*(1), 1–12.

Bouras, C., Poulopoulos, V., & Tsogkas, V. (2010). Squeak Etoys: Interactive and Collaborative Learning Environments. En Management Association, USA, I (Ed.), *Gaming and Simulations: Concept, Methodologies, Tools and Applications* (Vol. 3, pp. 898–909). IGI Global. Recuperado a partir de http://www.igi-global.com/chapter/gaming-simulations-concepts-methodologies-tools/49425

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J., & Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics*, *23*(3), 247–285. https://doi.org/10.1007/BF02309532

Cerda Quintero, J. (2010). *Hacia un programa de autorregulación del pensamiento lógico-formal en el aprendizaje de las matemáticas* (Doctoral Thesis). Universidad de Valladolid, Valladolid. Recuperado a partir de http://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=21619

Clark, J. M., Cordero, F., Cottrill, J., Czarnocha, B., DeVries, D. J., St. John, D., … Vidakovic, D. (1997). Constructing a schema: The case of the chain rule. *Journal of Mathematical Behavior*, *16*(4), 345–364. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(97)90012-2

D'Amore, B. (2008). Epistemología, didáctica de la matemática y prácticas de enseñanza. *Enseñanza de la matematica. Revista de la ASOVEMAT (Asociación Venezolana de Educación Matemática)*, *17*(1), 87–106.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95–123). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E., Dautermann, J., Leron, U., & Zazkis, R. (1994). On Learning Fundamental Concepts of Group Theory. *Educational Studies in Mathematics*, *27*, 267–305.

Dubinsky, E., & McDonald, M. A. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. En D. Holton (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (pp. 283–280). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Duzenli-Gokalp, N., & Devi Sharma, M. D. (2010). A study on addition and subtraction of fractions: The use of Pirie and Kieren model and hands-on activities. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, *2*(2), 5168–5171. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2010.03.840

Falbel, A. (1993). Construccionismo. Enlaces 2001. Abriendo las Fronteras del Aula. Recuperado a partir de http://llk.media.mit.edu/projects/panama/lecturas/Falbel-Const.pdf

Fraga, F., & Gewerc, A. (2004). Una experiencia interdisciplinar en Ed. Primaria mediante el uso de Squeak. *Innovación educativa, Universidad de Santiago de Compostela*, (15), 1–20.

Friz Carrillo, M., Sanhueza Henríquez, S., Sánchez Bravo, A., Belmar Mellado, M., & Figueroa Manzi, E. (2008). Propuestas didácticas para el desarrollo de competencias matemáticas en fracciones. *Horizontes Educacionales, Universidad de Bío Bío*, *13*(2), 87–98.

García López, M. del M., & Romero Albaladejo, I. M. (2009). Influencia de las Nuevas Tecnologías en la Evolución del Aprendizaje y las Actitudes Matemáticas de Estudiantes de Secundaria. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, *7*(1), 369–396.

Harel, I. (1991). *Children designers: interdisciplinary constructions for learning and knowing mathematics in a computer-rich school*. The Media Laboratory Massachusetts of Technology. New Jersey: Ablex Publishing.

Kafai, Y. B. (1995). *Minds in Play: Computer Game Design As A Context for Children's Learning*. New Jersy: LAWRENCE ERLBAUM ASSOCIATES, PUBLISHERS.

Kafai, Y. B., & Resnick, M. (1996). *Constructionism in Practice: Designing, Thinking, and Learning in A Digital World*. New Jersy: Lawrence Erlbaum Asociates, Publishers.

Kieren, T. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. *Number and Measurement. Papers from a Research Workshop*, 101–144.

Kieren, T. (1980). The rational numbers construct: Its elements and mechanisms. *Recent Research on Number Learning.*, 128–152.

Kieren, T. E. (1985). Five faces of mathematical knowledge building. Dept of Secondary Education, University of Alberta. Recuperado a partir de http://www2.education.ualberta.ca/educ/sec/docs/Occasional%20Paper%20No.%2020-Kieren.pdf

Mateos Ponce, T. G. (2008). Una aproximación a las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. Un punto de vista psicogenético. *Ethos Educativo*, *41*, 193–208.

Meel, D. E. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la Teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *6*(003), 221–278.

Olfos Ayarza, R. A., & Guzman Retamal, I. (2011). Dificultades en el aprendizaje de las fracciones y el conocimiento del profesor. En *ACTAS DE XIII CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA* (pp. 1–11). Recife, Brasil: XIII CIAEM-IACME. Recuperado a partir de http://cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/view/2391/326

Olive, J. (2001). Children's number sequences: An explanation of Steffe's constructs and an extrapolation to rational numbers of arithmetic. *The Mathematics Educator*, *11*(1), 4–9.

Ortiz Lázaro, I. (1994). El papel del profesor tutor ante las dificultades de aprendizaje escolar: propuesta de intervención. *ENSAYOS. Revistas de la Escuela Universitaria de Magisterio de Albacete*, (9), 143–157.

Papert, S. (1982). *Desafío a la mente: computadoras y educación*. (L. Espinoza de Matheu, Trad.) (2da ed.). Buennos Aires: Galápagos.

Papert, S., & Harel, I. (1991). Situating Constructionism. En I. Harel (Ed.), *Construccionism* (pp. 1–11). Massachusetts Institute of Technology. Epistemology & Learning Research Group: Ablex Publishing Corporation. Recuperado a partir de http://www.papert.org/articles/SituatingConstructionism.html

Piaget, J. (1990). *La equilibración de las estructuras cognitivas: Problema central del desarrollo*. Madrid: Siglo XXI, Editores S.A.

Piaget, J., & García, R. (1982). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. Siglo Veintiuno.

Pirie, S., & Kieren, T. (1994). Growth in Mathematical Understanding: How Can We Characterise It and How Can We Represent It? *Educational Studies in Mathematics*, *26*(2), 165–190.

Quintanilla Cóndor, C., Fraga Varela, F., & Gewerc Barujel, A. (2012). La construcción del concepto de fracciones con Etoys. En A. Lago Ferreiro, M. Llamas Nistal, & A. A. Nogueiras Meléndez (Eds.), *Actas del X Congreso de Tecnologías Aplicadas en la Enseñanza de la Electrónica 2012* (pp. 244–247). Vigo, España: Escuela de Ingeniería Industrial Universidad de Vigo. Recuperado a partir de http://www.taee2012.es/index.php/es/actas

Reig, D. (2012, junio 15). 16 cosas que nadie nos había contado sobre creatividad (e innovación) [Acens TV]. Recuperado a partir de http://www.dreig.eu/caparazon/2012/06/15/16-tips-creatividad/

Ríos García, Y. J. (2011). Concepciones sobre las fracciones en docentes en formación en el área de matemática. *Revista Omnia*, *17*(1), 11–33.

Sankaran, S., Sampath, H., & Sivaswamy, J. (2009). Learning fractions by making patterns – An Ethnomathematics based approach. En S. C. Kong, H. C. Ogata, C. K. Chang, T. Hirashima, J. H. M. Klett, C. C. Liu, … S. J. . Yang (Eds.), *Proceedings of the 17 th International Conference on Computers in Education* (pp. 341–345). Hong Kong: Asia_Pacific Society for Computer in Education. Recuperado a partir de http://www.apsce.net/ICCE2009/pdf/C2/proceedings341-345.pdf

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación matemática*, *17*(1), 5–32.

Villagarra, M. E., Saavedra, F., Espinosa, Y., Jiménez, C., Sánchez, L., & Sanguino, J. (2012). Acercando al profesorado de matemáticas a las TIC para la enseñanza y aprendizaje. *Revista de Educación Mediática y TIC*, *1*(2), 65–87.

Wu, H. (1999). Some remarks on the teaching of fractions in elementary school. Department of Mathematics. University of California, Berkeley. Recuperado a partir de http://math.berkeley.edu/~wu/fractions2.pdf

Yusof, J., & Malone, J. (2003). Mathematical errors in fractions: A case of Bruneian primary 5 pupils. En L. Bragg, C. Campbell, G. Herbert, & J. Mousley (Eds.), *Mathematics education research: Innovation, networking, opportunity* (Vols. 1–1–2, pp. 783–790). Australasia: Proceedings of the 26th annual conference of the mathematics education research group of Australasia. Geelong, Vic: MERGA. Recuperado a partir de http://www.merga.net.au/documents/RR_yusof.pdf

Zapata Cardona, L. (2009). Cómo abordar la multiplicación y la división de fracciones. *Ethos Educativo*, *45*, 223–234.

Volver al índice de autores

5.2. Reportes de investigación

5.2.1. La robótica educativa en el aprendizaje de la geometría en estudiantes de educación básica regular

Guillermo David Morales Valencia
Universidad Nacional de Huancavelica, Huancavelica, Perú

Resumen

El propósito del trabajo de investigación fue utilizar la robótica educativa como herramienta para el aprendizaje de los polígonos regulares en los estudiantes del 2do grado de educación básica regular. El proyecto se organizó en cinco módulos orientados al desarrollo de polígonos regulares, cuyas sesiones se desarrollaron a través de actividades investigativas y aplicativas de acuerdo al módulo. Como herramienta se utilizó el robot LEGO MINDSTORM que permitió a los estudiantes comprender el concepto de polígonos regular; para tal efecto se trabajó en cinco grupos, cada uno con un robot, además cada estudiante diseñó su propia programación. Los resultados del uso de la robótica educativa, como herramienta para la construcción del concepto de polígono regular, permitió comprender y conceptualizar los conceptos de polígonos regulares y al trabajar en equipo desarrollaron habilidades comunicativas, críticas, creativas y habilidades en el uso de las tecnologías

1. Introducción

Desde la década de los setenta, la robótica ha despertado un especial interés por los aportes que puede realizar a los procesos educativos (Ruiz, 1987), asimismo las empresas e industrias han incorporado procesos de producción y múltiples elementos tecnológicos que incluyen automatismos y control de procesos (Moreno; Muñoz; Serracín; Quintero; Pittí, Kathia; Quiel, 2012).

1.1. Robótica educativa

Hay diferentes formas de concebir la robótica educativa en el campo de la educación; la robótica educativa como recurso didáctico (Pitty, 2012), la robótica educativa como

herramienta (Moreno; Muñoz; Serracín; Quintero; Pittí, Kathia; Quiel, 2012), la robótica educativa como estrategia para la enseñanza (Barrera, 2014) y la robótica educativa como herramienta mental (Mikropoulos, Bellou, 2013).

La robótica educativa parte del siguiente principio piagetiano, no existe aprendizaje si no hay intervención del estudiante en la construcción de su aprendizaje; por el cual se permite explorar el conocimiento y llevarlo a solucionar problemas a través de la elaboración de modelos. Por tanto, la robótica educativa es una disciplina que permite concebir, diseñar y construir de forma tangible modelos que simulen algún elemento de la realidad. Esta integración e interrelación se vuelve significante al establecerse una conexión entre la acción concreta y la codificación simbólica, complementándose la integración con la concepción del diseño y la construcción de dichos modelos (Gallardo y Calagua, 2012; Gonzáles España y Jiménes Builes, 2009).

	
Figura 5. Kit lego WeDo. https://education.lego.com/en-us/products/lego-education-wedo-construction-set/9580.	***Figura 6.*** Kit Lego Mindstrom NXT. http://www.robotic-lab.com/blog/reportajes/lego-mindstorms-nxt

La robótica educativa favorece el desarrollo de las habilidades productivas, creativas, digitales y comunicativas; y se convierte en un motor para la innovación cuando produce cambios en las personas, en las ideas, actitudes, en las relaciones, modos de actuar y pensar de los estudiantes y educadores (Pozo, 2005). Si esos cambios son visibles en la práctica cotidiana, entonces estamos ante una innovación porque la robótica habrá transcendido sus intuiciones y se reflejará en sus acciones y producto (Zúñiga, 2006). La robótica educativa busca despertar el interés de los estudiantes transformando las asignaturas tradicionales

(Matemáticas, Física, Informática) en más atractivas e integradoras, al crear entornos de aprendizaje propicios que recreen los problemas del ambiente que los rodea (Zúñiga, 2006).

Hoy en día la robótica se ha integrado en algunos programas de las escuelas primarias y secundarias, e incluso en los jardines de infancia. Esto se debe en parte, a que la robótica provoca un alto nivel de atracción para los niños y jóvenes; muchas actividades educativas dependen de esta fascinación por los robots móviles. El kit LEGO Mindstorms NXT1 es la plataforma más conocida para los estudios robóticos en etapas tempranas. Reivindica la robótica educativa como vía para que los alumnos adquieran destrezas y habilidades tecnológicas, pero también en el desempeño del trabajo en equipo (habilidades sociales) (Gallego, 2010).

1.2. Seymour Papert y construccionismo

Papert creó un lenguaje de cómputo con todas las potencialidades de los lenguajes "serios", pero con una sintaxis más análoga al lenguaje natural, más accesible para ser comprendido no solo por los niños y las niñas, sino por jóvenes y adultos no expertos en computación. Se trata del lenguaje Logo, con el cual pueden operar las computadoras con mayor facilidad. Pero más aún, Papert ha influido por las ideas de Piaget, desarrolló un enfoque educativo para sustentar el uso de computadoras como herramientas de aprendizaje: el Construccionismo (Badilla y Chacon, 2004, p. 3).

Papert y Marvin Minsky crearon el Laboratorio de Inteligencia Artificial del Instituto Tecnológico de Massachussets (MIT), construyeron un robot que representaba una tortuga; este se ponía en el piso y se conectaba a una computadora a través de la cual los aprendices programaban los movimientos del robot mediante el lenguaje Logo. De los movimientos de la tortuga surgieron las instrucciones básicas Logo (adelante, atrás, derecha e izquierda) llamadas "primitivas". A partir de estas instrucciones primitivas y con las nociones básicas de la geometría euclidiana, niños, niñas, jóvenes y adultos no expertos en temas relacionados con computadoras podían programar a la tortuga para que realizara trayectorias complejas (Badilla Saxe y Chacon Morillo, 2004, p. 3-4).

En 1980, Papert publicó el libro Desafío a la Mente: Computadoras, Niños e Ideas Poderosas, que "revolucionó la concepción que se tenía sobre la relación que se establece entre las niñas y niños con las computadoras" (Badilla Saxe y Chacón Morillo, 2004). Papert concibe a la computadora como una portadora de semillas culturales, cuyos

productos cognitivos trascenderán la presencia del material concreto: “el trabajo con computadoras puede ejercer una poderosa influencia sobre la manera de pensar de la gente, yo he dirigido mi atención a explorar el modo de orientar esta influencia en direcciones positivas" (Papert, 1987, p. 43).

Papert otorga a los y las aprendices un rol activo en su aprendizaje, colocándolos como diseñadores de sus propios proyectos y constructores de su propio aprendizaje. “…un sentido de dominio sobre un elemento de la tecnología más moderna y poderosa y a la vez establece un íntimo contacto con algunas de las ideas más profundas de la ciencia, la matemática y el arte de construcción de modelos intelectuales” (Papert, 1987, p.17-18).

1.3. Geometría, polígonos regulares

Algunos polígonos tienen características que los convierten en polígonos regulares. Todos los lados son de igual longitud. Todos los ángulos miden lo mismo. Un polígono regular es aquel cuyos lados son congruentes entre sí, y todos sus ángulos también son congruentes entre sí (Pañuela, 2015, p. 47).

Según Echegaray (2001) los polígonos regulares tienen las siguientes partes:

Lado (L), Vértice (V), Centro (C), Radio (R), Apotema (a), Diagonal (d), Perímetro (P).

Echegaray (2001), considera las siguientes propiedades de un polígono regular:

- Todos los ángulos centrales de un polígono regular son congruentes y su medida α puede obtenerse a partir del número de lados *n* del polígono. $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$
- El ángulo interior β de un polígono regular de *n* lados mide: $\beta = 180^\circ . \frac{(n-2)}{n}$
- La suma de los ángulos interiores, ∑ β, de un polígono regular es de:

$$\sum \beta = 180^\circ . (n-2)$$

- El ángulo exterior, γ, de un polígono regular es de: $\gamma = \frac{360^\circ}{n}$
- La suma de los ángulos exteriores, ∑ γ, de un polígono regular es: $\sum \gamma = 360^\circ$

2. Metodología

La investigación que se presenta, es producto del trabajó con un grupo de estudiantes (grupo de observación), a quienes se aplicó módulos de robótica educativa con contenidos de polígonos regulares de geometría, para poder observar el efecto que causa éste en el aprendizaje del polígono regular en las estudiantes de segundo grado de una Institución Educativa pública. En este proceso las estudiantes construyeron y usaron del kit de robótica Mindstorm EV3, con el cual construyeron diferentes polígonos regulares, iniciando con la programaron a través de Etoys luego migrar a la programación con el software Mindstorm EV3. Para el desarrollo del proyecto nos basamos en los "criterios para mejores prácticas" (Merdan, Lepuschitz, Koppensteiner, Balogh, 2016), el cual nos orientó los procedimientos para la ejecución.

Momento 1. Reconocimiento y armado del robot

Se inicia con el reconocimiento del módulo, dando explicación a las estudiantes sobre los conceptos básicos de la robótica educativa, el objetivo de la robótica educativa donde las estudiantes reconocen los principales componentes como son: sensores, motores, engranajes y otros del kit de robótica Ev3.



Figura 7. Reconocimiento.

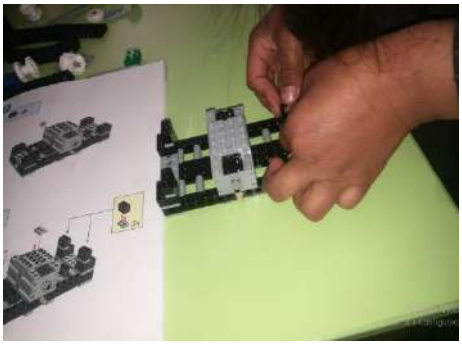


Figura 8. Armado del Lego Mindstrom EV3.

En la figura 4, se muestra cómo cada equipo de estudiantes arman pieza por pieza hasta conseguir un modelo del robot que nos permitirá construir polígonos regulares mediante el lenguaje de programación propio del Lego. Para este modelo, se utilizó dos motores grandes que tiene el kit y las piezas de acuerdo al catálogo; además, las estudiantes conformado por equipos construyeron diferentes modelos ayudándose entre ellas.

Momento 2. Programación con Etoys

El lenguaje de programación Etoys es una introducción a la programación orientado por objetos, porque permite a través del uso de mosaicos y guiones se ordena a un robot virtual desarrollar acciones de *giros*, *avances* y *rotaciones*. La figura 5, muestra lo realizado por la estudiante Anais. En este caso cada estudiante contó con una computadora para desarrollar el proyecto de diseñar polígonos regulares con el programa Etoys. Así, al iniciar el modulo se les explicó a las estudiantes los fundamentos básicos de Etoys y luego se inicia con diseñar un cuadrado, a partir de ahí, ellas solas inician los diseños de construcción de los diferentes polígonos regulares. Finalmente, las estudiantes motivadas por el trabajo construyeron los polígonos regulares utilizando las diferentes sentencias y luego extraer las diferentes fórmulas.

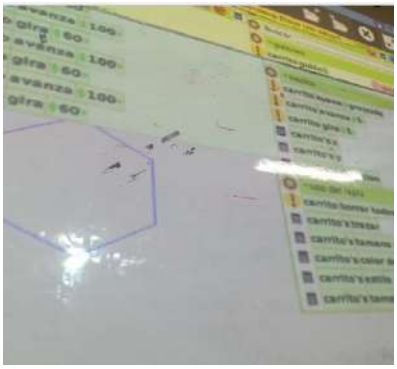


Figura 9. Construcción de un pentágono con etoys

Momento 3. Programando mi robot Ev3

Finalmente, teniendo las ideas básicas sobre programación utilizamos el software de Lego Mindstorm para programar el robot y desarrollar las gráficas de polígonos como se hizo con Etoys. El primer bloque que se utilizó fue el que controla los dos motores B y C con una misma velocidad el cual nos permitió realizar una recta, el segundo bloque que se utilizó fue el bloque que nos permite controlar las velocidades de cada motor, donde al motor C queda en estado de reposo mientras que el motor B avanza realizando un giro de 90 grados, teniendo estos primeros pasos las estudiantes por lógica repiten estos dos bloques y así forman el cuadrado el cual podemos observar en la figura 7. A partir de este ejemplo las estudiantes divididas en grupos realizan otros polígonos regulares.



Figura 10. Robot Ev3 realizando el trazo de un cuadrado

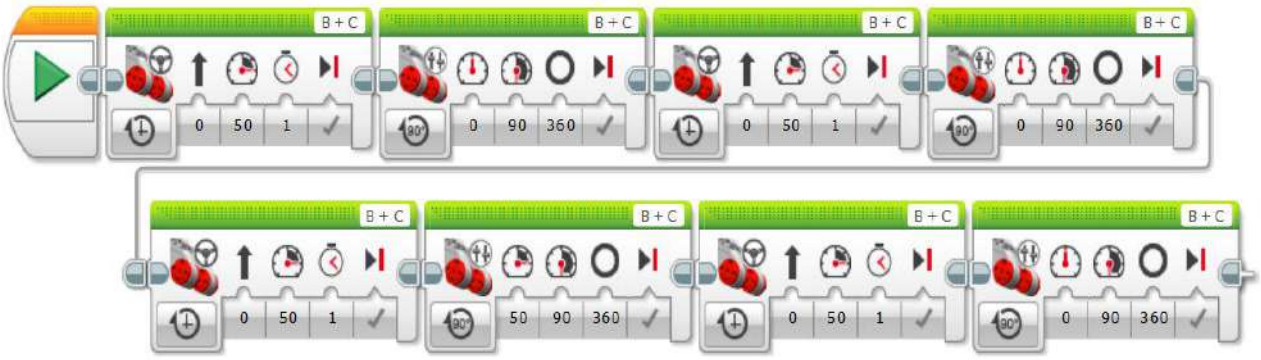


Figura 11 . Diseño de programación para graficar un cuadrado

3. Resultados

3.1. Resultado de la prueba de entrada y prueba de salida

Antes de realizar los módulos, presentamos el documento de diagnóstico inicial y luego de desarrollar los módulos también se hizo el diagnóstico final. El documento contenía ocho preguntas relacionadas al aprendizaje de los polígonos regulares y la robótica educativa obteniendo los siguientes resultados:

Tabla 1. *Nivel de logro de aprendizaje de polígonos regulares de diagnóstico inicial y diagnóstico final de los estudiantes del segundo grado de secundaria.*

		Prueba de entrada		**Prueba de salida**	
		ni	**%**	**ni**	**%**
DIAGNÓSTICO	EN INICIO	20	100%	0	0%
	EN PROCESO	0	0%	0	0%
	LOGRO PREVISTO	0	0%	12	60%
	LOGRO DESTACADO	0	0%	8	40%
	TOTAL	20	100%	20	100%

Fuente: Recojo de información personal

En la tabla 1, se observa en la prueba entrada que 20 estudiantes se encuentran en el nivel de ***inicio*** respecto al conocimiento sobre polígonos regulares y robótica educativa. A partir de los resultados obtenidos, se concluye que los estudiantes tienen bajos referentes sobre los saberes previos respecto a los polígonos regulares y la robótica educativa.

Así mismo se realizó una prueba de salida; cuyo resultado alcanzó el ***logro previsto*** con 12 estudiantes (60%) del total de 20, seguido el nivel de ***logro destacado*** con 8 estudiante (40%). Mientras que, en el nivel ***en proceso*** y en el nivel de ***en inicio*** no se tiene ningún estudiante. Estos resultados evidencian que el aprendizaje ha mejorado notoriamente respecto a la prueba de diagnóstico al momento del inicio.

Los resultados descriptivos corroboran la hipótesis de investigación, que la robótica educativa influye en el aprendizaje de los polígonos regulares en estudiantes de segundo grado de la Institución Educativa Pública de Huancavelica.

Para evaluar los resultados del diagnóstico inicial y final en el uso de la robótica educativa para el aprendizaje de los polígonos regulares, se utilizó la estadística prueba T de Wilcoxon (Quintanilla y Cortavarria, 2009) al nivel de significancia de α= 5%, para n=20; se tiene $T_{5\%,20}$ =52. Como consecuencia de los resultados se tiene que $|Tc = 0| < |T_{5\%,20} = 52|$; esto muestra que el uso de la robótica educativa como herramienta influye en el aprendizaje de los polígonos regulares en geometría.

4. Conclusiones

El trabajo de investigación muestra los resultados del uso de la robótica educativa en la introducción al desarrollo de polígonos regulares en geometría. Se evidencio que el uso de la robótica educativa como herramienta educativa, logra alcanzar mejores niveles de comprensión de polígono regular.

También se pudo apreciar que los niños/as logran el desarrollo de habilidades, tales como comunicativas, criticas, creativas y habilidades en el uso de las tecnologías.

Además, el uso de la programación con Etoys permite a los niños desarrollar competencias de programación, como consecuencia facilita la programación del software Lego Mindstorm que es una competencia del manejo tecnológico.

Referencias

Badilla Saxe y Chacón Morillo (2004). construccionismo: objetos para pensar, entidades públicas y micro mundos.

Barrera, Nelson (2014). Uso de la robótica educativa como herramienta en el aula.

Echegaray, José (2001). Geometría: ángulos, polígonos y circunferencias, 1 edición (en es pañol), Editorial Bruño.

Escobar B. y Barona H. (2015) "*La Robótica como medio de enseñanza para el logro del aprendizaje de los niños en educación básica*"

Gallardo, L. y Calagua, W. (2012). "*Robótica educativa"*. Ministerio de Educación del Perú.

Gallego, E. (2010). *Robótica Educativa con Arduino una aproximación a la robótica bajo el hardware y software libre*.

Gonzales España y Jimenes Builels (2009). "*La robótica como herramienta para la educación en ciencias e ingeniería".*

Merdan, Lepuschitz, Koppensteiner, Balogh, (2016). *Robotics in education*.

Mikropoulos, Tassos A., y Bellou, Joanna (2013). La robotica educativa como herramienta mental. Recuperado en: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.700.8493&rep=rep1&type=pdf

Moreno, Iveth; Muñoz, Lilia; Serracín, José Rolando; Quintero, Jacqueline; Pittí Patiño, Kathia; Quiel, Juan; (2012). *La robótica educativa, una herramienta para la enseñanza-aprendizaje de las ciencias y las tecnologías*., 74-90.

Pañuela.(2015). *Construcción de polígonos regulares con regla y compás para desarrollar el pensamiento geométrico en estudiantes de grado séptimo.* Recuperado de:

http://repositorio.unillanos.edu.co/bitstream/001/352/1/INFORME%20FINA%20TESIS%2024-NOV-15.pdf

Papert, S. (1987). *Desafío de la mente. Buenos Aires,* Argentina: Ediciones Galápago.

Pitti, K. (2012). *La robotica en la educación.* Recuperado en: https://diarium.usal.es/kathia_pitti/2012/10/01/la-robotica-en-la-educacion/

Pozo, E. G. (2005). *Técnicas para la Implementación de la Robótica en la Educación Primaria*.

Quintanilla Cóndor, C. (2013*). Introducción a la geometría con Etoys.* Recuperado en : https://www.researchgate.net/publication/303998479_Introduccion_a_la_geometria_con_Etoys.

Ruiz, E. (1987). La robótica pedagógica. Centro de Estudios sobre la Universidad CESU, Universidad Nacional Autónoma de México. Recuperado en: http://virtual.pascualbravo.edu.co/buzon/cintex.garpe/robotica.doc

Zúñiga, A. L. (2006). *Fundacion Omar Dengo*. Recuperado el 10 de abril de 2011, http://www.fod.ac.cr/robotica/descargas/roboteca/articulos/2009/motorinnova_corto.pdf

Volver al índice de autores

5.3. Socialización de experiencias

5.3.1. POVIX: Una interfaz gráfica de usuario (GUI) en MatLab para calcular el Polinomio de Villarreal

Lenin Quiñones Huatangari, Universidad Nacional Toribio Rodríguez de Mendoza de Amazonas, Perú 1
Manuel Emilio Milla Pino, Venenzuela

Resumen

El matemático peruano Federico Villarreal en 1879 propuso una fórmula para calcular la potencia n-ésima de un polinomio P(x), denominado Polinomio de Villarreal. El objetivo del presente trabajo fue crear una interfaz gráfica para usuario que nos permita calcular la potencia n-ésima entera de un polinomio, a partir de la fórmula propuesta por el científico. Se elaboró una interfaz gráfica de usuario denominada (POVIX), para ello se utilizó la herramienta matemática MatLab v9.2 (R2017a) sobre el sistema operativo Windows 10. Con ayuda del Toolbox GUIDE (Graphical User Interface Development Environment) se diseñó la GUI que permitirá utilizar la fórmula propuesta. Finalmente, con MatLab Compiler™ v9.01, se obtuvo una aplicación autónoma. El resultado obtenido con la GUI es 100% la misma que se ha obtenido por otros métodos.

Introducción

Toda la programación del GUI se realizó en una computadora con una distribución Windows a 64 bits. La interfaz gráfica de usuario se realizó con el comando "guide" de MatLab, el cual crea dos archivos: El primer archivo *.fig ("fig file"), en donde pueden insertarse ejes, botones, deslizadores, texto de edición, menús, etc. Cada uno de los cuales tienen ciertas propiedades y realiza una función determinada. El segundo archivo, *.m donde se encuentran todas las acciones de cada elemento de la GUI, además se puede acceder del archivo *.fig al *m, mediante ("Callback Function") de cada elemento. Usando el compilador MatLab Compiler™ v9.01, se logró obtener una aplicación autónoma .exe capaz de ejecutarse en cualquier computadora con una distribución Windows que no tenga necesariamente el MatLab instalado.

POVIX consta de ocho archivos:

- Tres script: El primer script está compuesta por todas las acciones del GUI, que da la bienvenida al programa (Povix.m), el segundo script las acciones que se puedan realizar al abrir el manual de ayuda al usuario (manual.m) y el tercer script contiene la programación en lenguaje .m para calcular el polinomio de Villarreal.

- Tres GUIs: La primera GUI contiene la interfaz que da la bienvenida al programa y es lo primero que el usuario va a ver (Povix.fig) ver figura 1, la segunda GUI nos permitirá mostrar el manual de ayuda sobre el Polinomio de Villarreal, ver figura 2 y finalmente la tercera GUI nos permitirá ingresar los dos parámetros necesarios para calcular el problema, el $P(x)$, la potencia.y finalmente en esta GUI se muestra la gráfica del polinomio y la expresión algebraica del mismo en la parte superior de la figura ver figura 3.

- El instalador del compilador empleado, necesario para computadoras que no tengan instalado MatLab.

- Un archivo Povix.exe el cual nos permite utilizar POVIX sin necesidad de haber instalado.

Al ejecutar POVIX, este nos va a mostrar una GUI de entrada, ver figura 1, donde se puede elegir cualquiera de los tres botones y cada uno de ellos se obtiene diferentes acciones. Si presionamos el botón Manual, obtendremos un resumido manual, como se puede observar en la figura 2.



Figura 1. Pantalla de bienvenida a POVIX

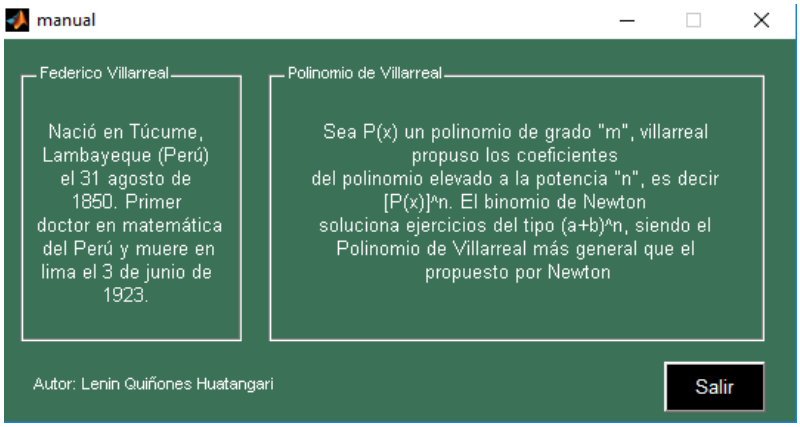


Figura 2. Pantalla del manual de POVIX

La figura 3 es el resultado elegir el botón usar, el cual permite al usuario seleccionar el polinomio y la potencia que desea procesar. Finalmente, el usuario podrá hacer click sobre el botón Calcular con el ícono negro y comenzar el cálculo.

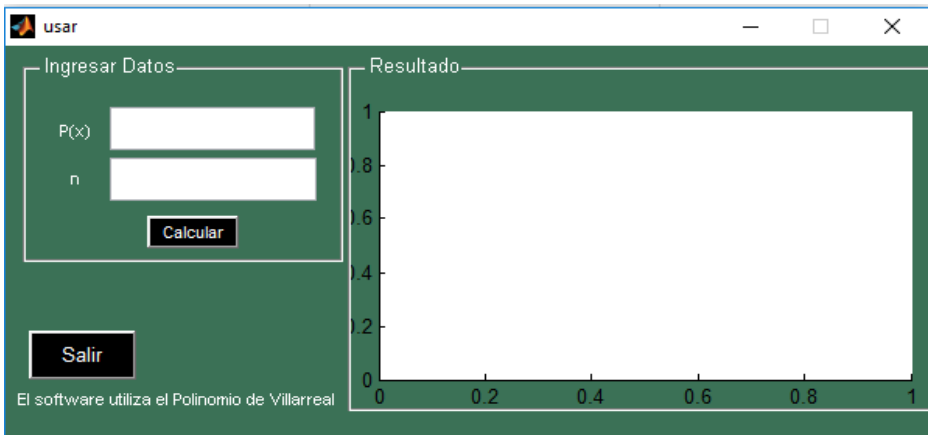


Figura 3. Pantalla de uso de POVIX

La figura 4 muestra una secuencia de los cálculos realizados para diversos polinomios a diferentes potencias. En dicha secuencia se puede identificar de forma sencilla la generación de diferentes polinomios a lo largo del medio de simulación. En la captura se puede ver las gráficas de dicho cálculo.

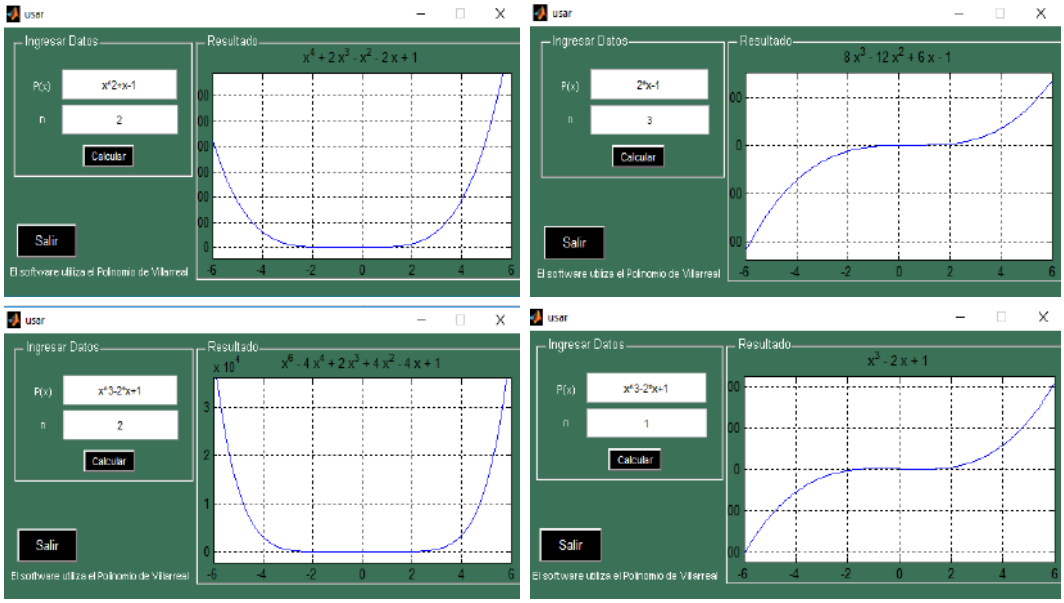


Figura 4. Resultados de calcular la potencia de un polinomio, usando POVIX

Este trabajo nos permitió calcular y graficar el polinomio que se obtiene del resultado de dicho problema utilizando la fórmula propuesta por Federico Villarreal en 1879, para el

caso particular cuando n ∈N. La interfaz gráfica de usuario POVIX nos permite un control sencillo, solo con uso de ratón, lo cual elimina la necesidad de aprender el lenguaje .m y escribir comandos a fin de ejecutar dicha aplicación. Los resultados obtenidos en el software son 100% iguales con los calculados por el autor. Se obtuvo una aplicación portable que incluye su propio compilador, permitiendo que funcione en cualquier computadora con una distribución de Windows a 64 bit. Finalmente se puede concluir que POVIX es una herramienta de aprendizaje para comprender teórica y geométricamente la potenciación de un polinomio y específicamente el Polinomio de Villarreal.

Referencias

Alberto Rodríguez. (1957, enero). Potencias de un Polinomio.

Armet, P. (1822). *Memoria que demuestra el moda de hallar el resultado de las potencias de los polinomios: leída en la Junta que celebra la Academia Nacional de Ciencias Naturales el 17 de Febrero de 1819*. Imp. Vda e Hijos de Antonio Brusi.

Carbajal Ordinola, D. (2016). *Polinomio de Villarreal*.

Depcik, C., & Assanis, D. N. (2005). Graphical user interfaces in an engineering educational environment. *Computer Applications in Engineering Education*, *13*(1), 48–59.

Egert, U., Knott, T., Schwarz, C., Nawrot, M., Brandt, A., Rotter, S., & Diesmann, M. (2002). MEA-Tools: an open source toolbox for the analysis of multi-electrode data with MATLAB. *Journal of neuroscience methods*, *117*(1), 33–42.

Elorduy, G. (2017, septiembre 28). Potencia de un polinomio (Fórmula de Leibnitz). Recuperado 22 de octubre de 2017, a partir de https://eluniversomatematicoblog.wordpress.com/2017/09/28/potencia-de-un-polinomio-formula-de-leibnitz/

Fedák, V., Balogh, T., & Záskalickỳ, P. (2012). Dynamic simulation of electrical machines and drive systems using matlab gui. En *MATLAB-A Fundamental Tool for Scientific Computing and Engineering Applications-Volume 1*. InTech.

Giuma, B., Vijayajothi, P., Kahar, O., Rafiq, M., Kadir, A., & Kanesan, M. (2009). Graphical user interface (GUI) in MatLab for solving the pulsatile flow in blood vessel. *CFD Letters*, *1*(1), 50–58.

Gözel, T., Eminoglu, U., & Hocaoglu, M. H. (2008). A tool for voltage stability and optimization (VS&OP) in radial distribution systems using matlab graphical user interface (GUI). *Simulation Modelling Practice and Theory*, *16*(5), 505–518.

GUI de MATLAB. (s. f.). Recuperado 23 de octubre de 2017, a partir de https://es.mathworks.com/discovery/matlab-gui.html

Hunt, B. R., Lipsman, R. L., & Rosenberg, J. M. (2014). *A guide to MATLAB: for beginners and experienced users*. Cambridge University Press.

Lent, C. S. (2013). *Learning to program with MATLAB: Building GUI tools*. John Wiley & Sons.

López, R. V. (2014). Federico Villareal y Villareal. *Pro Mathematica*, *14*(27-28), 135-154. Recuperado a partir de http://revistas.pucp.edu.pe/index.php/promathematica/article/view/8163

M. Montanuy Fillat et al (último). (1990). La Matemática en la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona: Las memorias durante el periodo 1770-1890. *Universidad de Barcelona*, *13*, 107-130.

noticias.universia.edu.pe. (s. f.). 6 personajes destacados de la ciencia y tecnología del Perú. Recuperado 21 de octubre de 2017, a partir de http://noticias.universia.edu.pe/cultura/noticia/2015/04/01/1122648/6-personajes-destacados-ciencia-tecnologia-peru.html

Purcell, E. J., Rigdon, S. E., & Varberg, D. E. (2007). *Cálculo*. Pearson Educación.

Segovia, J. L. (2013). Federico Villarreal Villarreal Un hombre de ciencia. *Cátedra Villarreal*, *1*(1). https://doi.org/10.24039/cv20131112

Volver al índice de autores

Fotografías del IX CIEM

FOTOGRAFÍAS DEL IX CIEM






DR. NICASIO VALENCIA MAMANI



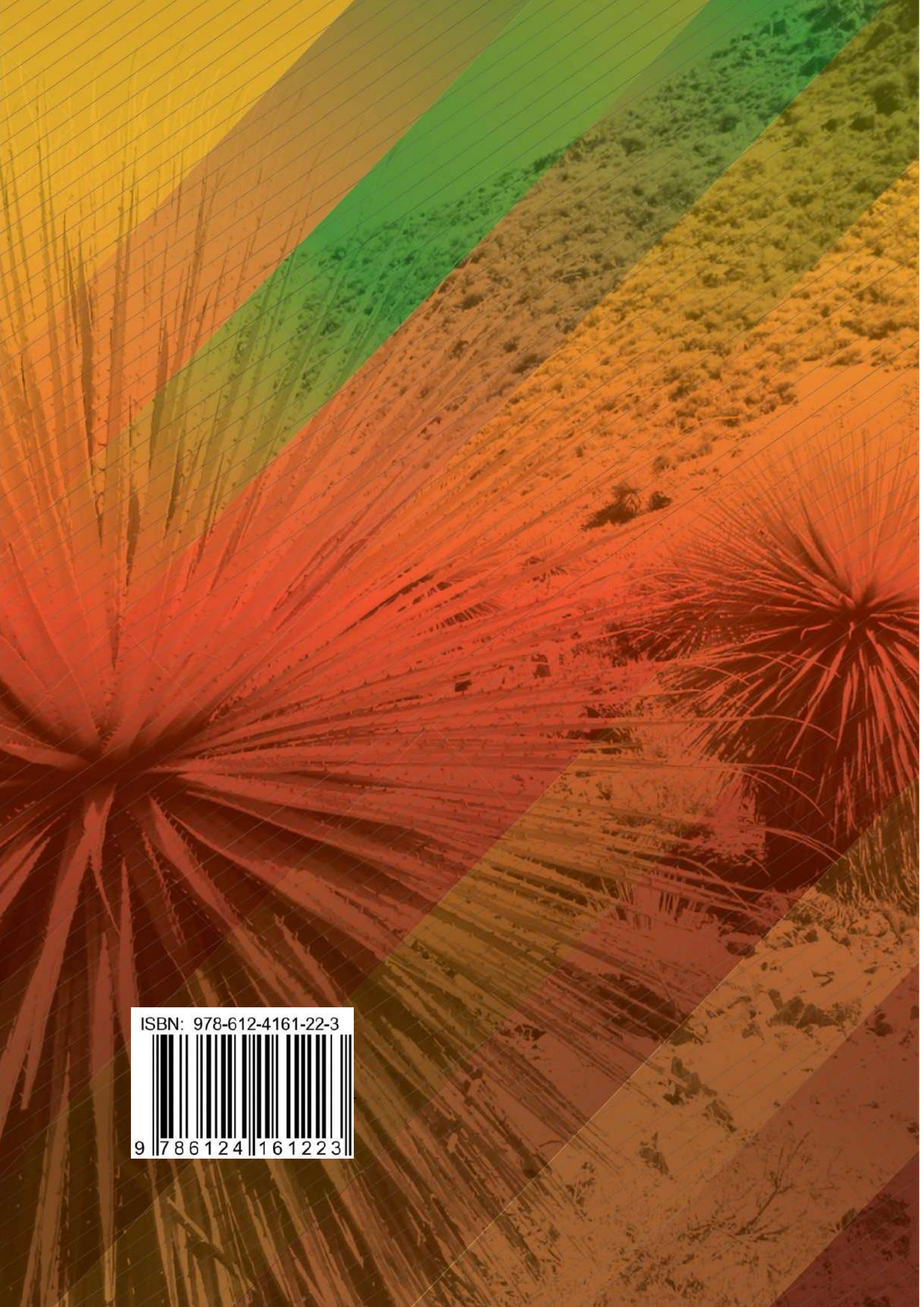







IX Congreso
Internacional
UNH


SOBRE
ENSEÑANZA
MATEMÁTIC
9 al 21


ISBN: 978-612-4161-22-3